

Tadeusz CHMIELNIAK  
Andrzej MISIEWICZ

Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych  
Politechnika Śląska

#### ANALIZA PRZEBIEGU PROCESU ITERACYJNEGO W METODZIE KOLEJNYCH STANÓW NIEUSTALONYCH Z WYKORZYSTANIEM SCHEMATU GODUNOWA

**Streszczenie:** Przedstawiono wyniki obliczeń parametrów przepływu wewnątrz elementarnego oczka dla schematu zaproponowanego w [6]. Pozwalają one ocenić zbieżność i dokładność procesu iteracyjnego.

### 1. Wprowadzenie

Dążenie do zwiększenia obciążenia wieńców łopatkowych maszyn wirnikowych spowodowało wyraźny wzrost zainteresowania badaniami przepływów transonicznych w kanałach międzyłopatkowych. Do rozwiązania ustalonego zadania prostego teorii palisad najczęściej stosuje się metody oparte na analizie pomocniczego zadania początkowo-brzegowego (metody ustalania) [ np. 1, 2 ] lub metody oparte na zastosowaniu różnicowych (w zależności od rodzaju przepływu operatorów różnicowych (metody relaksacji) [ np. 3 ]. Bardziej szczegółowy przegląd metod wchodzących w skład niniejszego opracowania przedstawiono w artykule [ 4 ]. Przedmiotem analizy w pierwszej grupie metod są całkowite i różniczkowe postacię praw zachowania dla przepływu wirowego płynu nielepkiego. Umożliwia to z większym lub mniejszym przybliżeniem (w zależności od przyjętego sposobu budowy różnicowego zadania początkowo-brzegowego) rozpatrywanie zjawisk falowych w przepływie o zróżnicowanej intensywności. W drugim przypadku rozpatruje się liniowe lub pełne równanie potencjału prędkości. Taki stan uniemożliwia dokładną dyskusję zjawisk falowych o dużej intensywności, chociaż dla obecnie rozpatrywanych parametrów przepływów w kanałach maszyn przepływowych (zwłaszcza ekspansyjnych) błędy są nieznaczne [ np. 5 ].

Analiza różnych sposobów budowy algorytmów rozwiązania zadania początkowo-brzegowego sugeruje, że metoda Godunowa i jego współpracowników [ 6 ] charakteryzuje się najpełniejszym odzwierciedleniem fizycznej istoty przepływów transonicznych. Jest ona jednak przez to bardziej złożona. W niniejszym opracowaniu przedstawiono pewne badania szczegółowe ułatwiające wybór algorytmów służących do określenia parametrów przepływu na konturach obszarów elementarnych (oczka siatki).

Uzyskane wyniki mogą być wykorzystywane do optymalizacji algorytmu obliczeń przepływów palisadowych.

## 2. Podstawowy układ równań

Przepływ wirowy płynu nielepkiego opisują równaniami zachowania masy, pędu i energii w postaci całkowej

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \, d(\Sigma \vec{n}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} \, d\Omega + \oint_{\Sigma} (\rho + \rho \vec{v}) \vec{v} \, d(\Sigma \vec{n}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} E \, d\Omega + \oint_{\Sigma} (E + p) \vec{v} \, d(\Sigma \vec{n}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$\Omega$  - elementarna powierzchnia,

$\Sigma$  - kontur zewnętrzny elementarnej powierzchni,

$E = e + \frac{v^2}{2}$ ,

$e$  - energia wewnętrzna,

$\vec{n}$  - jednostkowy wektor normalny do konturu,

Celem zamknięcia powyższego układu równań należy je uzupełnić równaniem stanu

$$p = p(\rho, e) \quad (2)$$

Przeprowadzając dyskretyzację układu równań (1) dla zagadnienia płaskiego otrzymujemy układ równań różnicowych [7]:

$$\begin{aligned} r_{\{m_j\}}^{k+1} &= r_{\{m_j\}}^k - \frac{\Delta t}{\omega_{\{m_j\}}} \left[ \sum_{i=1}^N \left\{ \vec{F}(f) \vec{n} \cdot \vec{G}_{\{i\}}^k \right\}_{\{m_j\}} \right] \\ f &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ E \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \vec{v} \\ p \vec{n} + \rho \vec{v} \vec{n} \cdot \vec{v} \\ (E + p) \vec{v} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$\omega$  - powierzchnia elementarnego oczka siatki,

$\zeta$  - granica zewnętrzna elementarnego oczka siatki o powierzchni  $\omega$ ,

$\{m_j\}$  - ciąg indeksów ( $j = 1, 2$ ) identyfikujący oczko siatki,

$N$  - liczba prostoliniowych odcinków granicy zewnętrznej oczka.

W schemacie różnicowym (3) konieczne jest wyznaczenie wartości parametrów przepływu na konturze oczka. Jedną z metod jest metoda zaproponowana przez Godunowa i jego współpracowników [6] oparta na rozwiązaniu jednowymiarowego zadania Riemanna rozprzestrzeniania się fal wzdłużnych generowanych różnicą parametrów w dwóch sąsiednich oczkach. W wyniku rozwiązania otrzymujemy układ zależności pozwalający wyznaczyć metodą iteracyjną parametry

układu falowego indukowanego na granicy oszka [6, 8]

$$d_j^{(1)} = \begin{cases} \frac{(k+1)p_{pn}^{(1-1)} + (k-1)p_j}{2} \zeta_j & (p_{pn}^{(1-1)} \geq p_j) \\ \frac{\frac{k-1}{2k} k p_j \zeta_j \frac{1 - p_{pn}^{(1-1)}/p_j}{1 - (p_{pn}^{(1-1)}/p_j)^{\frac{k-1}{2k}}}}{1 - (p_{pn}^{(1-1)}/p_j)^{\frac{k-1}{2k}}} & (p_{pn}^{(1-1)} < p_j) \end{cases} \quad (4a)$$

$$p_{pn}^{(1)} = \varphi(p_{pn}^{(1-1)}) = [d_2^{(1-1)} p_1 + d_1^{(1-1)} p_2 + d_1^{(1-1)} d_2^{(1-1)} (v_1 - v_2)] \wedge (d_1^{(1-1)} + d_2^{(1-1)}) \quad (4b)$$

$$v_{pn} = (d_1 v_1 + d_2 v_2 + p_1 - p_2) \wedge (d_1 + d_2)$$

Związki (4) analizuje się ostatecznie w postaci [9]:

$$p_{pn}^{(1)} = [\alpha^{(1-1)} p_{pn}^{(1-1)} + \varphi(p_{pn}^{(1-1)})] \wedge (\alpha^{(1-1)} + 1),$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{k-1}{3k} \frac{1 - z_{1-1}}{z_{1-1} \frac{(k+1)/2k}{(1 - z_{1-1})^{\frac{k-1}{2k}}}} \quad (5)$$

$$z_{1-1} = p_{pn}^{(1-1)} \wedge (p_1 + p_2)$$

$v_{pn}, p_{pn}$  - wartość prędkości i ciśnienia w obszarze między układem fal rozchodzących się w kierunku  $\vec{n}$  i  $\vec{n}$ .

W przypadku występowania słabych zjawisk falowych ogólne rozwiązanie można zastąpić przybliżeniem akustycznym w postaci:

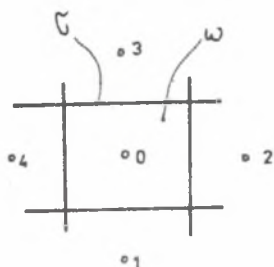
$$d_1 = d_2 = \sqrt{k \frac{p_1 + p_2}{2} \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}} = d$$

$$p_{pn} = \frac{p_1 + p_2}{2} + d \frac{v_1 - v_2}{2} \quad (6)$$

$$v_{pn} = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2d}$$

### 3. Zakres obliczeń

Do obliczeń przyjęto dwuwymiarowe pojedyncze oczko prostokątne (rys.1). Na obrzeżu i we wnętrzu, którego zadano warunki zbliżone do przepływu w kanale międzyłopatkowym ostatnich stopni turbin parowych.



Rys.1. Postać elementarnego oczka przyjętego do obliczeń

Nieciągłość parametrów przyjęto między punktem 0 i 2. Natomiast w punktach 1, 3 i 4 w kolejnych iteracjach przyjmowane były wartości poszczególnych funkcji równe wartościom w punkcie 0. Rozważane były następujące trzy przypadki:

-  $v_0 < a$ ,  $v_2 < a$  - rys. 2ab

-  $v_0 < a$ ,  $v_2 > a$  - rys. 3ab

-  $v_0 > a$ ,  $v_2 > a$  - rys. 4ab

W ramach tych obliczeń sprawdzono zmianę błędu względnego ciśnienia i energii z liczbą iteracji. Równocześnie dla zadanych przedziałów czasowych  $DT$  określano wartości błędu względnego ciśnienia w dwóch kolejnych iteracjach.

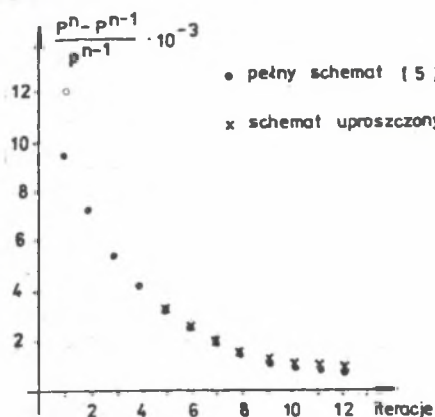
### 4. Wnioski

Analizując przedstawione wyniki obliczeń można stwierdzić, że różnice między analizowanymi schematami (zal. 5 i 6) zarysowują się przy przepływie okołodźwiękowym i naddźwiękowym, zwłaszcza gdy gradient ciśnienia jest znaczny (większy od 30 % wartości ciśnienia w punkcie 0). Przy niewielkich zmianach ciśnień nie stwierdzono różnic w wynikach obliczeń między pełnym i uproszczonym schematem Godunowa (rys. 2a, b). Natomiast w pozostałych przypadkach po około 10 iteracjach błąd względny ciśnienia dla obu przedstawionych schematów jest identyczny (rys. 3a, 4a). Jest to następstwem faktu obniżania się wartości ciśnienia w punkcie 0, a co za tym idzie obniżenia gradientu ciśnienia między punktami 0-2. Należy tu podkreślić, że różnice zaznaczają się szczególnie wyraźnie w przypadku zmiany energii, dlatego też za kryterium dokładności należy uznać stałość energii w całym obszarze obliczeniowym.

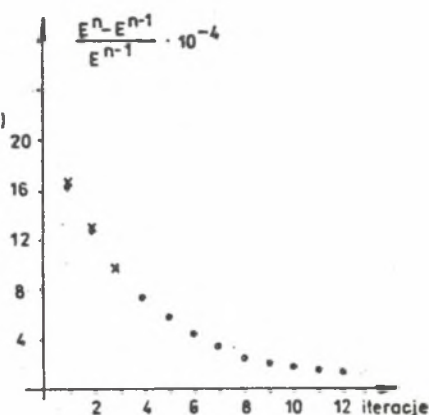
Równocześnie z przebiegu krzywej  $\frac{p^n - p^{n-1}}{p^n} = f(DT)$ , (rys.5), wynika celowość dokładnego przestrzegania kryterium stabilności procesu

$$DT \leq \min_1 \frac{1}{\max(v_1 + a, v_1 - a)} \quad (7)$$

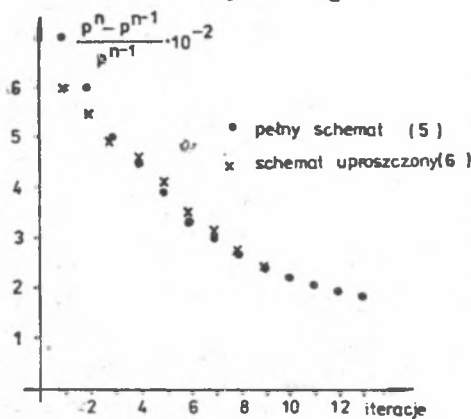
Dla wartości zbyt małych proces może być wolnozbieżny i w związku z tym błędy zaokrągleń mogą istotnie wpływać na dokładność obliczeń. Przy badaniach wpływu kroku czasowego na przebieg procesu iteracyjnego stwierdzono,



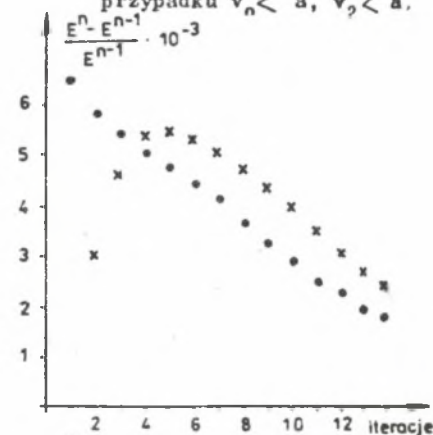
Rys. 2a. Błąd względny ciśnienia dla przypadku  $v_0 < a, v_2 < a$



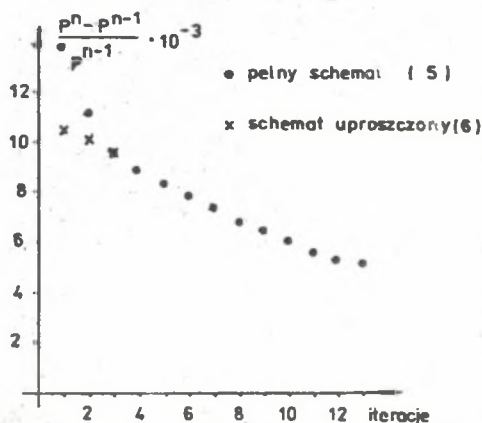
Rys. 2b. Błąd względny energii dla przypadku  $v_0 < a, v_2 < a$



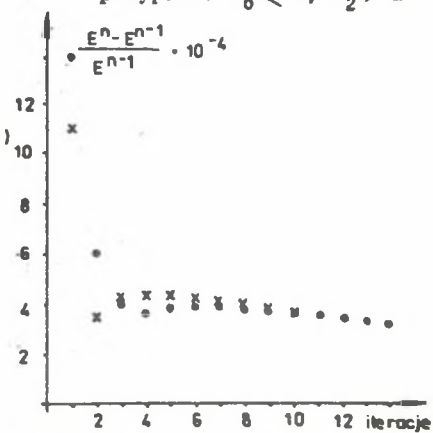
Rys. 3a. Błąd względny ciśnienia dla przypadku  $v_0 < a, v_2 > a$



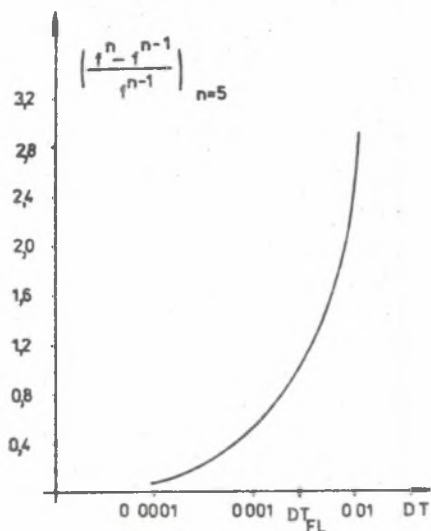
Rys. 3b. Błąd względny energii dla przypadku  $v_0 < a, v_2 > a$



Rys. 4a. Błąd względny ciśnienia dla przypadku  $v_0 > a, v_2 > a$



Rys. 4b. Błąd względny energii dla przypadku  $v_0 > a, v_2 > a$



Rys.5. Przyrost wartości funkcji  $f$  w zależności od kroku czasowego.  
 $DT_{FL} = 0,002861$  - według kryterium stabilności

że przy  $DT$  dobranym z kryterium stabilności (7) po około 70 iteracjach wartość błędu bezwzględnego ( $p^n - p^{n-1}$ ) była mniejsza od 1%.

Na podstawie przedstawionych wyników należy stwierdzić, że rozwiązanie przepływu transonicznego metodą iteracji po czasie przy wykorzystaniu schematu Godunowa z wykorzystaniem algorytmu (5) lub (6) jest procesem wolnozbieżnym.

Zaletą metody, jak już wcześniej stwierdzono, jest możliwość uzyskania dobrej dokładności w analizie przepływu z silnymi zjawiskami falowymi, a także możliwość sprawdzania warunku Kuty-Żukowskiego w badaniach palisadowych.

#### LITERATURA

- [1] Couston M.: Time Marching Finite Area Method. VKI Lect. Ser. 84, 1976.
- [2] Sokołowski G.A., Gniesin V.I.: Rasčet smešannyh tečenij w rešetkach turbomašin. NaukovaJa Dumka, Kijew, 1981.
- [3] Murman E.M., Cole J.D.: Calculation of Plane Steady Transonic Flows. AIAA Journal, Vol. 9, No 1, 1971.
- [4] Chmielniak T.: Metody rozwiązania zadania prostego dla przepływu transonicznego w palisadach łopatkowych, ZN Politechniki Śląskiej, seria Energetyka z.86, Gliwice 1984.
- [5] Dodge P.R.: Transonic Relaxation, VKI Lecture Ser. 84, 1976.
- [6] Godunov S.K., Zabrodin D.V., Prokopov G.P.: Raznostnaja sistema dlja dwumiernych przepływów transonicznych. Algoritm obliczeń metodą kolejnych stanów nieustalonych. Praca niepublikowana. Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych Politechniki Śląskiej, Gliwice 1983.
- [7] Chmielniak T., Misiewicz A.: Przegląd i charakterystyka metod obliczeniowych przepływów transonicznych. Algoritm obliczeń metodą kolejnych stanów nieustalonych. Praca niepublikowana. Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych Politechniki Śląskiej, Gliwice 1983.
- [8] Godunov S.K.: Čislennoje rešenje mnogomlernych zadač gazovoj dinamiki, Nauka, Moskwa 1976.
- [9] Dorfman L.A.: Čislennyje metody v gazodinamike turbomašin. EnergiJa, Leningrad 1974.

АНАЛИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА МЕТОДА УСТАНОВЛИВАНИЯ  
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СХЕМЫ ГОДУНОВА

Резюме

В работе представлено результаты расчёта течения через элементарную ячейку для схемы представленной в [6]. На основе этих результатов проведено оценку точности и сходимости процесса.

ANALYSIS OF RUNING OF THE ITERACION TIME-MARCHING METHOD  
WITH USING GODUNOW SCHEME

Summary

Results of calculation parameters of the flow in elementary mesh for scheme presented in [6] is given. The accuracy and the convergence of the time-marching method could be estimated.