

Zbigniew DŻYGADŁO  
Bogumił CHLEBNY

Instytut Techniki Lotniczej  
Wojskowa Akademia Techniczna

NUMERYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI OSIOWO-SYMETRYCZNEGO PRZEPŁYWU  
W PIERSCIENIOWYM KANALE PRZY TROJWYMIAROWYCH ZABURZENIACH

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do numerycznej analizy stateczności przepływu w kanale ograniczonym dwiema współosiowymi ściankami walcowymi. Przyjęto zaburzenia ustalonego przepływu w postaci trójwymiarowych fal biegnących wzdłuż kanału. Problem rozpatrzono rozwiązując zagadnienie na wartości własne w postaci jednorodnego układu różniczkowych równań liniowych otrzymanych z równania ciągłości i równań Naviera-Stokesa dla małych zaburzeń przepływu ustalonego.

### 1. Wstęp

Ze względu na ograniczone możliwości metod numerycznych i elektro-  
nicznych maszyn cyfrowych stosowanych w ubiegłych latach rozpatrywane za-  
gadnienia stateczności dotyczyły tylko niektórych przepływów i to głównie  
dla zaburzeń dwuwymiarowych ([2], [3], [5]).

Jedną ze stosowanych ostatnio metod numerycznych jest metoda elemen-  
tów skończonych [4], której ortogonalizacyjną odmianę opartą na metodzie  
Galerkina [1] wykorzystano w niniejszym opracowaniu do badania liniowej  
stateczności osiowo-symetrycznego przepływu.

### 2. Sformułowanie problemu

Analizę stateczności przeprowadzimy posługując się wielkościami bez-  
wymiarowymi, które są związane z odpowiednimi parametrami przepływu za  
pomocą następujących zależności:

$$\bar{V} = U_0^* \bar{V}$$

$$p = \frac{U_0^{*2}}{L_0} \bar{p}$$

$$t = \frac{L_0^*}{U_0} \bar{t}$$

/2.1/

gdzie:  $U_0^*$ ,  $L^*$  - prędkość i długość odniesieniowa,  
 $\bar{V}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{t}$  - wielkości wymiarowe /prędkość, ciśnienie, czas/,  
 $\bar{V}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{t}$  - wielkości bezwymiarowe /jak wyżej/,  
 $\rho$  - gęstość płynu.

W związku z tym bezwymiarowe równania Naviera-Stokesa /przy pominięciu sił masowych/ i równanie ciągłości napiszemy w postaci:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{R} \nabla^2 \bar{V} \quad /2.2/$$

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0,$$

gdzie  $R = \frac{U_0^* L^*}{\nu}$  - liczba Reynoldsa, w której  $\nu$  jest współczynnikiem lepkości kinematycznej.

Dalej będziemy posługiwać się wielkościami bezwymiarowymi, nie oznaczając ich kreskami.

Przyjmijmy, że parametry przepływu nieustalonego są sumą stacjonarnych rozwiązań układu /2.2/ i małych zaburzeń:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{V}' \quad v' \ll v_0$$

$$p = p_0 + p' \quad p' \ll p_0 \quad /2.3/$$

Zajmiemy się statecznością osiowo-symetrycznego przepływu między dwoma współosiowymi walcami wywołanego różnicą ciśnień. W walcowym układzie współrzędnych  $x, r, \theta$  mamy:

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_0 [U_0(r), 0, 0]$$

$$\bar{V}' = \bar{V}' [u'(x, r, \theta, t), v'(x, r, \theta, t), w'(x, r, \theta, t)] \quad /2.4/$$

$$p_0 = p_0(x, r)$$

$$p' = p'(x, r, \theta, t)$$

Zaburzenia składowych prędkości i ciśnienia przyjmijmy w postaci:

$$u'(x, r, \theta, t) = \hat{u}(r) \exp [i\alpha(x-ct) + im\theta]$$

$$v'(x, r, \theta, t) = \hat{v}(r) \exp [i\alpha(x-ct) + im\theta]$$

$$w'(x, r, \theta, t) = \hat{w}(r) \exp [i\alpha(x-ct) + im\theta]$$

$$p'(x, r, \theta, t) = -\frac{1}{\alpha} \hat{q}(r) \exp [i\alpha(x-ct) + im\theta] \quad /2.5/$$

gdzie:  $\alpha$  - rzeczywista liczba falowa,

$c = c_r + ic_i$  - zespolona prędkość fazowa,

$m = 0, 1, 2, \dots$  - liczba fal w kierunku obwodowym /azymutalna liczba falowa/.

Względniając zależności /2.3/, /2.4/ i /2.5/ w równaniach /2.2/, korzystając z faktu, że parametry przepływu też spełniają zależności /2.2/ oraz pomijając człony małe rzędu drugiego i wyższych otrzymamy układ zwyczajnych różniczkowych równań jednorodnych na amplitudy zaburzeń  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$

o postaci:

$$\begin{aligned}
 -i\alpha(c-U_0)\hat{u} + \frac{dU_0}{dr}\hat{v} &= -\hat{q} + \frac{1}{R}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\hat{u}}{dr}\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2\right)\hat{u}\right] \\
 -i\alpha(c-U_0)\hat{v} &= \frac{i}{\alpha}\frac{d\hat{q}}{dr} + \frac{1}{R}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{v})\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2\right)\hat{v} - i\frac{2m}{r^2}\hat{w}\right] \\
 -i\alpha(c-U_0)\hat{w} &= \frac{m}{\alpha r}\hat{q} + \frac{1}{R}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{w})\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2\right)\hat{w} + i\frac{2m}{r^2}\hat{v}\right] \\
 i\alpha\hat{u} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{v}) + i\frac{m}{r}\hat{w} &= 0
 \end{aligned}$$

Na sztywnych ściankach

$$\begin{aligned}
 \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} &= 0 \\
 \frac{d\hat{v}}{dr} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.7/}$$

Ostatni z powyższych warunków wynika z równania ciągłości.

Po wyeliminowaniu z zależności /2.6/ funkcji  $\hat{u}$ ,  $\hat{q}$  otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned}
 F_1[\hat{v}(r), \hat{w}(r)] &= 0 \\
 F_2[\hat{v}(r), \hat{w}(r)] &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8/}$$

na funkcje  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  spełniające warunki brzegowe na sztywnych ściankach

$$\hat{v} = \frac{d\hat{v}}{dr} = \hat{w} = 0 \tag{2.9/}$$

Równania /2.8/ z warunkami /2.9/ stanowią zagadnienie na wartości własne  $\alpha$ ,  $R$ ,  $c_r$ ,  $c_l$ ,  $m$  dla określonego rozkładu prędkości  $U_0(r)$  ustalonego przepływu.

### 3. Macierzowe równanie problemu

W celu zastosowania metody elementów skończonych podzielimy poprzeczny przekrój przepływu na pierścieniowe elementy i skorzystamy z warunków ortogonalności lewych stron równań /2.8/ względem odpowiednich wariacji pulsacji  $\delta\hat{v}$  i  $\delta\hat{w}$ .

Jeśli  $k$ -ty element ma promień wewnętrzny  $r_{k-1}$  i zewnętrzny  $r_k$ , a różniczka powierzchni przekroju poprzecznego każdego elementu równa jest  $dS = 2\pi r dr$ , to korzystając z metody Galerkin [1] wewnątrz każdego elementu otrzymamy:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta\hat{v} r F_1 dr = 0, \quad \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta\hat{w} r F_2 dr = 0, \tag{3.1/}$$

gdzie:  $l_e = r_k - r_{k-1}$  - długość jednowymiarowego elementu,  
 $F_1, F_2$  - lewe strony pierwszego i drugiego równania /2.8/.

Zmianę składowych prędkości wewnątrz elementu przyjmujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= [N] \{\hat{v}\}_e \\ \hat{w} &= [M] \{\hat{w}\}_e,\end{aligned}\quad /3.2/$$

stąd

$$\begin{aligned}\delta \hat{v} &= [N] \delta \{\hat{v}\}_e \\ \delta \hat{w} &= [M] \delta \{\hat{w}\}_e,\end{aligned}\quad /3.3/$$

gdzie:  $\{\hat{v}\}_e, \{\hat{w}\}_e$  - wektory węzłowych wartości  $\hat{v}, \hat{w}$  w elemencie,  
 $[N], [M]$  - jednowierszowe macierze funkcji kształtu składowych prędkości  $\hat{v}, \hat{w}$ ,

$\delta \{\hat{v}\}_e, \delta \{\hat{w}\}_e$  - wariacje wektorów parametrów węzłowych.

Jako funkcje kształtu w macierzy  $[N]$  przyjmujemy rodzinę funkcji Hermite'a rzędu drugiego, a jako wyrazy macierzy  $[M]$  rodzinę funkcji Hermite'a rzędu pierwszego. W związku z tym przyjmujemy następujący wektor parametrów węzłowych  $\{\varphi\}_e$ :

$$\{\varphi\}_e = \left[ \hat{v}_{k-1} \left( \frac{d\hat{v}}{dr} \right)_{k-1} \left( \frac{d^2\hat{v}}{dr^2} \right)_{k-1} \hat{w}_{k-1} \left( \frac{d\hat{w}}{dr} \right)_{k-1} \hat{v}_k \cdots \left( \frac{d\hat{w}}{dr} \right)_k \right]^T \quad /3.4/$$

Po uwzględnieniu zależności /3.2/ ÷ /3.4/ w równaniach /3.1/ otrzymamy dla każdego elementu liniowy układ równań algebraicznych z niewiadomymi parametrami węzłowymi  $\{\varphi\}_e$ .

$$[k]_e \{\varphi\}_e = 0 \quad /3.5/$$

Po odpowiednim zsumowaniu współczynników równań i uwzględnieniu jednorodnych warunków brzegowych

$$\hat{v}_0, \left( \frac{d\hat{v}}{dr} \right)_0, \hat{w}_0, \hat{v}_n, \left( \frac{d\hat{v}}{dr} \right)_n, \hat{w}_n = 0 \quad /3.6/$$

/indeksy 0, n są numerami krańcowych węzłów/ otrzymamy układ jednorodnych równań algebraicznych /macierzowe równania problemu/

$$[K] \{\varphi\} = 0, \quad /3.7/$$

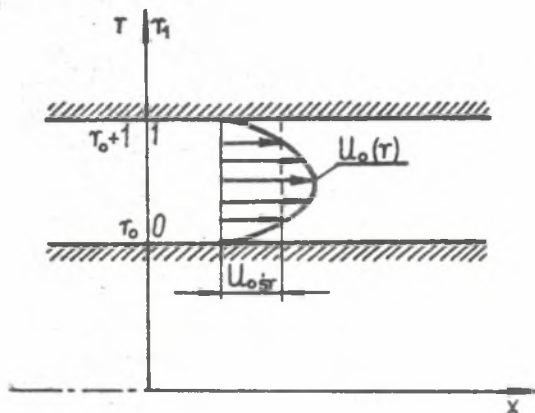
gdzie  $\varphi$  jest wektorem wszystkich niewiadomych parametrów węzłowych.

W związku z powyższym problem na wartości własne sprowadzimy do postaci algebraicznego równania charakterystycznego o zespolonych współczynnikach

$$\Delta = \det [K(R, \alpha, c_r, c_1, m)] = 0 \quad /3.8/$$

#### 4. Analiza numeryczna

Wyprowadzone powyżej zależności posłużyły do ułożenia programów na EMC, za pomocą których badano neutralną stateczność /  $c_1 = 0$  / laminarnego przepływu między dwoma współosiowymi walcami /rys.1/, spowodowanego osiowym gradientem ciśnienia.



Rys.1. Laminarny przepływ w kanale pierścieniowym wywołany osiowym gradientem ciśnienia

Ustalone rozwiązanie równań /2.2/ dla tego przepływu ma postać:

$$U_0(r) = A r^2 - B \ln r + C, \quad /4.1/$$

przy czym stałe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dobrano tak, by dla jednostkowej szerokości szczeliny /  $L = 1$  / średnia prędkość przepływu też była jednostkowa ( $U_{0sr} = 1$ ) przy zerowej prędkości na sztywnych ściankach.

Przeprowadzając dyskretyzację poprzecznego przekroju pola przepływu zagęszczano podział w pobliżu ścianek, zaś liczbę elementów dobierano w zależności od iloczynu  $\alpha R$ , od którego zależy zmienność parametrów.

W programie, za pomocą którego określono wartości własne /dla  $c_1 = 0$ /, przyjmowano wielkość  $m$  i skokowo zmieniano wartość  $c_r$ . Poszukiwano natomiast takiej liczby  $R$ , dla której część rzeczywista lub urojona wyznacznika charakterystycznego była równa zero. Następnie metodą graficzną wyznaczano takie wartości  $c_r = c_{r*}$  oraz  $R = R_*$ , dla których równanie /3.8/ jest spełnione.

Drugi program służył do obliczenia rozkładu funkcji własnych  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  dla zestawu wartości własnych  $m$ ,  $\alpha$ ,  $c_1$ ,  $c_{r*}$ ,  $R_*$ .

Wybrane wyniki obliczeń wartości własnych i funkcji własnych zostaną przedstawione na konferencji.

5. Literatura

- [1] Z. Dzygadlo, S. Kaliski, L. Solarz, E. Włodarczyk ( pod red. S. Kaliskiego): Drgania i fale w ciałach stałych, Warszawa 1966.
- [2] Z. Dzygadlo, B. Chlebny: Numeryczna analiza stateczności płaskiego przepływu Poiseuille'a metodą elementów skończonych. Biul. WAT, XXX, 6, 1981.
- [3] Z. Dzygadlo, B. Chlebny: Numeryczna analiza stateczności niektórych lepkich osiowo-symetrycznych przepływów nieściśliwych przy osiowo-symetrycznych zaburzeniach. Biul. WAT, XXXI, 9, 1982.
- [4] O. C. Zienkiewicz: Metoda elementów skończonych. Warszawa, 1972.
- [5] М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн: Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск 1977.

ЧИСЛЕННАЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ  
В КАНАЛЕ ОГРАНИЧЕННОМ ДВУМЯ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ  
ПРИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Резюме

В работе представлено приложение метода конечных элементов к численному анализу линейной устойчивости течения в канале ограниченном двумя соосными цилиндрическими стенками. Предположено, что возмущения имеют характер трехмерных волн бегущих вдоль канала. Рассмотрено проблему собственных значений однородной системы дифференциальных линейных уравнений полученных из уравнения неразрывности и уравнений наве-Стокса при малых возмущениях стационарного течения.

NUMERICAL ANALYSIS OF LINEAR STABILITY OF FLOW  
IN THE CHANNEL BOUNDED BY TWO CO-AXIAL CYLINDRICAL WALLS  
ON THE ASSUMPTION THAT THE DISTURBANCES ARE  
THREE-DIMENSIONAL WAVES TRAVELING ALONG THE CHANNEL

Summary

In this paper is presented the finite elements method application to the numerical analysis of linear stability of flow in the channel bounded by two co-axial cylindrical walls on the assumption that the disturbances are three-dimensional waves traveling along the channel.

The problem has been studied making use of a set of equations obtained from the Navier-Stokes equations, and the equations of continuity in the case of small non-axisymmetrical disturbances of the steady flow.