ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Piotr GRYGLASZEWSKI
Zbigniew NOWAK
Jolanta STACHARSKA-TARGOSZ

Politechnika Krakowska

STATECZNOŚĆ LAMINARNEGO PRZEPŁYWU CIECZY NIENEWTONOWSKICH W PRZEWODACH

Streszczenie: Przedmiotem referatu jest analiza stateczności laminarnego ruchu cieczy nienewtonowskiej - o zmiennych z temperaturą własnościach reologicznych - w przewodzie kołowym. Praca zawiera omówienie uogólnienia równania propagacji zaburzeń dla cieczy fizykalnie nieliniowych oraz przykłady numerycznego rozwiązywania tych równań.

1. Wstęp

W pracy rozważany będzie problem badania stateczności laminarnego ruchu nienewtonowskiej cieczy potęgowej opisanej empirycznym prawem potęgowym /model Ostwalda-De Waele/ w prostoosiowej rurze kołowej, przy uwzględnieniu zmienności z temperaturą współczynnika konsystencji oraz uwzględnieniu dysypacji wiskotycznej. Zagadnienie badania stateczności ruchu cieczy nienewtonowskich nie doczekało się jeszcze bogatej literatury przedmiotu. Pierwsze znaczące prace na ten temat opublikowane zostały przez Ryana i Johnsona [1]. Główna idea metody zaproponowanej przez tych autorów polegała na wprowadzeniu tzw. "liczby stabilności", o wartościach identycznych dla cieczy nienewtonowskich i newtonowskich. Rozszerzenie tej metody na ciecze opisane modelami reologicznymi Prandtla-Eyringa oraz Binghama podali Hanks i Christiansen [2], [3]. Należy wyraźnie podkreślić, że nie ma dotychczas wiarygodnej i eksperymentalnie potwierdzonej teorii stateczności ruchu cieczy nienewtonowskich. Uzyskane na drodze teoretycznej czy też doświadczalnej krytyczne wartości zmodyfikowanych liczb Reynoldsa wykazują bardzo duży rozrzut [4], zaś sama liczba Reynoldsa - jako kryterium przejścia ruchu laminarnego w turbulentny dla cieczy nienewtonowskich - jest coraz częściej krytykowana.

2. Sformułowanie zagadnienia

2.1. Założenia

Rozważać będziemy ustalony, laminarny, osiowo-symetryczny i uformowany przepływ w rurze kołowej nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej opisanej prawem potęgowym, tzn. dla której związek pomiędzy składowymi wiskotycznego tensora naprężenia τ_{ij} i tensora prędkości deformacji e_{ij} ma postać[5]:

$$\tau_{ij} = 2\,K\left|2\,e_{km}\,e_{km}\right|^{(n-1)/n} e_{ij}\,, \qquad /2.1/$$

gdzie K=K(T) jest współczynnikiem konsystencji zmiennym z temperaturą, zaś n=const jest tzw. wskaźnikiem płynięcia.

Ponadto założymy, że pozostałe własności fizyczne i termiczne cieczy są niezależne od temperatury i ciśnienia.

Wyżej sformułowany problem, przy założeniu stałej temperatury ścianki rury /warunek brzegowy na temperaturę I-go rodzaju/, został szczegółowo omówiony we wcześniejszej pracy Autorów [6], gdzie podano jego ścisłe analityczne rozwiązanie. Rozkłady temperatury bezwymiarowej T_o /jako stosunku temperatury bezwzględnej do temperatury ścianki/ oraz bezwymiarowej prędkości osiowej U_o /jako stosunku prędkości lokalnej do prędkości średniej/ wyrażają się wzorami [6]:

$$T_o(r) = \frac{1}{\gamma}\left[(1+\gamma)\,\frac{F(r,Br,\gamma,n)}{F(1,Br,\gamma,n)} - 1\right], \qquad /2.2/$$

gdzie $$F(r,Br,\gamma,n) = J_o\left[\frac{2n}{3n+1}\sqrt{4\,Br\,\frac{3n+1}{4n}\gamma}\; r^{\frac{3n+1}{2n}}\right],$$

natomiast

$$U_o(r) = \frac{1}{2}\,\frac{\int_r^1 F(r,Br,\gamma,n)\,r^{1/n}dr}{\int_0^1 r\left[\int_r^1 F(r,Br,\gamma,n)\,r^{1/n}dr\right]dr}\,. \qquad /2.3/$$

W powyższych wzorach oznaczono przez:

r - bezwymiarową /jednostkową/ współrzędną promieniową,
J_o - funkcję Bessela pierwszego rodzaju, rzędu zerowego,
γ - bezwymiarową stałą zależną od rodzaju płynu /determinującą zmianę K z temperaturą/,
Br - zmodyfikowaną liczbę Brinkmana

$$Br = 8^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \frac{K(T_w)\,U_m^{\,n-1}}{(2R)^{n-1}\lambda\,T_w}\,, \qquad /2.4/$$

gdzie: λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, R - promieniem rury, zaś indeksy "w" i "m" oznaczają odpowiednio wartość dla warunków ścianki i wartość średnią.

2.2. Równanie propagacji zaburzeń

W celu wyprowadzenia równania propagacji zaburzeń nałożymy na rozwiązanie stacjonarne U_o i T_o - dane wzorami /2.2/ i /2.3/ - niestacjonarne zaburzenie, o którym zakładać będziemy, że jest "małe" i "osiowo-symetryczne". Postępując następnie analogicznie jak w przypadku wyprowadzania klasycznego równania propagacji zaburzeń, otrzymamy w końcu liniowe, jednorodne równanie różniczkowe czwartego rzędu o postaci:

$$Re_{M-R}\left\{i\alpha(U_o-c)\left[q''+\frac{1}{r}q'-\left(\alpha^2+\frac{1}{r^2}\right)q\right]-i\alpha r\left(\frac{1}{r}U_o'\right)'q\right\}=$$

$$=\eta\left\{q''''+\frac{1}{r}q'''-\frac{3}{r^2}q''+\frac{3}{r^3}q'-\frac{3}{r^4}q-2\alpha^2q''-\frac{2}{r}\alpha^2q'+\frac{2}{r^2}\alpha^2q+\alpha^4q\right\}+$$

$$+\eta'\left\{2q'''+\frac{3}{r}q''-\frac{3}{r^2}q'+\frac{3}{r^3}q-2\alpha^2q'-\frac{\alpha^2}{r}q\right\}+$$

$$+\eta''\left\{q''+\frac{1}{r}q'-\frac{1}{r^2}q+\alpha^2q\right\}, \qquad /2.5/$$

gdzie q jest amplitudą zaburzenia promieniowej składowej prędkości, α - liczbą falową, c - prędkością propagacji zaburzenia, natomiast η dane wzorem:

$$\eta=2^n s^{1-n}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{-n}(1+\gamma T_o)^{-n}\left(-\frac{dU_o}{dr}\right)^{n-1} \qquad /2.6/$$

jest tzw. zmodyfikowaną "lepkością pozorną" cieczy potęgowej. Symbol Re_{M-R} występujący w równaniu /2.5/ oznacza zmodyfikowaną liczbę Reynoldsa dla cieczy potęgowej /wprowadzoną przez Metznera i Reeda/:

$$Re_{M-R}=\frac{\rho\, U_m^{2-n}(2R)^n}{s^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n K(T_w)}\ . \qquad /2.7/$$

Równanie /2.5/ może być uważane jako uogólnienie znanego równania Orra i Sommerfelda dla potęgowych cieczy nienewtonowskich o zmiennym z temperaturą współczynniku konsystencji.

Warunki brzegowe towarzyszące temu równaniu mają postać:

$$q(r=1)=q'(r=1)=q'(r=0)=q'''(r=0)=0\ . \qquad /2.8/$$

3. Metoda rozwiązania zagadnienia oraz analiza otrzymanych wyników

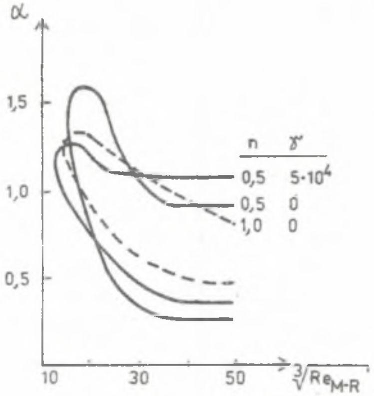
Analiza postaci równania /2.5/ z warunkami /2.8/ prowadzi do wniosku, że problem badania stateczności ruchu cieczy nienewtonowskiej został sprowadzony /podobnie jak czyni się to dla cieczy newtonowskiej/ do zagadnienia wartości własnych tego równwnia, a więc poszukiwania takich wartości c /przy ustalonych: α, Re_{M-R}, Br, γ, n/, dla których istnieje nietrywialne rozwiązanie równwnia /2.5/, spełniające jednorodne warunki brzegowe /2.8/.

3.1. Metoda rozwiązania

W celu rozwiązania wyżej sformułowanego zagadnienia brzegowego zastosowano metodę: zamiany tego zagadnienia na zagadnienie początkowe, które następnie rozwiązano metodą Adamsa-Moultona, z wykorzystaniem wielocelowej metody strzałów. Szczegółowy opis zastosowanej procedury numerycznej podano w [7] i [8].

3.2. Analiza otrzymanych rezultatów

W wyniku przeprowadzonych obliczeń numerycznych uzyskano zbiór wartości własnych i funkcji własnych sformułowanego w punkcie 2.2 zagadnienia brzegowego dla różnych wartości parametrów: n, Br, γ, Re_{M-R} i α. Analiza przebiegów i zmian funkcji własnych powyższego zagadnienia nie będzie w tej pracy dyskutowana ze względu na małą jej przydatność w praktycznych zastosowaniach. Na rys.1 pokazano wybrane krzywe stateczności obojętnej dla cieczy potęgowej /n=0,5/ o stałych i zmiennych z temperaturą własnościach reologicznych. Linią przerywaną zaznaczono natomiast krzywą stateczności obojętnej dla płynu newtonowskiego przy η = const. Najniższa wartość liczby Re_{M-R} odpowiadająca stateczności obojętnej dla każdej wartości liczby falowej α określa krytyczną wartość liczby Reynoldsa. Tablica 1 zawiera porównanie wybranych krytycznych wartości liczby Reynoldsa zdefiniowanej wzorem /2.7/ dla różnych wartości n, Br, γ.



Rys.1 Krzywe równowagi obojętnej

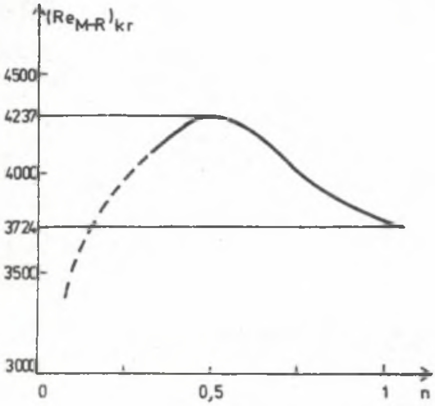
Tablica 1

n	γ	Br	Re_{M-R}
1,0	0,0	0,00	3724
0,7	0,0	0,00	4062
0,6	0,0	0,00	4122
0,5	0,0	0,00	4237
0,4	0,0	0,00	4228
0,3	0,0	0,00	4117
0,5	0,0	0,00	4237
0,5	10000,0	0,00	3888
0,5	25000,0	0,00	3369
0,5	50000,0	0,00	2320
0,5	1,0	0,00	4237
0,5	1,0	0,01	3888
0,5	1,0	0,02	3542
0,5	1,0	0,04	2777

Pełniejszą ilustrację zmian $(Re_{M-R})_{kr}$ w zależności od wartości parametrów n, Br, γ pokazano na rys. 2, 3 i 4.

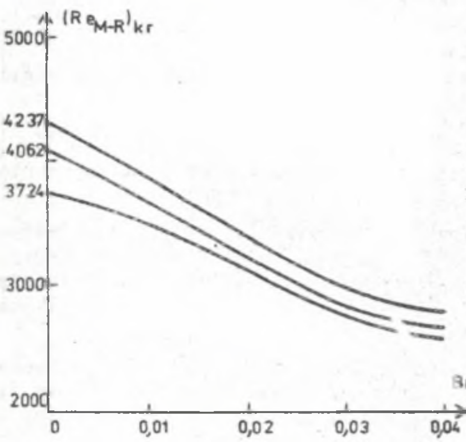
W szczególnym przypadku dla cieczy wykazujących małe zdolności do rozpraszania energii /$Br \approx 0$/ oraz gdy współczynnik konsystencji nie zależy od temperatury /$\gamma \approx 0$/, największa krytyczna wartość Re_{M-R} wynosi 4237 dla $n \approx 0,5$ i maleje ze wzrostem i zmniejszaniem się wartości wskaźnika płynięcia n. Wzrost krytycznej liczby Reynoldsa dla $n < 1$ może być wyjaśniony przez "spłaszczenie" profilu prędkości przy zmniejszaniu się n od 1 do 0. W granicznym przypadku: $n \to 0$, $(Re_{M-R})_{kr}$ powinno zmierzać do nieskończoności. Otrzymane rezultaty zgodne są z tą fizycznie "uzasadnioną" tendencją tylko dla $0,5 < n < 1$. Natomiast w przedziale $0 < n < 0,5$

obserwowane jest zjawisko odwrotne. Jednakże płyny, dla których $n \ll 0,5$, nie występują praktycznie w przyrodzie; stąd też wyniki odpowiadające $n \ll 0,5$ zaznaczono na rys. 2 linią przerywaną.

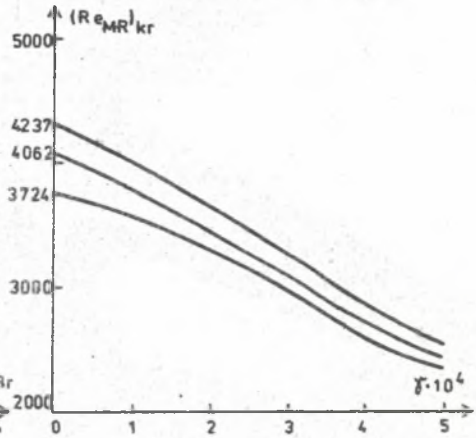


Rys.2 Zmiana $(Re_{M-R})_{kr}$ w funkcji wskaźnika płynięcia

Natomiast zależność $(Re_{M-R})_{kr}$ od zmodyfikowanej liczby Brinkmana /będącej miarą zdolności cieczy do rozpraszania energii/ i współczynnika γ jest funkcją malejącą, bez względu na wartość wskaźnika płynięcia n; rys.3 i 4. Związane jest to przede wszystkim z "wydłużeniem" profilu prędkości cieczy przy wzrastających wartościach Br i γ w stosunku do tzw. profilu "izowiskotycznego". Zauważalne zmniejszenie się krytycznych wartości zmodyfikowanych liczb Reynoldsa w omawianych przypadkach prowadzi do znacznego ograniczenia laminarnego obszaru ruchu cieczy nienewtonowskich nawet do wartości $Re_{M-R\ kr} < 1000$.

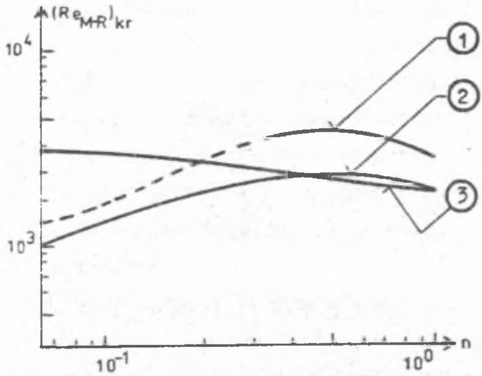


Rys.3 Zmiana $(Re_{M-R})_{kr}$ w funkcji uogólnionej liczby Br



Rys.4 Zmiana $(Re_{M-R})_{kr}$ w funkcji parametru

Przeprowadzone obliczenia wykazały dość duży rozrzut krytycznych wartości $(Re_{M-R})_{kr}$, choć w zasadzie mieściły się one w przewidywanym przedziale od 1000 do 4000. Rys.5 zawiera porównanie wartości $(Re_{M-R})_{kr}$ otrzymanych na drodze numerycznej z wynikami badań innych autorów [1].



(2) $$(Re_{M-R})_{kr} = 885 \frac{8n}{(3n+1)^2}(n+2)^{\frac{n+2}{n+1}}$$

(3) $$(Re_{M-R})_{kr} = 700 \frac{(4n+2)(5n+3)}{(3n+1)^2}$$

Rys.5 Porównanie wartości $(Re_{M-R})_{kr}$ w funkcji wskaźnika płynięcia:

1 - rozwiązanie autorów
2 - formuła Ryana i Johnsona [1]
3 - formuła Mishry i Tripatie'go [9]

Literatura

[1] Ryan N.W., Johnson M.N.: Transition from laminar to turbulent flow in papes. AIChE Journ. 5,433/1959/

[2] Hanks R.W., Christiansen E.B.: The laminar-turbulent transition in non-isothermal flow of pseudoplasitc fluids in tubes. AIChE Journ. 8,467/1962/

[3] Hanks R.W.: The laminar-turbulent transition for fluids with a yield stress. AIChE Journ. 9,306/1963/

[4] Metzner A.B.: Non-Newtonian technology. Adv.Chem.Engn. 1,77/1956/

[5] Astarita G., Marrucci G.: Principles of non-Newtonian fluid mechanics. London: McGraw-Hill /1974/

[6] Nowak Z., Gryglaszewski P., Stacharska-Targosz J.: Przybliżona metoda obliczania oporów przepływu przy laminarnych, nieizotermicznych przepływach cieczy nienewtonowskich w przewodach. Materiały konferencyjne XI Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej Inżynierii Chemicznej i Procesowej, II,189/1983/

[7] Nowak Z., Gryglaszewski P., Stacharska-Targosz J.: Small-disturbance stability of a non-isothermal tube flow of power law fluids; Part 1: Derivation of the Orr-Sommerfeld equation extended. Acta Mechanica 48,157/1983/

[8] Nowak Z., Gryglaszewski P., Stacharska-Targosz J.: Small-disturbance stability of a non-isothermal tube flow of power law fluids; Part 2: Numerical solution of the problem. Acta Mechanica 48.165/1983/

[9] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen. Aarau: Verlag Sauerländer /1971/

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРОВОДАХ

Р е з ю м е

Темой реферата является анализ устойчивости ламинарного движения неньютоновских жидкостей с переменными с температурой реологически свойствами - в колесном проводе при предположенной постоянной температуре стенки. Учтено влияние вискотической диссипации. Рассуждения ограничены к проблеме течения жидкости в конечном сечении термического впускного отсека, где как профили температур, так и скорости развернуты и не изменяются по направлению течения. Выведенные в работе уравнение является расширением известного уравнения Орра-Соммерфельда, а на жидкости подвергающейся закону степени с переменным с температурой коэффициенту консистенции. Метод поисков собственных значений этого уравнения состоит в заменении краевой задачи, задачей начальной, решеной методом Адамса-Мультона. Полученные результаты указаны графически на 5 диаграммах.

LAMINAR FLOW STABILITY OF NON-NEWTONIAN FLUIDS IN CONDUITS

S u m m a r y

In the present paper a small-disturbance stability of a steady, non-isothermal, laminar flow of non-Newtonian fluids in tubes with assumed constant wall temperature has been considered. The effects of both viscous dissipation and dependence of rheological properties on temperature have been also included. The considerations are restricted to the flow just at the end of thermal entrance region where the temperature and velocity profiles are fully developed and do not change in flow direction. The equation to be derived in this paper is an extension of the well-known Orr-Sommerfeld equation on power law fluids with temperature dependent fluid consistency. The method of searching for eigenvalues generated by the respective eigensolutions consists - in case of the Orr-Sommerfeld equation extended - in replacing the boundary-value problem by an equivalent initial-value problem. The last one has been attacked by means of Adams-Moulton method. The results obtained in this paper are graphically illustrated on 5 figures.