ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Janusz GRZĘDZIŃSKI
Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Warszawa

NIESTACJONARNE TRÓJWYMIAROWE ZABURZENIE POTENCJALNEGO OPŁYWU PROFILU[x]

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę obliczania niestacjonarnego rozkładu ciśnienia wywołanego na profilu harmonicznym wirowym zaburzeniem potencjalnego pola prędkości. Przykładowe obliczenia wykonano dla profilu Żukowskiego porównując je z wynikami otrzymanymi w oparciu o teorię cienkiego profilu.

1. Wstęp

Zainteresowanie problemem niestacjonarnych sił wywołanych na umieszczonym w przepływie ciele przez nałożone na ten przepływ zaburzenie prędkości rozpoczęło się we wczesnych latach czterdziestych, kiedy to ukazała się klasyczna już dzisiaj praca Searsa [1]. Dotyczyła ona profilu cienkiego umieszczonego w płaskim jednorodnym przepływie cieczy doskonałej i poddanego działaniu podmuchu w postaci harmonicznie zmiennej w czasie składowej prędkości prostopadłej do kierunku przepływu niezaburzonego. Zagadnienie zlinearyzowano wokół przepływu jednorodnego, co było bardzo istotnym uproszczeniem, ponieważ w tym przypadku wirowe zaburzenie przepływu jest transportowane wzdłuż linii prądu przepływu niezaburzonego, pozostając bezźródłowym w całym obszarze. Co więcej, jeżeli zaburzenie to początkowo nie generowało pola ciśnień, to również dawało zerowe ciśnienie zaburzeń w całym obszarze przepływu. W efekcie problem sprowadzał się do wyznaczenia spełniającego równanie Laplace'a potencjalnego pola, w którym obecność wirowego zaburzenia uzewnętrzniała się jedynie poprzez warunek brzegowy na powierzchni profilu. Z linearyzacji wokół przepływu równoległego trzeba jednak zrezygnować w przypadku opływu profilu grubego. Zastosowanie w zamian linearyzacji wokół opływu stacjonarnego profilu prowadzi do jakościowo innego obrazu przepływu. Nałożone w minus nieskończoności małe zaburzenie wirowe prędkości jest teraz transportowane wzdłuż linii prądu przepływu stacjonarnego ze zmienną prędkością tego przepływu, zniekształcającą istotnie postać zaburzenia.

---

[x] Praca wykonana wspólnie z prof. H.Atassi w czasie pobytu w University of Notre Dame, USA.

Nie jest już ono bezźródłowe w całym obszarze przepływu. Dodatkowo, istnienie punktu spiętrzenia na profilu prowadzi w zastosowanym przybliżeniu liniowym do nieograniczoności pola rotacji prędkości na całej powierzchni profilu i śladu wirowego. Fakt ten ma istotne znaczenie przy wyborze metody rozwiązania problemu.

2. Sformułowanie zagadnienia

W jednorodnym, nieściśliwym, nielepkim i nieprzewodzącym ciepła przepływie umieszczone jest trójwymiarowe ciało. Na napływający strumień daleko od ciała nałożone jest niestacjonarne zaburzenie prędkości $\vec{u}_\infty$. Prędkość przepływu $\vec{V}$ w każdym punkcie pola o wektorze wodzącym $\vec{r}$ można przedstawić w postaci sumy

$$\vec{V}(r,t) = \vec{U}(\vec{r}) + \vec{u}(\vec{r},t), \tag{2.1}$$

gdzie $\vec{U}$ jest polem prędkości stacjonarnego opływu ciała. Zakłada się, że prędkość zaburzeń $\vec{u}$ jest mała w porównaniu z prędkością $\vec{U}$

$$|\vec{u}| \ll |\vec{U}| \tag{2.2}$$

Daleko od ciała w strumieniu napływającym prędkość zaburzeń $\vec{u}$ musi dążyć do zadanego zaburzenia $\vec{u}_\infty$

$$\vec{u} \to \vec{u}_\infty \quad \text{dla } r \to \infty \tag{2.3}$$

Pozostałe warunki brzegowe to nieprzenikalność powierzchni ciała oraz warunki dotyczące istniejącego za ciałem śladu wirowego, które zostaną sformułowane nieco później. Zachowując teraz w równaniach przepływu tylko człony liniowe /na mocy założenia (2.2)/ oraz wykorzystując fakt, że prędkość $\vec{U}$ spełnia stacjonarne równania przepływu, otrzymuje się zlinearyzowany układ równań dla prędkości zaburzeń $\vec{u}$:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{D_o\vec{u}}{Dt} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p, \tag{2.5}$$

gdzie oznaczono

$$\frac{D_o}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}\cdot\operatorname{grad} \tag{2.6}$$

W równaniu (2.5) p oznacza ciśnienie zaburzeń a ϱ gęstość ośrodka.

Atrakcyjny sposób rozwiązania równań (2.4) i (2.5) zaproponował Goldstein [2]. Sposób ten polega na rozwiązaniu w pierwszej kolejności jednorodnego równania pędu

$$\frac{D_0\vec{u}_1}{Dt} + (\vec{u}_1 \cdot \nabla)\vec{U} = 0. \qquad (2.7)$$

Znajomość rozwiązania $\vec{u}_1$ znacznie upraszcza dalsze postępowanie. Jak łatwo pokazać, $\vec{u}_1$ spełnia zlinearyzowane równanie dla rotacji prędkości zaburzeń $\vec{u}$. Jest zatem pełnym wirowym składnikiem pola prędkości, które teraz może być poszukiwane w postaci:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \operatorname{grad}\phi, \qquad (2.8)$$

gdzie ϕ jest nieznanym potencjałem. Wstawiając (2.8) do równania (2.5) otrzymuje się ciśnienie zaburzeń w postaci:

$$p = -\rho\frac{D_0\phi}{Dt}. \qquad (2.9)$$

Wyznaczenie potencjału ϕ rozwiązuje zatem całe zagadnienie. Wstawiając (2.8) do równania ciągłości (2.4) otrzymuje się równanie Poissona dla potencjału

$$\nabla^2\phi = -\operatorname{div}\vec{u}_1, \qquad (2.10)$$

z warunkiem brzegowym na ciele

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{n}\cdot\vec{u}_1, \qquad (2.11)$$

gdzie $\vec{n}$ oznacza normalną zewnętrzną do powierzchni ciała. Do sprecyzowania pozostają w dalszym ciągu warunki na śladzie wirowym. W nieskończoności

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \to 0 \qquad \text{dla } r \to \infty \qquad (2.12)$$

i warunek (2.3) jest spełniony przez wirową część rozwiązania $\vec{u}_1$. Wynika to bezpośrednio z równania (2.7), które może być łatwo scałkowane wzdłuż linii prądu stacjonarnego opływu ciała. Równanie to jest układem trzech skalarnych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, dla których linie prądu są charakterystykami. Jak wiadomo, warunek brzegowy może być zadany w postaci $\vec{u} = \vec{u}_\infty$ na dowolnej linii nie będącej charakterystyką lub, z pewnymi ograniczeniami, w postaci asymptotycznej (2.3).

Przedstawiona metoda ma jednak poważną wadę uniemożliwiającą jej bezpośrednie wykorzystanie. Okazuje się bowiem, że jeżeli na ciele istnieje punkt spiętrzenia, to składowa prędkości $\vec{u}_1$ normalna do powierzchni ciała jest nieograniczona na całej jego powierzchni i zagadnienie dla potencjału ϕ jest postawione niepoprawnie.

3. Trójwymiarowe harmoniczne zaburzenie przepływu płaskiego

Regularyzacja problemu zostanie wykonana dla przypadku płaskiego opływu stacjonarnego ciała /np. opływ skrzydła czy też łopatki turbiny o stałej cięciwie/. Jeżeli przez $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ oznaczone zostaną wersory odpowiednio styczny, normalny i binormalny do linii prądu, to przekrój skrzydła musi być stały w kierunku $\vec{b}$. Zakładając dodatkowo harmoniczną zmienność zaburzenia w czasie otrzymuje się wirowe pole prędkości w postaci:

$$\vec{u}_1 = \left[\frac{a_1}{U}\vec{\tau} + \left(a_2 U + a_1\frac{\partial T}{\partial n}\right)\vec{n} + a_3\vec{b}\right]e^{i\vec{k}\cdot(\vec{X} - \vec{i}U_\infty t)}, \tag{3.1}$$

gdzie:

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ - amplituda prędkości zaburzeń w strumieniu napływającym daleko od ciała,

$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ - wektor falowy,

$\vec{i}$ - jednostkowy wektor określający kierunek strumienia napływającego daleko od ciała /i oznacza jednostkę urojoną/.

Wektor

$$\vec{X} = \left(U_\infty T, \frac{\psi}{U_\infty}, z\right)$$

jest wyznaczony przez potencjał φ i funkcję prądu ψ przepływu stacjonarnego, współrzędną z w kierunku $\vec{b}$ oraz tzw. funkcję dryfu T:

$$T = \frac{\varphi}{U_\infty^2} + \int_{-\infty}^{\varphi}\left(\frac{1}{U^2} - \frac{1}{U_\infty^2}\right)d\varphi, \tag{3.2}$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż linii prądu. Różnica funkcji dryfu pomiędzy dwoma punktami tej samej linii prądu jest równa czasowi transportu zaburzenia pomiędzy nimi. W punkcie spiętrzenia U = 0 i funkcja dryfu ma osobliwość logarytmiczną, co jest matematycznym odzwierciedleniem faktu, że zaburzenie nie może być przeniesione poza punkt spiętrzenia na powierzchnię ciała.

Znając funkcję dryfu dla danego przepływu stacjonarnego można bez trudu wydzielić człon osobliwy z pochodnej $\partial T/\partial n$, a zatem i ze składowej normalnej prędkości $\vec{u}_1$. Ma on postać /z dokładnością do ograniczonego mnożnika/:

$$\frac{1}{\psi - \psi_s}e^{i\ln|\psi - \psi_s|},$$

gdzie ψ_s oznacza wartość funkcji prądu na powierzchni ciała. Celem regularyzacji problemu wystarczy teraz znaleźć takie pole prędkości, którego składowa normalna do powierzchni ciała ma taki sam co do modułu człon osobliwy, lecz z przeciwnym znakiem. Warunek ten może być spełniony przez nieskończenie wiele pól. W związku z tym, dla wygody dalszych obliczeń zażądano, aby było to pole potencjalne o potencjale ϕ_1, dającym zerowe ciśnienie w całym polu przepływu. W wyniku otrzymano

$$\phi_1 = \alpha_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} + \alpha_2\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} - e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}_s}\right), \tag{3.3}$$

gdzie α_1 i α_2 są odpowiednio dobranymi stałymi, a $\vec{X}_s$ jest wektorem $\vec{X}$, w którym $\psi = \psi_s$. Całkowitego pola prędkości zaburzeń $\vec{u}$ można teraz poszukiwać w postaci:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \operatorname{grad}\tilde{\phi}, \tag{3.4}$$

gdzie:

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_1 + \operatorname{grad}\left(\phi_1 - \phi_{1\infty}\right). \tag{3.5}$$

Wartość graniczną potencjału $\phi_{1\infty}$ dla $r \to \infty$ odjęto dla zachowania warunku (2.12). Ponieważ przepływ stacjonarny jest płaski a zależność wszystkich funkcji od czasu założono harmoniczną, więc liczbę zmiennych niezależnych można ograniczyć do dwóch, poszukując potencjału $\tilde{\phi}$ w postaci:

$$\tilde{\phi}(x,y,z,t) = \phi^*(x,y)\, e^{ik_3 z}\, e^{-ik_1 U_\infty t} \tag{3.6}$$

Stosując analogiczny sposób zapisu prędkości $\vec{u}_0$ otrzymuje się dla potencjału $\phi^*(x,y)$ równanie typu Helmholtza

$$\nabla^2\phi^* - k_3^2\phi^* = -\operatorname{div}\vec{u}_0^* - ik_3 u_{0z}^*, \tag{3.7}$$

gdzie u_{0z}^* oznacza składową prędkości $\vec{u}_0^*$ w kierunku rozpiętości /osi z/, z warunkiem brzegowym na powierzchni ciała

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial n} = -\vec{n}\cdot\vec{u}_0^*. \tag{3.8}$$

Ślad wirowy za profilem modelowano za pomocą linii nieciągłości składowej stycznej prędkości. Założono, że ślad wirowy pokrywa się ze stacjonarną linią prądu wychodzącą z krawędzi spływu. Warunkiem brzegowym na śladzie jest równość składowej normalnej prędkości po obu jego stronach, co odpowiada żądaniu ciągłego ciśnienia w całym polu przepływu.

4. Równanie całkowe zagadnienia brzegowego

Dla zagadnienia (3.7) i (3.8) razem z warunkiem na śladzie wirowym można otrzymać równanie całkowe dla wartości potencjału ϕ^* na powierzchni profilu i śladu korzystając ze wzoru całkowego Greena. Przy przyjętych założeniach można za pomocą równania pędu pokazać, że różnica wartości funkcji ϕ^* po obu stronach śladu w dowolnym jego punkcie jest wyznaczona przez wartość tej różnicy $\Delta\phi^*_{TE}$ na krawędzi spływu. Wykorzystując ten fakt otrzymuje się następujące równanie całkowe:

$$\pi\ \phi^*(s) - \int_B \phi^*(l)\,\frac{\partial K_0(s,l)}{\partial n}\,dl = \Delta\phi^*_{TE}\,f(s) + g(s)\ , \qquad (4.1)$$

w którym oprócz niewiadomej funkcji ϕ^* na powierzchni profilu /oznaczonej przez B/ występuje niewiadoma liczba $\Delta\phi^*_{TE}$. Funkcje $f(s)$ i $g(s)$ są znanymi funkcjami współrzędnej łukowej profilu s, natomiast $K_0(s,l)$ oznacza rozwiązanie podstawowe (3.7) /zmodyfikowana funkcja Bessela/. Można pokazać, że lewa strona (4.1) jest operatorem Fredholma, a zatem rozwiązanie istnieje dla każdej prawej strony. Okazuje się jednak, że jest ono niejednoznaczne, ponieważ dla dowolnego zadanego $\Delta\phi^*_{TE}$ po prawej stronie otrzymuje się taką samą wartość skoku w rozwiązaniu. W celu ujednoznacznienia zażądano ciągłości ciśnienia w punkcie spływu /warunek Kutty-Żukowskiego/.

Równanie (4.1) rozwiązano numerycznie dla profilu Żukowskiego dla przypadków porównywalnych z istniejącymi wynikami opartymi na teorii profilu cienkiego [3,4], stwierdzając dobrą zgodność siły nośnej w zakresie małych /rzędu paru procent/ odchyleń grubości i wygięcia profilu od linii prostej. Zaobserwowano także znaczny efekt nieliniowy przy wzroście grubości, wygięcia i kąta napływu strumienia.

Wyniki obliczeń będą prezentowane w czasie referatu na konferencji.

5. Literatura

[1]. Sears, W.R. 1941 Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application. J. Aero. Sci. 8, 104.

[2]. Goldstein, M.E. 1978 Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles. J. Fluid Mech. 89, 433.

[3] Graham, J.M.R. 1972 Lifting surface theory for the problem of an arbitrarily yawed sinusoidal gust incident on a thin airfoil in incompressible flow. Aero. Quart. 21, 182.

[4]. Goldstein, M.E. and Atassi, H. 1976 A complete second-order theory for the unsteady flow about an airfoil due to a periodic gust. J. Fluid Mech. 74, 741.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТРЁХМЕРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ

Р е з ю м е

В работе представлено метод вычисления неотационарного разложения давления вызваного гармоническим вращательным возмущением потенциального поля скорости. Вычисления исполнено для профиля Жуковского сравнивают эти вычисления с результатами полученными при приняти теории тонких профилей.

UNSTEADY THREE-DIMENSIONAL DISTURBANCE OF POTENTIAL FLOW ROUND AN AIRFOIL

S u m m a r y

The unsteady pressure distribution over a constant cross-section wing caused by three-dimensional harmonic velocity disturbance is calculated. The flow is assumed to be inviscid and incompressible and a linearization procedure about two-dimensional steady flow is used. The velocity field is splitted into two parts: vortical and potential in such manner that both of them are regular and well-defined in the entire domain including the airfoil surface. The vortical velocity is known and the potential function satisfies the Poisson's equation. Boundary-value problem for this equation leads to an integral equation which is solved numercally by collocation. The resulting unsteady lift is compared with those based on a thin airfoil theory. For thin, non-cambered Joukowski airfoil good agreement is found, however, significant nonlinear effect caused by thick airfoil geometry is observed.