ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Waldemar JĘDRAL

Instytut Techniki Cieplnej
Politechnika Warszawska

PRZEPŁYW CIECZY W SZCZELINIE POPRZECZNEJ ZE ŚCIANKĄ WIRUJĄCĄ I PRZEMIESZCZAJĄCĄ SIĘ W KIERUNKU OSIOWYM

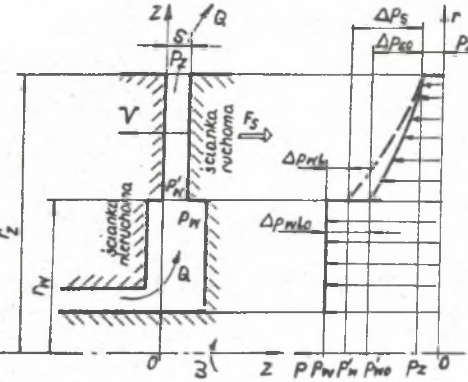
Streszczenie: W pracy rozpatrzono quasi-ustalony osiowo-symetryczny przepływ turbulentny cieczy w szczelinie poprzecznej utworzonej przez dwie równoległe płaskie i gładkie ścianki. Jedna ze ścianek jest nieruchoma, druga zaś wiruje wokół osi pompy z prędkością kątową ω i równocześnie przesuwa się w kierunku osiowym z prędkością V. Dla takiego przypadku wyprowadzono przybliżone zależności analityczne $p = f(r, \omega, V)$ opisujące rozkład ciśnień w szczelinie. Otrzymane zależności mogą być użyteczne przy numerycznej symulacji własności dynamicznych hydrostatycznych łożysk wzdłużnych a w szczególności układów z tarczami odciążającymi w pompach wirowych.

1. Wstęp

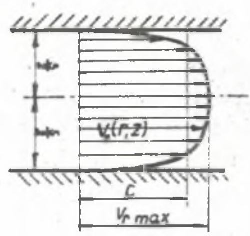
W wielu maszynach, w których występują duże siły osiowe niemożliwe do przejęcia za pomocą typowych węzłów łożyskowych, stosuje się wzdłużne łożyska hydrostatyczne. Specyficzną odmianą takich łożysk są zespoły tarcz i bębnów odciążających spotykane w wielostopniowych pompach wirowych. Ważnym elementem łożysk hydrostatycznych jest poprzeczna szczelina dławiąca, znajdująca się między ruchomą i nieruchomą tarczą łożyska. W przypadku automatycznego dostosowywania się szerokości szczeliny do zmieniających się warunków pracy urządzenia ruchoma ścianka szczeliny przemieszcza się w kierunku osiowym. Prędkość przemieszczeń V ma silny wpływ na rozkład ciśnień w szczelinie i powstanie siły tłumiącej drgania osiowe. W literaturze brak jest odpowiednich zależności dla przepływu laminarnego przy większych wartościach liczb Reynoldsa, a także dla przepływu turbulentnego. W niniejszej pracy wyprowadzono zależności uwzględniające wpływ prędkości V na rozkład ciśnień dla turbulentnego przepływu cieczy w szczelinie.

2. Równania ruchu i rozkłady prędkości

Rozpatrywany jest quasi-ustalony osiowo-symetryczny przepływ turbulentny cieczy nieściśliwej w szczelinie poprzecznej pierścieniowej utworzonej



Rys. 1. Rozkład ciśnień w szczelinie poprzecznej



Rys. 2. Rozkład prędkości promieniowych

przez dwie równoległe płaskie i gładkie ścianki (rys.1). Jedna ze ścianek jest nieruchoma, druga zaś wiruje wokół osi z z prędkością kątową ω = const i równocześnie przesuwa się w kierunku osiowym z prędkością V. Rozpatrywany jest przypadek, gdy $V \ll u_w$ i $V \ll c_w$, przykładowo: na wlocie do szczeliny prędkości c_w i $u_w = \omega r_w$ są rzędu 40 - 70 m/s, podczas gdy $V = 0 - 0{,}02$ m/s.

Przepływ taki można opisać równaniami:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ &v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{dp}{dr} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

z warunkami brzegowymi

$$\left.\begin{aligned} z = 0 &: \; v_r = 0,\; v_z = 0 \\ z = s &: \; v_r = 0,\; v_z = -V \\ r = r_w &: \; p = p'_w \\ r = r_z &: \; p = p_z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Równania (1) otrzymano z pełnego układu równań Reynoldsa oraz ciągłości dla przepływu cieczy nieściśliwej o stałej lepkości, przy braku zewnętrznych sił masowych. Uczyniono przy tym założenia upraszczające analogiczne do odpowiednich założeń w pracy [1]. Prędkości v_r, v_φ, v_z oraz ciśnienia p, p'_w i p_z są parametrami uśrednionymi czasowo; dla uproszczenia zapisu opuszczono kreseczki nad symbolami tych wielkości.

W równaniach ruchu pominięto równania pędu w kierunku obwodowym (φ) i osiowym (z). Pierwsze - z powodu założenia (wzory 7) określonego rozkładu prędkości $v_\varphi(r,z)$; drugie - gdyż jak wynika z oszacowań przyrosty ciśnienia w kierunku osi z są znikomo małe (poniżej 1 Pa) i nie mają wpływu na siłę F_s działającą na ściankę szczeliny.

Podobnie jak w [1] założono, że rozkład prędkości promieniowych można aproksymować zależnościami (por. rys.2):

$$\left.\begin{aligned} &v_r = v_{r\max} f(z)\text{ , gdzie:}\\ &f(z) = \left(\frac{2z}{s}\right)^{1/n} \quad \text{dla } 0\leqslant z\leqslant s/2,\\ &f(z) = \left[2\left(1-\frac{z}{s}\right)\right]^{1/n} \quad \text{dla } s/2\leqslant z\leqslant s,\\ &v_{r\max} = \frac{n+1}{n}\,c \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Zbliżanie się ścianki ruchomej z prędkością V do ścianki nieruchomej będzie powodować "wyciskanie" z każdego elementu dr szczeliny $dQ = 2\pi r dr V$ cieczy dodającej się do zasadniczego strumienia objętości $Q = 2\pi r s c$. Spowoduje to zwiększenie się składowych v_r prędkości w porównaniu do przepływu wywołanego takim samym spadkiem ciśnienia Δp lecz przy $V = 0$. Założono przy tym, że nie zmieni się charakter rozkładu prędkości (wzory 3), natomiast wartości v_r, $v_{r\max}$ i c ulegną odpowiedniemu powiększeniu.

Czynnik zwiększający $Z = f(V, c_w, r)$ można obliczyć z równania ciągłości (1.1). Mnożąc obie jego strony przez rdrdz i całkując w granicach r_w do r a następnie od 0 do s otrzymuje się:

$$\int_0^s (rv_r - r_w v_{rw})dz = \frac{1}{2}(r^2 - r_w^2)V,$$

a stąd, po uwzględnieniu (3):

$$\left.\begin{aligned} &v_r = v_{rw}\frac{r_w}{r}Z\ ; \quad v_{r\max} = v_{r\max w}\frac{r_w}{r}Z\ ;\\ &c = c_w\frac{r_w}{r}Z \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} &Z = 1 + \frac{V}{2c_w}\frac{r^2 - r_w^2}{r_w s} = 1 + G\left[\left(\frac{r}{r_w}\right)^2 - 1\right]\\ &G = \frac{V}{2c_w}\frac{r_w}{s} = \frac{V}{4c_w}\frac{d_w}{s} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Z równania (1.1) po uwzględnieniu (4) wynika, iż

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = -f(z)\frac{n+1}{n}\frac{V}{s}\text{ , stąd zaś}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{dla} \quad 0 \leqslant z \leqslant s/2 : \quad v_z = -\frac{V}{2}\left(\frac{2z}{s}\right)^{\frac{n+1}{n}} \\ &\text{dla} \quad s/2 \leqslant z \leqslant s : \quad v_z = \frac{V}{2}\left[2\left(1-\frac{z}{s}\right)\right]^{\frac{n+1}{n}} - V \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wreszcie, podobnie jak w [1], założono potęgowy rozkład prędkości obwodowych

$$\left.\begin{aligned} &\text{dla} \quad 0 \leqslant z \leqslant s/2 : \quad v_\varphi = \bar{k}\omega r\left(\frac{2z}{s}\right)^{1/n} \\ &\text{dla} \quad s/2 \leqslant z \leqslant s : \quad v_\varphi = \omega r\left\{1 - (1-\bar{k})\left[2\left(1-\frac{z}{s}\right)\right]^{1/n}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Współczynnik $\bar{k} < 0{,}5$ jest średnim stopniem zawirowania cieczy w połowie szerokości szczeliny, który można wyznaczyć z zależności podanych w [1].

3. Rozkład ciśnień wzdłuż ścianek szczeliny

Dalsze obliczenia wykonano dla wartości $n = 7$, najczęściej przyjmowanej w szerokim zakresie przepływów turbulentnych. Mnożąc obie strony (1.1) przez dz i całkując w granicach 0 - s/2 i s/2 - s, z uwzględnieniem (4 ÷ 7), a następnie dodając stronami wyniki otrzymano:

$$\frac{64}{63}c_w^2\frac{s}{r_w}\left[G^2x - \frac{(1-G)^2}{x^3}\right] + \frac{64}{63}c_wV\left(Gx + \frac{1-G}{x}\right) - (\omega r_w)^2\frac{s}{r_w}\frac{1+7\bar{k}+56\bar{k}^2}{72}x =$$

$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}\frac{s}{r_w} - \frac{1}{\varrho}(\tau_{nr} + \tau_{\omega r}) \tag{8}$$

τ_{nr} i $\tau_{\omega r}$ są to promieniowe składowe naprężeń na ściance nieruchomej (n) i ruchomej (ω). Dla wygody całkowania wprowadzono nową zmienną

$$x = \frac{r}{r_w} \tag{9}$$

Mnożąc następnie obie strony równania (8) przez dx i całkując w granicach od 1 do x, z uwzględnieniem warunków brzegowych (2), otrzymano:

$$p = p_w' - \frac{8}{21}\varrho V^2\left(\frac{r_w}{s}\right)^2(x^2-1) - \frac{64}{63}\varrho c_w V\frac{r_w}{s}(1-G)\ln x + \frac{32}{63}\varrho c_w^2(1-G)^2(1-x^{-2}) +$$

$$+ \varrho(\omega r_w)^2(x^2-1)\frac{1+7\bar{k}+56\bar{k}^2}{144} - (\Delta p_f)_x \tag{10}$$

Oznaczono tu $(\Delta p_f)_x = \frac{r_w}{s}\int_1^x(\tau_{nr} + \tau_{\omega r})dx$; jest to spadek ciśnienia wskutek tarcia cieczy o ścianki pomiędzy $x = 1$ a x, z uwzględnieniem wirowania i osiowego przesuwu ścianki. Wartość $(\Delta p_f)_x$ obliczono w sposób przybliżony, aby otrzymać wzór końcowy w dogodnej postaci analitycznej.

Wykorzystując wyniki uzyskane w [1] można napisać dla $n = 7$:

$$\tau_{nr} + \tau_{\omega r} = \varrho\frac{c^2}{2}0{,}0791\mathrm{Re}^{-1/4}\left\{\left[1 + (\beta_n N)^2\right]^{3/8} + \left[1 + (\beta_\omega N)^2\right]^{3/8}\right\} \approx$$

$$\cong \rho \frac{c^2}{2}\, 0{,}0791\ Re^{-1/4}\ 2(1 + \delta x^4 - \varepsilon x^6),$$

gdzie:

$$\beta_n = \frac{n}{n+1}\bar{k} = \frac{7}{8}\bar{k}\ ; \qquad \beta_\omega = \frac{n}{n+1}(1-\bar{k}) = \frac{7}{8}(1-\bar{k})\ ;$$

$$\delta = \frac{3\cdot 49}{16\cdot 64}(1-2\bar{k}+2\bar{k}^2)N_w^2\ ; \qquad \varepsilon = \frac{5\cdot 343}{128\cdot 512}(1-3\bar{k}+3\bar{k}^2)N_w^3$$

Uwzględniając (4), (5) a następnie rozwijając wyrażenie w nawiasie kwadratowym (niżej) w szereg Taylora i biorąc trzy pierwsze wyrazy otrzymano:

$$c^2 Re^{-1/4} = c_w^2\ Re_w^{-1/4}\left[1 + G(x^2-1)\right]^{7/4} \cong c_w^2 Re_w^{-1/4} x^{-7/4}(\alpha - \beta x + \gamma x^2),$$

gdzie

$$\alpha = 1 - \frac{7}{4}G + \frac{21}{8}G^2\ ; \qquad \beta = \frac{21}{4}G^2\ ; \qquad \gamma = \frac{7}{4}G + \frac{21}{8}G^2$$

(dla $d_z/d_w \leqslant 1{,}6$ oraz $V \leqslant 0{,}02$ m/s największy błąd tego rozwinięcia, tj. na średnicy zewnętrznej, nie przekracza 6%). Stąd

$$\tau_{nr} + \tau_{\omega r} = 0{,}0791\,\rho\, c_w^2 Re_w^{-1/4}\left[\alpha x^{-7/4} - \beta x^{-3/4} + \gamma x^{1/4} + \alpha\delta x^{9/4} + \right.$$
$$\left. - \beta\delta x^{13/4} + (\gamma\delta - \alpha\varepsilon)x^{17/4} + \beta\varepsilon x^{21/4} - \gamma\varepsilon x^{25/4}\right]$$

a po scałkowaniu

$$(\Delta p_f)_x = (\Delta p_{fo})_x I_x\left[1 + \frac{\alpha(\Phi_x - 1) - \beta\Psi_x + \gamma\Omega_x}{I_x}\right], \qquad (11)$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned}
&(\Delta p_{fo})_x = 0{,}1055\,\rho\, c_w^2\ Re_w^{-1/4}\ \frac{r_w}{s}\ (1 - x^{-3/4}) \\
&I_x = \alpha - 3\beta\frac{x^{1/4}-1}{1-x^{-3/4}} + \frac{3}{5}\gamma\frac{x^{5/4}-1}{1-x^{-3/4}}\ ; \quad \Phi_x = 1 + \frac{3}{13}\delta\frac{x^{13/4}-1}{1-x^{-3/4}} - \frac{3}{21}\varepsilon\frac{x^{21/4}-1}{1-x^{-3/4}} \\
&\Psi_x = \frac{3}{17}\delta\frac{x^{17/4}-1}{1-x^{-3/4}} - \frac{3}{25}\varepsilon\frac{x^{25/4}-1}{1-x^{-3/4}}\ ; \quad \Omega_x = \frac{3}{21}\delta\frac{x^{21/4}-1}{1-x^{-3/4}} - \frac{3}{29}\varepsilon\frac{x^{29/4}-1}{1-x^{-3/4}}
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Jak wykazały liczne obliczenia kontrolne dla $x \leqslant 1{,}6$ i $V \leqslant 0{,}02$ m/s oraz $N_w \leqslant 1{,}5$ można przyjąć, z błędem mniejszym od 1%, iż

$$1 + \frac{\alpha(\Phi_x - 1) - \beta\Psi_x + \gamma\Omega_x}{I_x} \cong \Phi_x\ , \text{ wobec czego}$$

$$(\Delta p_f)_x \cong (\Delta p_{fo})_x I_x \Phi_x \qquad (13)$$

Wzór (10) w połączeniu z zależnościami (12) i (13) lub (11) określa poszukiwany rozkład ciśnień w szczelinie.

Podstawiając w powyższych wzorach $r = r_z$ oraz $x = r_z/r_w = a$ otrzymano wzór na całkowity spadek ciśnienia wewnątrz szczeliny z przesuwającą się i równocześnie wirującą ścianką

$$\Delta p_s = I\,\Phi\,\Delta p_{fo} - \Delta p_{dyf} - \Delta p_\omega + \frac{32}{63}\varrho\, c_w V \frac{d_w}{2s}(2\ln a + 1 - a^2) +$$
$$+ \frac{8}{63}\varrho\, V^2 \left(\frac{d_w}{2s}\right)^2 (3a^2 - 4\ln a - 4 + a^{-2}), \tag{14}$$

gdzie:

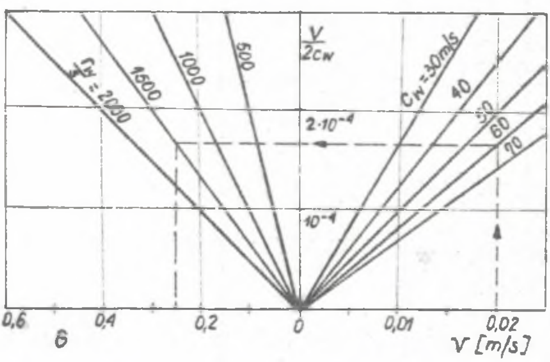
$$\left.\begin{aligned}
&\Delta p_{fo} = 0{,}1055\,\varrho\, c_w^2 \frac{d_w}{2s}\, Re_w^{-1/4}(1 - a^{-3/4})\ ;\\
&\Delta p_{dyf} = \frac{32}{63}\varrho\, c_w^2(1 - a^{-2})\ ; \qquad \Delta p_\omega = \varrho\,(\omega r_w)^2(a^2 - 1)\frac{1+7k+56k^2}{144}\ ;\\
&I = \alpha - 3\beta\frac{a^{1/4} - 1}{1-a^{-3/4}} + \frac{3}{5}\gamma\frac{a^{5/4} - 1}{1-a^{-3/4}}\ ; \quad \Phi = 1 + \frac{3}{13}\delta\frac{a^{13/4} - 1}{1-a^{-3/4}} - \frac{3}{21}\varepsilon\frac{a^{21/4} - 1}{1-a^{-3/4}}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Dla porównania, aby zapewnić przepływ z taką samą prędkością c_w w szczelinie ze ścianką wirującą, lecz ustaloną osiowo potrzebny jest mniejszy spadek ciśnienia

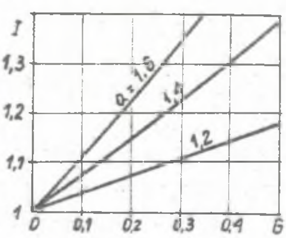
$$(\Delta p_s)_{V=0} = \Phi\Delta p_{fo} - \Delta p_{dyf} - \Delta p_\omega \tag{16}$$

Wzór ten, otrzymany w [1], wynika także z (14) i (15) po podstawieniu $V = 0$. Główną przyczyną różnicy wyników otrzymywanych ze wzorów (14) i (16) jest większa od jedności wartość współczynnika I przy Δp_{fo} oraz pojawienie się składnika zawierającego $c_w V$ we wzorze (14). Wpływ V na I, a stąd na Δp najlepiej ocenić analizując rysunki 3 i 4. Dla szczelin spotykanych w układach odciążających wartość I może sięgać nawet 1,3 – 1,4, co wskazuje na znaczny wpływ prędkości przesuwu osiowego.

Wpływ poszczególnych parametrów najlepiej prześledzić na konkretnym przykładzie liczbowym. Tak np. dla szczeliny o wymiarach $d_w = 200$ mm; $d_z = 300$ mm; $s = 0{,}1$ mm; $\omega = 500$ rd/s uzyskanie prędkości na wlocie $c_w = 50$ m/s wymaga, przy $V = 0$, spadku ciśnienia (dla wody zimnej) $(\Delta p_s)_{V=0} = 7{,}37 \cdot 10^6$ Pa. Natomiast przy $V = 0{,}02$ m/s uzyskanie tej samej prędkości c_w wymaga zapewnienia spadku ciśnienia wewnątrz szczeliny $\Delta p_s = 9{,}67$ MPa, a więc aż o 31% większego niż poprzednio. Jeśli spadek Δp_s nie może się powiększyć, to ruch ścianki z prędkością $V = 0{,}02$ m/s spowoduje zmniejszenie się prędkości c_w (jak również przecieku) o ok. 16%.



Rys. 3. Wartość współczynnika pomocniczego G



Rys. 4. Wartość współczynnika I

4. Uwagi końcowe

Wyprowadzone w pracy zależności przybliżone mogą być wykorzystane do obliczenia przecieku Q (przy danym $\Delta p = p_w - p_z$) lub spadku ciśnienia Δp (przy danym Q) w szczelinie, której wirująca ścianka przemieszcza się równocześnie osiowo z prędkością V. Można je wykorzystać również do obliczenia siły F_s działającej na ściankę szczeliny.

Podane wzory ważne są także dla przypadku ruchu ścianki zgodnego ze zwrotem osi z (rys.1), tj. przy zwiększaniu się szerokości szczeliny. Do wzorów należy podstawić wówczas $V<0$, otrzymując $G<0$ i $I<0$; wpływ V na Δp_s i inne parametry będzie więc przeciwny niż poprzednio.

Podane w pracy zależności mogą być przydatne przy rozwiązywaniu przypadku nieustalonego przepływu cieczy w szczelinie, tj. gdy $V = V(t)$.

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA
(wszystkie wielkości w jednostkach układu SI)

a $= d_z/d_w$ - stosunek średnic szczeliny
c $= Q/\pi d s$ - średnia prędkość przepływu promieniowego w szczelinie
I - współczynnik wpływu osiowego przesuwu ścianki z prędkością V na p(r)
$\bar{K} = (v_\varphi/u)_{z=s/2}$ - średni współczynnik zawirowania cieczy w połowie szerokości szczeliny
N $= u/c$ - współczynnik bezwymiarowy
p - ciśnienie statyczne absolutne cieczy
Q - natężenie przepływu cieczy w szczelinie (strumień objętości)
Re $= c \cdot 2s/\nu$ - liczba Reynoldsa
s - szerokość szczeliny
u $= \omega r$ - prędkość obwodowa ścianki na promieniu r
v_r, v_φ, v_z - składowe wektora prędkości uśrednionego czasowo przepływu turbulentnego
V - prędkość przesuwu osiowego ścianki ruchomej
x $= r/r_w$ - względny promień
Φ - współczynnik wzrostu strat tarcia w szczelinie wskutek wirowania
ω - prędkość kątowa ścianki ruchomej

wskaźniki dolne
w - dotyczy średnicy wewnętrznej (wlotowej) d_w szczeliny
z - dotyczy średnicy zewnętrznej (wylotowej) d_z szczeliny
x - dotyczy względnego promienia $x=r/r_w$

LITERATURA

[1] Jędral W.: Turbulentny przepływ cieczy w hydraulicznie gładkich szczelinach poprzecznych. Archiwum Budowy Maszyn, 1981, nr 1.

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТОРЦЕВОЙ ЩЕЛИ
С ВРАЩАЮЩИМСЯ И ПЕРЕМЕЩИВАЮЩИМСЯ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ ДИСКОМ

Р е з ю м е

В работе выведены приближенные формулы, характеризующие турбулентное центробежное течение жидкости в гидравлически гладкой торцевой щели, образованной двумя параллельными дисками, один из которых неподвижен, а второй вращается с постоянной угловой скоростью. Вращающийся диск одновременно перемещивается в осевом направлении со скорости V. Полученные формулы можно использовать в компютерных расчетах гидростатических упорных подшипников, особенно гидравлических пьят в многоступенчатых центробежных насосах.

TURBULENT LIQUID FLOW THROUGH AN AXIAL CLEARANCE
WIT ROTATING AND MOVING IN THE AXIAL DIRECTION DISC

S u m m a r y

The approximate formulae derived in the present paper describe turb-ulent centrifu-gal liquid flow through a hydraulically smooth axial cle-arance bounded by two parallel discs, one of which is fixed, the other rotating at a constant angular speed. At the same time the rotating disc moves at a velocity V in txe axial direction. The formulae may be useful for computer simulation of dynamic properties of hydrostatic thrust bearings and particularly of balancing discs in multistage centrifugal pumps.