

Małgorzata KALICZYŃSKA

Alina GANCZARSKA

Instytut Elektrotechniki

Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

## MODEL MATEMATYCZNY PRZEPŁYWIOMIERZA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Streszczenie: W pracy przedstawiono model matematyczny przepływomierza elektromagnetycznego z kanałem prostokątnym. W oparciu o metodę różnic skończonych obliczono rozkład pola elektrycznego w poruszającej się cieczy przy przepływie laminarnym i turbulentnym.

## 1. Wstęp

Przepływomierze elektromagnetyczne stosowane są do pomiarów objętościowego natężenia przepływu cieczy przewodzących prąd. Z uwagi na liniową charakterystykę oraz możliwości zastosowania w niestandardowych warunkach są one używane w przypadku braku możliwości zastosowania przepływomierzy o prostej konstrukcji, np. zwężkowych. Przykładem może być pomiar cieczy o dużej lepkości, agresywnych chemicznie, nieniuetonowskich [1] oraz dwufazowych [2, 3, 4]. Powyższe zalety przepływomierzy elektromagnetycznych skłaniają do podjęcia badań nad opracowaniem nowych rozwiązań konstrukcyjnych lub polepszeniem właściwości metrologicznych znanych typów przepływomierzy [5, 6].

Celem pracy jest sformułowanie modelu matematycznego przepływomierza elektromagnetycznego pozwalającego na obliczenie wartości sygnału i wyznaczenia jego charakterystyki oraz poznanie fizyki zjawisk towarzyszących przepływowi strumienia masy w badanym przepływomierzu.

## 2. Sformułowanie równań różniczkowych dla przepływomierza elektromagnetycznego

### 2.1. Podstawowe równanie przepływomierza

Zasada działania przepływomierzy elektromagnetycznych jest oparta na pomiarze siły elektromotorycznej indukowanej w strumieniu cieczy przewodzącej elektryczność, poruszającej się z prędkością  $V$  w zewnętrznym polu magnetycznym  $B_0$ . Wychodząc z prawa Ohma otrzymuje się lokalną gęstość indukowanego prądu  $j$ :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0), \quad (1)$$

gdzie  $\sigma$  jest przewodnością właściwą cieczy. Stacjonarne pole elektromagnetyczne powstające w przewodzącej cieczy opisują równania Maxwella [7,8]

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{B}_0 = \mu \vec{j}, \quad (3)$$

gdzie  $\mu$  oznacza przenikalność magnetyczną cieczy. Równanie (3) ujmuje wpływ prądów indukowanych na pole magnetyczne. W rozważanym przypadku wpływ ten można pominąć, dodatkowo z równania tego wynika

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (4)$$

W oparciu o równanie (2) potencjał  $\phi$  można uzależnić od natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w następujący sposób:

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi. \quad (5)$$

Łącząc równania (1), (4) i (5) oraz zakładając stałą konduktywność cieczy otrzymuje się podstawowe równanie przepływomierza elektromagnetycznego:

$$\nabla^2 \phi = \text{div}(\vec{v} \times \vec{B}_0). \quad (6)$$

Przy przepływie turbulentnym płynu równanie (5) należy uśrednić. Wyrażając wartości chwilowe poszczególnych zmiennych jako sumę wartości średnich i składowych pulsacyjnych:

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} + \phi', \\ \vec{v} &= \bar{\vec{v}} + \vec{v}', \\ \vec{B}_0 &= \bar{\vec{B}}_0 + \vec{B}_0', \end{aligned} \quad (7)$$

Po przeprowadzeniu uśrednienia otrzymuje się:

$$\nabla^2 \bar{\phi} = \text{div}(\bar{\vec{v}} \times \bar{\vec{B}}_0 + \overline{\vec{v}' \times \vec{B}_0'}). \quad (8)$$

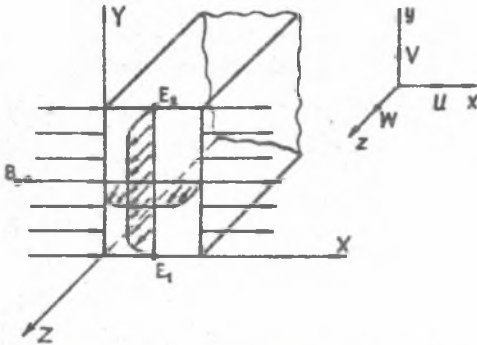
Wyrażenie  $\overline{\vec{v}' \times \vec{B}_0'}$  przedstawia korelację między fluktuacjami prędkości i indukcji pola magnetycznego. Ponieważ pulsacje  $\vec{B}_0'$  wywołane przez pulsacje prądu indukowanego  $\vec{j}'$  są znikomo małe w porównaniu z zewnętrznym polem magnetycznym  $\bar{\vec{B}}_0$ , korelację tę można pominąć. Tak więc równanie (6) opisuje pole elektryczne w poruszającej się cieczy zarówno przy jej laminarnym, jak i turbulentnym przepływie. Po sformułowaniu odpowiednich dla danego zagadnienia warunków brzegowych pozwala ono na obliczenie wartości sygnału przepływomierza. Ponadto konieczna jest znajomość pola prędkości płynu  $\vec{v}$ , które należy określić w oparciu o równania ruchu płynu.

## 2.2. Równania różniczkowe przepływu

Rozpatruje się przepływ cieczy w kanale prostokątnym, zakładając jednorodne zewnętrzne pole magnetyczne o indukcji  $B_0$  prostopadłe do kierunku przepływu. Przedmiotem analizy jest zagadnienie dwuwymiarowe (rys. 1) dotyczące zjawisk zachodzących w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu. W oparciu o założenia z p-tu 2.1. rozkład potencjału  $\phi$  pola elektrycznego, indukowanego w cieczy opisuje równanie

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = B_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad (9)$$

wynikające z równania (6) zgodnie z oznaczeniem jak na rys. 1 oraz przy pominięciu indukowanych prądów na pole magnetyczne  $\bar{\vec{B}}_0$ .



Rys. 1. Schemat przepływiomierza elektromagnetycznego.

Zakładając, że przepływ w kanale jest w pełni rozwinięty ( $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ ), pole prędkości  $W(x, y)$  opisuje układ równań, wynikający z równań Reynoldsa po przyjęciu hipotezy Boussinesqu'a [9] oraz zastosowania k- $\epsilon$  modelu turbulencji. Równania te mają postać [10]:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial V}{\partial x}) \quad (11)$$

$$\frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial V}{\partial x}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial V}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial V}{\partial y}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (UW) + \frac{\partial}{\partial y} (VW) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial W}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_{ef} \frac{\partial W}{\partial y}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (kU) + \frac{\partial}{\partial y} (kV) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \bar{v} + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \bar{v} + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + G - \epsilon \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon U) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon V) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \bar{v} + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \bar{v} + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + \frac{\epsilon}{k} (c_1 G - c_2 \epsilon) \quad (15)$$

gdzie:

$$G = \bar{v}_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (16)$$

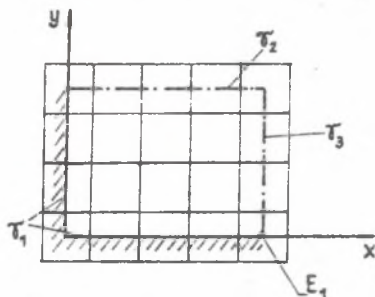
oraz  $p^* = p + \frac{2}{3} k \rho$ . Przyjęto następujące wartości stałych empirycznych:

$$\sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\epsilon = 1,3 \quad c_1 = 1,44 \quad c_2 = 1,92 \quad c_\mu = 0,09$$

Przy powyższym ujęciu uwzględnia się wpływ przepływów wtórnych, odbywających się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu, na rozkład prędkości  $W(x, y)$  w kanale. Sprzężenie przepływów wtórnych z polem prędkości zachodzi poprzez człon generacyjny  $G$  w równaniach (14) i (15). Odmienną postać modelu turbulencji dla przepływów w kanałach prostokątnych znaleźć można w pracach Tatchella [11] i Gessnera [12]. W przypadku przepływów laminarnych, przepływy wtórne pomijają się ( $U, V = 0$ ), a model matematyczny upraszcza się do równania (15) przy  $\bar{v}_{ef} = \bar{v}$ .

### 2.3. Warunki brzegowe

Ze względu na podwójną symetrię płaszczyznową rozpatruje się dalej jedynie ćwiartkę kanału. Obszar fizyczny pokryto siatką różnicową. Rozmieszczenie węzłów siatki pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Obszar fizyczny i rozmieszczenie węzłów siatki różnicowej.

W punktach bezpośrednio sąsiadujących ze ścianką  $\gamma_1$  składowe wektora prędkości oraz  $k$  i  $\mathcal{E}$  oblicza się przy zastosowaniu "logarytmicznego prawa ścianki" [7]. Na brzegach  $\gamma_2$  i  $\gamma_3$  (płaszczyzny symetrii) dla wszystkich zmiennych  $\psi$  ( $\psi = U, V, W, k, \mathcal{E}$ ) zadano warunek Neumanna  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ , gdzie  $n$  oznacza kierunek normalny do brzegu obszaru.

Dla potencjału  $\phi$  sformułowano następująco warunki brzegowe:  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  na ścianie  $\gamma_1$  z uwagi na pominięcie przewodności ścianek,  $\phi = 0$  na brzegu  $\gamma_2$  z uwagi na symetrię rozkładu  $\phi$ , oraz  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  na brzegu  $\gamma_3$  z uwagi na symetrię profilu prędkości. Elektroda  $E_1$  nie wpływa na rozkład potencjału.

### 3. Wyniki obliczeń

Równania modelu matematycznego rozwiązano metodą różnic skończonych. Zastosowano zmodyfikowaną wersję programu TEACH [8] do rozwiązywania przepływów eliptycznych [13].

Przeprowadzono obliczenia testowe dla zakresu przepływów laminarnych i turbulentnych. Ze względu na duży koszt obliczeń, przy realizacji pełnego modelu matematycznego (równania (10) - (15)), oraz słabą zbieżność procedury numerycznej, pominięto przepływy wtórne ( $U=V=0$ ), a model matematyczny ograniczono do modelu dyfuzyjnego (równania (13) - (15)).

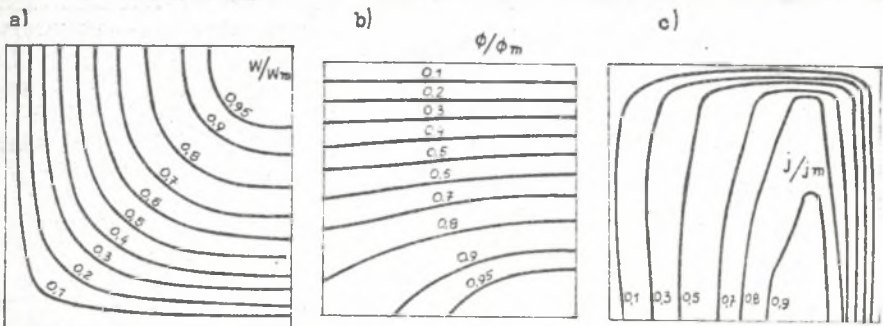
Izolinie pola prędkości, potencjału i gęstości prądu indukowanego  $\vec{j}$  przedstawiono na rys. 3 a-c dla zakresu przepływów laminarnych. Analogiczne rozkłady dla zakresów turbulentnych przedstawiono na rys. 4 a-c.

Otrzymane wyniki wskazują na istotny wpływ pola prędkości na rozkład potencjału w przekroju kanału i indukowane prądy.

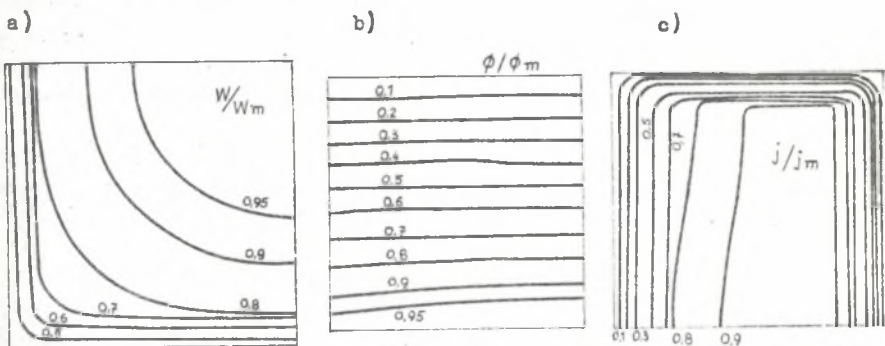
Zależność napięcia między elektodami przepływomierza

$$\phi_{E_1-E_2} = 2 \phi_0 \quad (17)$$

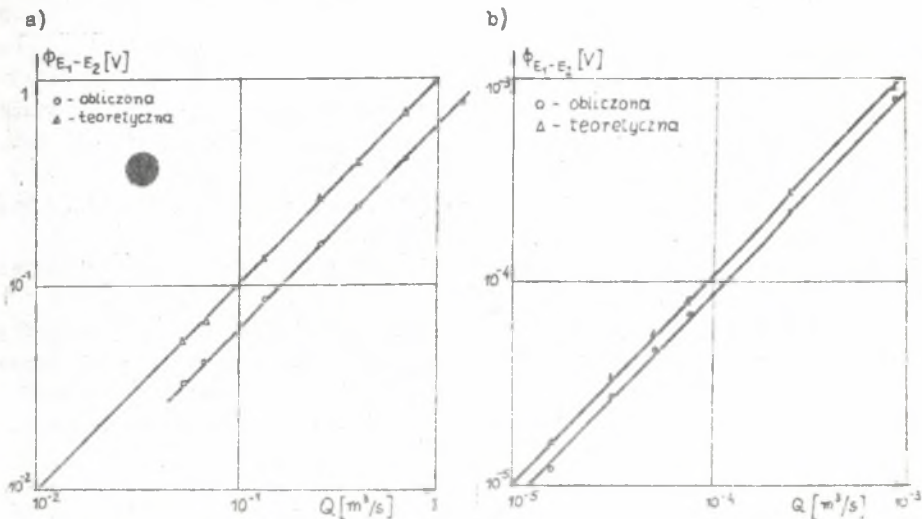
od natężenia przepływu  $Q$  przedstawiono na rys. 5 a, b dla przepływów laminarnych i turbulentnych.



Rys. 3. Izolinie pola prędkości: a), pola potencjału b) i gęstości prądu c) w przekroju kanału w przypadku przepływu laminarnego  $v_{sr}=0,1972$  m/s,  $v_{max}=0,4168$  m/s,  $Re=197,2$



Rys. 4. Izolinie pola prędkości a), pola potencjału b) i gęstości prądu c) w przekroju kanału w przypadku przepływu turbulentnego  $v_{sr}=88,2$  m/s,  $v_{max}=114,2$  m/s,  $Re=88,2 \cdot 10^3$ .



Rys. 5. Zależność sygnału wyjściowego od natężenia przepływu  $Q$  przy laminarnym a) i turbulentnym b) ruchu cieczy.



Na wykresach naniesiono charakterystyki teoretyczne przepływomierza, wynikające ze wzoru:

$$\Phi E_1 - E_2 = B_0 \frac{Q}{A} a, \quad (18)$$

gdzie  $a$  oznacza odległość między elektrodami,  $A$  pole powierzchni kanału, oraz wyniki symulacji cyfrowej.

#### 4. Podsumowanie

Obserwuje się przesunięcie o stałą wartość charakterystyk wynikających z obliczeń numerycznych względem charakterystyk teoretycznych. Przesunięcie to jest spowodowane zastosowaniem elektrody punktowej, natomiast charakterystyka teoretyczna wyprowadzona jest przy założeniu, że elektroda uśrednia potencjał na ścianie kanału.

Różne wartości przesunięcia charakterystyk dla przepływu laminarnego i turbulentnego wskazują na zależność wartości sygnału przy elektrodzie punktowej od rozkładu prędkości w kanale.

Przewiduje się rozwinięcie modelu w celu uwzględnienia wpływu niejednorodności zewnętrznego pola magnetycznego i wtórnego pola magnetycznego na własności metrologiczne przepływomierza.

#### Literatura

- [1] Kułakow M.W.: Pomiary technologiczne i aparatura kontrolno-pomiarowa w przemyśle chemicznym. WNT, Warszawa. 1972
- [2] Bernier R.N., Brennen C.E.: Use of the electromagnetic flowmeter in a two-phase flow. Int. J. Multiphase Flow, Vol.9, No 3, 1983, 251-257
- [3] Bevir M.K.: Theory of induced voltage electromagnetic flowmeasurement. IEEE Transaction on Magnetics, Vol. MAG-6, No 2, June 1970, 315-320
- [4] Kolin A.: Approaches to blood - flow measurement by means of electromagnetic catheter flow meters. IEEE Transaction on Magnetics, Vol, MAG-6, No 2, June 1970, 308-314
- [5] Korsunskij E.M.: Elektromagnitnyje gidrometriczeskije pribory. Moskwa 1964
- [6] Kremlewskij P.P.: Raschodomiery i szotcziki koliczestwa. "Maszynostrojenije" Leningrad 1975
- [7] Grossman L.M., Charwat A.F.: The measurement of turbulent velocity fluctuations by the method of electromagnetic induction. The Review of Scientific Instruments. Vol.23, No 12, December 1952, 741-747
- [8] Shercliff J.A.: The theory of electromagnetic flow - measurement. Cambridge, University Press 1962
- [9] Launder B.E., Spalding D.B.: Mathematical models of turbulence, New York, Academic Press 1972
- [10] Launder B.E., Spalding D.B.: The numerical computation of turbulent flows. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 3, 1974, 269-289

- [1] Tatchell D.G.: Report HTS/75/20, Imperial College, London 1975
- [2] Gessner F.B., Emery A.F.: The numerical prediction of developing turbulent flow in rectangular ducts. Second Symposium on Turbulent Shear Flows, Imperial College, July 1979
- [3] Pun W.M., Spalding D.B.: A general computer program for two-dimensional elliptic flows. Report HTS/76/2, Imperial College, London, 1976

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАСХОДОМЕРА

##### Резюме

В работе представлено математическую модель электромагнитного расходомера с прямоугольным каналом. Опираясь на метод конечных разностей подсчитано распределение электрического поля в движущейся жидкости при ламинарном и турбулентном течениях.

#### MATHEMATICAL MODEL OF THE ELECTROMAGNETICAL FLOWMETER

##### Summary

In the paper the mathematical model of the electromagnetical flowmeter with the rectangular canal has presented. On the basic of finite difference method the electrical field distribution in a moving liquid with the laminar and turbulent flow has calculated.