ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Zbigniew KOSMA
Wyższa Szkoła Inżynierska
w Radomiu

METODY ANALITYCZNO-NUMERYCZNE WYZNACZANIA PŁASKIEGO RUCHU CIECZY LEPKIEJ

Streszczenie: Zasadniczym celem pracy było poszukiwanie takich metod wyznaczania płaskiego ruchu cieczy lepkiej, które zezwalałyby na zminimalizowanie czasu obliczeń numerycznych.
Zbadano cztery metody oparte na całkowaniu quasi-liniowego równania czwartego rzędu dla funkcji prądu. Dwie z tych metod polegały na rozwijaniu rozwiązania w szeregi (względem małego parametru wynikającego z uzmiennienia warunków brzegowych i Taylora względem przyrostu liczby Reynoldsa), dwie następne na utworzeniu odpowiednich ciągów kolejnych przybliżeń-przy wykorzystaniu uogólnionej metody Newtona i zmodyfikowanej metody Newtona z funkcjami relaksacyjnymi.

1. Wprowadzenie

Problem wyznaczenia płaskiego, stacjonarnego ruchu cieczy lepkiej może być sprowadzony do zagadnienia Dirichleta dla quasi-liniowego równania czwartego rzędu dla funkcji prądu

(1) $$\Delta^2 \psi - \mathrm{Re}\, J(\Delta\psi, \psi) = 0 ,$$

gdzie Re jest liczbą Reynoldsa a $J(\Delta\psi,\psi) = \psi_y \Delta\psi_x - \psi_x \Delta\psi_y$, z warunkami brzegowymi sformułowanymi tak, by spełniony był warunek "przylepiania się" cieczy do ścianek ciał stałych i warunek zgodności ze strumieniem opływanym w nieskończoności.

Płaski, stacjonarny ruch cieczy lepkiej stosunkowo rzadko wyznaczany jest poprzez rozwiązanie równania (1) ze względu na jego wysoki rząd pomimo faktu, że ściśle są określone warunki brzegowe dla funkcji ψ. Okazuje się jednak, że rozwiązanie równania (1) może być otrzymane po wykonaniu niewielkiej liczby iteracji, jeśli zastosujemy metodę iteracyjną Picarda [6] lub też klasyczną albo zmodyfikowaną metodę Newtona [1, 7]. Rozwiązanie może być więc wyznaczone szybciej niż przy wykorzystaniu innych metod obliczeniowych; zależy to głównie od zastosowanych algorytmów rozwiązywania zagadnień brzegowych dla liniowych równań eliptycznych czwartego rzędu. Poza tym istotny jest tu fakt małego wpływu błędów obliczeń numerycznych na postać ostatecznego rozwiązania w porównaniu z innymi metodami obliczeniowymi, gdzie zachodzi konieczność wykonania setek a nawet tysięcy iteracji.

Celowe wydaje się więc dalsze udoskonalanie metod rozwiązywania równania (1) opartych na wykorzystaniu metod iteracyjnych Newtona; możemy również spodziewać się szybkiej zbieżności szeregu, w którym funkcja prądu rozwinięta jest względem małego parametru wynikającego z uzmiennienia warunków brzegowych i szeregu Taylora, w którym funkcja prądu rozwinięta jest względem przyrostu liczby Reynoldsa - wskazują na to wyniki uzyskane dla przepływów samopodobnych [5] i wyniki uzyskane przy wykorzystaniu tylko jednego wyrazu szeregu Taylora [1, 7].

2. Rozwijanie rozwiązania w szereg

2.1. Metoda małego parametru

Metoda opiera się na dwu zasadniczych elementach, jakimi są:

1) stan podstawowy $\psi^{[0]}$ będący rozwiązaniem nie spełniającym wszystkich warunków brzegowych,
2) mały parametr $\varepsilon \in [0,1]$ wynikający z uzmiennienia warunków brzegowych

$$\vec{V}|_{\partial\Omega} = (1-\varepsilon)\,\vec{V}^{[0]}|_{\partial\Omega} + \varepsilon\,\vec{V}_z|_{\partial\Omega}\,, \tag{2}$$

gdzie $\vec{V}_z|_{\partial\Omega}$ jest prędkością ścianek poruszających się lub też zadaną prędkością na pozostałych granicach obszaru.
Rozwijając funkcję prądu w szereg potęgowy:

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi^{[k]}\,, \tag{3}$$

otrzymamy po podstawieniu do równania (1) ciąg równań:

$$\Delta^2\psi^{[k]} - \mathrm{Re}J(\Delta\psi^{[k]}, \psi^{[0]}) - \mathrm{Re}J(\Delta\psi^{[0]}, \psi^{[k]}) = \tag{4}$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{p=1}^{k-1} J(\Delta\psi^{[k-p]}, \psi^{[p]}) \qquad (k=1,2,\ldots),$$

których postać ulegnie uproszczeniu, gdy $\psi^{[0]}$ jest rozwiązaniem obowiązującym dla cieczy doskonałej ($\Delta\psi^{[0]}=0$) lub też po przyjęciu $\psi^{[0]}=0$.

Warunki brzegowe dla równań (4) muszą być tak dobrane, by funkcja (3) spełniała warunki zadania; można to osiągnąć w różny sposób, np. nakładając odpowiednie warunki tylko na pierwszy wyraz, a pozostałe spełniają wtedy jednorodne warunki brzegowe.

Omawiana metoda opiera się na założeniu, że promień zbieżności szeregu (3) jest większy od jedności; ponieważ ograniczamy się zawsze do skończonej liczby wyrazów, kwestia zbieżności nie jest istotna - ważne jest, by wyrazy tego szeregu malały dostatecznie szybko wraz ze wzrostem k.

2.2. Szereg Taylora

Równanie (1) zastępujemy równaniem następującym:

$$\Delta^2\psi - [\tau\mathrm{Re} + (1-\tau)\,\overline{\mathrm{Re}}]\,J(\Delta\psi,\psi) = 0, \tag{5}$$

gdzie $\tau \in [0,1]$, $\bar{\psi}$ jest znanym rozwiązaniem dla liczby Reynoldsa $\overline{\mathrm{Re}}$ ($\tau=0$), a interesujące nas rozwiązanie dla liczby Reynoldsa $Re(\tau=1)$ otrzymujemy jako sumę szeregu:

$$\psi \approx \sum_{m=0}^{M} \frac{\partial^m \overline{\psi}}{m!\partial \tau^m} = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} \overline{\psi}^{(m)}. \tag{6}$$

Zakładając dostateczną gładkość funkcji $\psi = \psi(x,y,\tau)$, po wykorzystaniu wzoru Leibniza na pochodną iloczynu funkcji, wyznaczamy z równania (5) kolejne pochodne funkcji $\overline{\psi}$ względem parametru τ :

$$\Delta^2 \overline{\psi}^{(m)} - \overline{Re}J(\Delta\overline{\psi}^{(m)},\overline{\psi}) - \overline{Re}J(\Delta\overline{\psi},\overline{\psi}^{(m)}) = \tag{7}$$

$$= \overline{Re}\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m}{j} J(\Delta\overline{\psi}^{(j)},\overline{\psi}^{(m-j)}) + m(Re-\overline{Re})\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j} J(\Delta\overline{\psi}^{(j)},\overline{\psi}^{(m-1-j)})$$

$$(m=1,2,\ldots).$$

Równania (7) spełniają jednorodne warunki brzegowe, gdyż warunki brzegowe rozważanego zadania spełnia funkcja $\overline{\psi}$.

3. Metody kolejnych przybliżeń

3.1. Metoda BIR

Metodą BIR (Biharmonic Relaxation Method) nazwaliśmy metodę kolejnych przybliżeń rozwiązywania równania (1) , polegającą na wykorzystaniu uogólnionej metody Newtona. Równania określające kolejne przybliżenia tej metody są następujące:

$$\Delta^2\psi^{[k+1]} - Re\,\varkappa_1\psi_y^{[k]}\Delta\psi_x^{[k+1]} + Re\,\varkappa_2\psi_x^{[k]}\Delta\psi_y^{[k+1]} + Re\,\varkappa_3\Delta\psi_y^{[k]}\psi_x^{[k+1]} + \tag{8}$$

$$-Re\,\varkappa_4\Delta\psi_x^{[k]}\psi_y^{[k+1]} = Re\left\{J(\Delta\psi^{[k]},\psi^{[k]}) - (\varkappa_1+\varkappa_4)\psi_y^{[k]}\Delta\psi_x^{[k]} + \right.$$

$$\left. +(\varkappa_2+\varkappa_3)\psi_x^{[k]}\Delta\psi_y^{[k]}\right\} \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

gdzie $\varkappa_i(k+1,x,y)$ $(i=1,2,3,4)$ są funkcjami relaksacyjnymi.

Szczególnymi przypadkami ciągu kolejnych przybliżeń (8) są:

1) metoda BID (Biharmonic Driver Method) [6] $-\varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa_3=\varkappa_4=0$;
2) metoda BOS (Biharmonic Oseen Method)[6] $-\varkappa_1=\varkappa_2=1,\ \varkappa_3=\varkappa_4=0$;
3) metoda FON (Fourth Order Newton Method) [1, 7] $-\varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa_3=\varkappa_4=1$.

3.2. Metoda Split BIR

W wyniku zastosowania metody Split BIR (Split Biharmonic Relaxation Method), będącej zmodyfikowaną metodą Newtona z dodatkowo wprowadzonymi funkcjami relaksacyjnymi $\tilde{\varkappa}_i(x,y)$ $(i=1,2,3,4)$, otrzymujemy następujący ciąg kolejnych przybliżeń:

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & \Delta^2\psi^{[k+1]} - Re\,\tilde{\varkappa}_1\bar{\psi}_y\Delta\psi_x^{[k+1]} + Re\,\tilde{\varkappa}_2\bar{\psi}_x\Delta\psi_y^{[k+1]} + Re\,\tilde{\varkappa}_3\Delta\bar{\psi}_y\psi_x^{[k+1]} + \\
& - Re\,\tilde{\varkappa}_4\Delta\bar{\psi}_x\psi_y^{[k+1]} = Re\left\{ J(\Delta\psi^{[k]},\psi^{[k]}) - \tilde{\varkappa}_1\bar{\psi}_y\Delta\psi_x^{[k]} + \tilde{\varkappa}_2\bar{\psi}_x\Delta\psi_y^{[k]} + \right. \\
& \left. + \tilde{\varkappa}_3\Delta\bar{\psi}_y\psi_x^{[k]} - \tilde{\varkappa}_4\Delta\bar{\psi}_x\psi_y^{[k]} \right\} \qquad (k=0,1,2,\ldots),
\end{aligned}
$$

w którym $\bar{\psi}$ jest znanym rozwiązaniem - przyjmiemy $\bar{\psi} = \psi^{[0]}$.

Szczególnymi przypadkami metody Split BIR są:

1) metoda BID - $\tilde{\varkappa}_1=\tilde{\varkappa}_2=\tilde{\varkappa}_3=\tilde{\varkappa}_4 = 0$;
2) metoda Split BOS (Split Biharmonic Oseen Method) [6] - $\tilde{\varkappa}_1=\tilde{\varkappa}_2 = 1$, $\tilde{\varkappa}_3=\tilde{\varkappa}_4= 0$;
3) metoda Split FON (Split Fourth Order Newton Method) [1, 7] - $\tilde{\varkappa}_1=\tilde{\varkappa}_2=\tilde{\varkappa}_3=\tilde{\varkappa}_4 = 1$.

3.3. Dobór funkcji relaksacyjnych

Metody iteracyjne Newtona są metodami zbieżnymi lokalnie, starannie należy więc obrać przybliżenie początkowe i funkcje relaksacyjne tak, by $\psi^{[1]}$ było możliwie bliskie rozwiązaniu.

Jedna z możliwości wykorzystania metod BIR i Split BIR w ich ogólnej postaci może być następująca. Znając dwa rozwiązania $\psi^{[0]}$ i ψ^{*} odpowiadające liczbom Reynoldsa Re_o i Re_{*} obliczamy funkcje relaksacyjne, które wykorzystujemy następnie przy wyznaczaniu rozwiązania dla liczby Reynoldsa $Re > Re_{*} > Re_o$ przy niezmienionym przybliżeniu początkowym $\psi^{[0]}$. W przypadku starannego doboru funkcji relaksacyjnych można spodziewać się zarówno rozszerzenia zakresu zbieżności, jak i przyspieszenia zbieżności w porównaniu z metodami FON i Split FON, w których przyjęto przybliżenie początkowe odpowiadające liczbie Reynoldsa Re_{*}.

Przy badaniu zbieżności i szybkości zbieżności metod BIR i Split BIR ograniczymy się do funkcji relaksacyjnych postaci:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \tilde{\varkappa}_1 = [\varepsilon_1\psi_y^{*} + (1-\varepsilon_1)\psi_y^{[0]}]/\psi_y^{[0]}; \qquad \tilde{\varkappa}_2 = [\varepsilon_2\psi_x^{*} + (1-\varepsilon_2)\psi_x^{[0]}]/\psi_x^{[0]};\\
& \tilde{\varkappa}_3 = [\varepsilon_3\Delta\psi_y^{*} + (1-\varepsilon_3)\Delta\psi_y^{[0]}]/\Delta\psi_y^{[0]}; \ \tilde{\varkappa}_4 = [\varepsilon_4\Delta\psi_x^{*} + (1-\varepsilon_4)\Delta\psi_x^{[0]}]/\Delta\psi_x^{[0]},
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie $\varepsilon_i \in [0,1]$ $(i=1,2,3,4)$ - przy założeniu, że

$$(11)\qquad \varkappa_i(1,x,y) = \tilde{\varkappa}_i(x,y)\ ; \qquad \varkappa_i(k,x,y) = 1 \qquad (i=1,2,3,4;\ k>1)\ .$$

4. Omówienie wyników przykładowych obliczeń numerycznych

Przedstawione cztery analityczno-numeryczne metody wyznaczania płaskiego ruchu cieczy lepkiej testowano na dwu przykładach: przepływu w prostokątnym zagłębieniu i opływu walca, badając przede wszystkim zbieżność i szybkość zbieżności tych metod. Ze względu na dysponowanie głównie maszyną cyfrową ODRA-1325 i w ograniczonym zakresie maszyną ODRA-1305, obliczenia wykonano na "grubych" siatkach dla liczb Reynoldsa $Re \leq 400$ dla przepływu w prostokątnym zagłębieniu i $Re \leq 100$ dla opływu walca.

Z braku miejsca ograniczymy się wyłącznie do omówienia najważniejszych wyników, natomiast dokładne przedstawienie zarówno samych algorytmów obliczeń, jak i uzyskanych wyników wraz z porównaniami z wynikami cytowanymi w literaturze zawiera praca [4].

4.1. Przepływ w prostokątnym zagłębieniu

Wyznaczenie przepływu w prostokątnym zagłębieniu polega na rozwiązaniu zagadnienia brzegowego określonego równaniem (1) i warunkami brzegowymi:

$$(12)\qquad \begin{cases} \psi(0,y) = \psi_x(0,y) = 0\ ; & \psi(a,y) = \psi_x(a,y) = 0\ ; \\ \psi(x,0) = \psi_y(x,0) = 0\ ; & \psi(x,b) = 0\ ;\ \ \psi_y(x,b) = 1. \end{cases}$$

Równania (4), (7), (8) i (9) rozwiązywano metodą kollokacji przy wykorzystaniu przedstawienia funkcji sklejanej trzeciego stopnia przez znormalizowane B-spline'y [3], aproksymując każdy wyraz szeregu lub każde przybliżenie ψ funkcją

$$s(x,y) = \sum_{l=-1}^{L+1} q_l(x) B_l(y).$$

Po dołączeniu równań wynikających ze stosownych warunków brzegowych otrzymano układy równań różniczkowych zwyczajnych z jednorodnymi warunkami brzegowymi, które rozwiązywano również przy wykorzystaniu funkcji sklejanych trzeciego stopnia [3].

Wykonane obliczenia dotyczyły:

- rozwijania rozwiązania w szereg (3) przy założeniu, że $\psi^{[0]}=0$ a warunki brzegowe (12) spełnia pierwszy wyraz szeregu $\psi^{[1]}$;

- rozwijania rozwiązania w szereg (6) dla $\overline{Re} = 0,1,10,100$;
- badania metody BIR dla funkcji relaksacyjnych obliczonych dla $Re_0=1$, $Re_{*}=100$ i $Re_0=100$, $Re_{*}=200$ przy przyjęciu $\varepsilon_i=0.5$ i 1 ;
- badania metody Split BIR dla takich samych funkcji relaksacyjnych, jakie wykorzystano w metodzie BIR oraz dodatkowo dla funkcji relaksacyjnych obliczonych dla $Re_0=1$, $Re_{*}=200$ przy przyjęciu również $\varepsilon_i=0.5$ i 1 ;
- badania metod BIR i Split BIR dla szczególnych funkcji relaksacyjnych $\varkappa_1=\varkappa_2=\tau_1$ = const, $\varkappa_3=\varkappa_4=\tau_2$ = const, $\tilde{\varkappa}_1=\tilde{\varkappa}_2=\tilde{\tau}_1$ = const, $\tilde{\varkappa}_3=\tilde{\varkappa}_4=\tilde{\tau}_2$=const.

4.2. Opływ walca

Zagadnienie wyznaczenia opływu walca jest trudnym przykładem obliczeniowym ze względu zarówno na konieczność postawienia warunków brzegowych w dużej odległości od walca, jak i na ich właściwe przyjęcie - szczególnie przy dużych liczbach Reynoldsa [2].

Wyznaczając opływ walca równanie (1) rozwiązywano we współrzędnych biegunowych r,θ, dla następujących warunków brzegowych:

dla $r=1$ $\psi=\partial\psi/\partial r = 0$,

dla $\theta=0$ i $\theta=\pi$ $\psi=\partial^2\psi/\partial\theta^2 = 0$,

dla $r=r_\infty$ $\psi=r_\infty\sin\theta$ oraz $\partial\psi/\partial r=\sin\theta$ lub $\partial^2\psi/\partial r^2 = 0$.

Ograniczono się do wyznaczenia opływu walca dwiema metodami: metodą małego parametru (przyjęto za stan podstawowy rozwiązanie obowiązujące dla cieczy doskonałej - niejednorodne warunki brzegowe spełnia tylko pierwszy wyraz szeregu) i metodą BIR ($\varkappa_1=\varkappa_2=\tau_1$ = const, $\varkappa_3=\varkappa_4=\tau_2$ = const) rozwijając rozwiązania równań (4) i (8) w szereg Fouriera $\sum_{(n)}\psi_n(r)\sin\theta$, otrzymując - po dołączeniu dodatkowych równań wynikających ze stosownych warunków brzegowych - układy równań różniczkowych zwyczajnych.

4.3. Wnioski

Pomimo że wykonane obliczenia dotyczyły wyznaczania tylko dwu przypadków płaskiego ruchu cieczy lepkiej dla niezbyt dużego zakresu liczb Reynoldsa, to jednak można na ich podstawie wyciągnąć wnioski o charakterze ogólnym. Są one następujące:

1) najbardziej efektywną metodą wyznaczania płaskiego ruchu cieczy wydaje się być metoda Split BIR, głównie ze względu na niezależność lewych stron równań (9) od numeru iteracji, a także ze względu na rozszerzenie zakresu zbieżności i przyspieszenie zbieżności, w porównaniu z metodą Split FOR, po wprowadzeniu funkcji relaksacyjnych;
2) metoda BIR w najbardziej ogólnej postaci wydaje się być nieprzydatna praktycznie ze względu na zależność postaci lewych stron równań (8) od numeru iteracji oraz ze względu na fakt, że funkcje relaksacyjne (11) nie zezwoliły ani na rozszerzenie zakresu zbieżności, ani na jej

przyspieszenie w porównaniu z metodą FON, a poszukiwanie funkcji relaksacyjnych nie podlegających założeniu (11) byłoby zbyt skomplikowane;

3) metoda BIR może być wykorzystana w ograniczonym zakresie (szczególnie przy wyznaczaniu opływu) dla szczególnych funkcji relaksacyjnych $\varkappa_1=\varkappa_2=\tau_1=$ const, $\varkappa_3=\varkappa_4=\tau_2$ = const ze względu na szybką zbieżność oraz możliwość jej przyspieszenia po przyjęciu zaobserwowanych, optymalnych wartości tych parametrów - bliskich $\tau_1=\tau_2=1$;
4) rozwinięcie w szereg Taylora względem przyrostu liczby Reynoldsa daje dobre rezultaty dla $\Delta Re \leq 50$, gdyż wtedy wystarczy ograniczyć się do kilku wyrazów szeregu (6);
5) rozwinięcie w szereg (3) daje - zgodnie z oczekiwaniami - dobre rezultaty w przypadku starannie dobranego stanu podstawowego, na co wskazują wyniki uzyskane przy wyznaczaniu opływu walca.

5. Zakończenie

Wykorzystanie omawianych metod analityczno-numerycznych do wyznaczania płaskich ruchów cieczy lepkiej w obszarach o dowolnych kształtach i w szerokim zakresie liczb Reynoldsa, wymaga opracowania szybkiej metody rozwiązywania zagadnień brzegowych dla eliptycznych równań liniowych czwartego rzędu.

Szybkie wyznaczanie rozwiązań takich zagadnień może być uzyskane po zastosowaniu specjalnych nierównomiernych siatek i po zastąpieniu każdego z równań czwartego rzędu równoważnym układem dwu równań drugiego rzędu z funkcjami niewiadomymi ψ i $\varphi=\Delta\psi$. Wyznaczając rozwiązania otrzymanych układów równań metodą ustalania, przy wykorzystaniu metody naprzemiennych kierunków i równań funkcji sklejanej trzeciego stopnia [3], otrzymamy ciągi układów równań macierzowych z trójdiagonalną macierzą blokową, z podmacierzami stopnia szóstego.

Literatura

[1] T.Cebeci, R.S.Hirsch, H.B.Keller, P.G.Wiliams,: Studies of numerical methods for the plane Navies-Stokes equations,Comp.Math.Appl.Mech.Eng., 1981,27, No 1.
[2] B.Fornberg; A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder, J.Fluid Mech., 98, 1980, 819.
[3] Z.Kosma; Podstawowe zastosowania wybranych funkcji sklejanych, Wyd.IV Letniej Szkoły Mechaniki Płynów, Mikołajki 1983.
[4] Z.Kosma; Analityczno-numeryczne metody wyznaczania płaskiego ruchu cieczy lepkiej, Zeszyty Naukowe IMP PAN w Gdańsku /przygotowywane do druku/
[5] W.J.Prosnak; On a small parameter method for solving certain self-similary problems of viscous fluid,Bull.Pol.Ac,Ser.Sci.techn.,vol.XVIII, No 5, 1969.
[6] P.J.Roache, A.M.Ellis; The BID method for the steady-state Navier-Stokes equations, Comp.Fluids, 1975, 3, No 4.
[7] K.T.Walter, P.S.Larsen; The FON method for the steady two-dimensional Navier-Stokes equations, Comp.Fluids, 1981, 9, No 3.

АНАЛИТИЧЕСКО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Р е з ю м е

Главной целью работы является изыскание таких методов расчёта плоских течений вязкой жидкости, при помощи которых можно решить проблему при ограничении времени расчёта до минимум.

Исследуются четыре методы базирующие на интегрировании нелинейного уравнения четвёртого порядка для функции тока. Два с этих методов состоются в разложении решения в ряды - первый: относительно малого параметра вытекающего из изменения граничных условий, второй: в ряд Тейлора относительно приращения числа Рейнольдса; в двух следующих строится процессы последовательных приближений - через использование обобщенного метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона с функциями релаксации.

OBTAINING PLANAR MOTION OF VISCOUS FLUID BY ANALYTICAL-NUMERICAL METHODS

S u m m a r y

The main aim of this paper is determination of steady planar motion of viscous fluid. We look for the method which allows to minimize the computer run time.

Four methods basing on integration of quasi-linear fourth-order equation for stream function have been investigated. Two of them consist in the application of expansion techniques-first: with respect to a small parameter resulting from modification of the boundary conditions, second: the Taylor series expansion with respect to an increase Reynolds number. Two of next methods are related to the building a sequences of succesive approximations, by means of a general Newton method and moderate Newton method with relaxation functions.