ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Mieczysław KRĘŻELEWSKI
Instytut Okrętowy
POLITECHNIKA GDAŃSKA

ZWIĄZKI KINEMATYCZNE I DYNAMICZNE DLA WARSTWY WIROWEJ W RUCHU OGÓLNYM

Streszczenie: W pracy wykazano, że gęstość natężenia wirów warstwy wirowej można uzależnić od skoku prędkości względnej na tej warstwie. To uzależnienie oraz inne nowe związki kinematyczne pozwalają na proste wyprowadzenie związków dynamicznych dla rozpatrywanej warstwy i wzorów dla reakcji hydrodynamicznych działających na warstwę wirową. W pracy przedstawiono te związki i wzory oraz warunki brzegowe na warstwie. Są one ważne dla dowolnego ruchu warstwy w dowolnie ukształtowanym zbiorniku wody przy założeniu, że przepływ na zewnątrz warstwy wirowej jest przepływem potencjalnym.

1. Wprowadzenie

Niezamknięta warstwa wirowa o powierzchniowym natężeniu wirów $\bar{\gamma}$ jest stosowana w teorii płata nośnego. Płat nośny może być dowolnie ukształtowany. Może on być opływany strugą jednorodną a może także wykonywać ruch dowolny. Zakłada się, że poza warstwą wirową przepływ jest potencjalny, że płyn jest barotropowy, że siłami masowymi są siły grawitacyjne oraz że na warstwie wirowej nie występuje odrywanie przepływu.

Nie robimy żadnych ograniczeń dotyczących granic ośrodka płynnego, w którym znajduje się rozpatrywana warstwa wirowa ani też ograniczeń dotyczących obecności innych ciał w tym ośrodku.

Powyższe uwagi wskazują na nader szerokie możliwości stosowania niżej przedstawionych wyników.

Dotychczas znane związki kinematyczne dla warstwy wirowej, podane przez Koczina w pracy [2], odnoszą się do przepływu absolutnego płynu. W pracy [4] dodatkowo założono, że przepływ absolutny jest przepływem potencjalnym. Przy ruchu dowolnym płata nośnego korzystne jest jednak rozpatrywanie zagadnień przepływu w układzie odniesienia związanym z płatem nośnym. Stąd celowe będzie uzależnienie tych związków od prędkości względnej $\bar{V}_w$ przepływu:

$$\bar{V}_w = \bar{V} - \bar{V}_e, \tag{1}$$

gdzie: $\bar{V} = \nabla\varphi$ – prędkość absolutna przepływu,
φ – potencjał prędkości absolutnej przepływu,
$\bar{V}_e$ – prędkość unoszenia płata, przy czym

$$\bar{V}_e = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{2}$$

Potencjał prędkości φ jest wyrażony w układzie odniesienia, związany z warstwą wirową.

Dla dowolnego ruchu płata nośnego związki dynamiczne przedstawione w pracach [1 , 3 i 4] wyprowadzone są w sposób dość zawiły. Uwaga ta odnosi się szczególnie do sposobu prezentowanego w pracy [1]. W pracach tych nie podano wyraźnie ograniczeń dotyczących zastosowania tych związków. Okazuje się, że można je stosować również w przypadku płata nośnego poruszającego się ruchem dowolnym pod sfalowaną powierzchnią wody w zbiorniku o ograniczonych wymiarach. Dla zastosowania tych związków należy jednak znać potencjał prędkości absolutnej φ w każdym konkretnym przypadku.

2. Związki kinematyczne dla warstwy wirowej

Na elemencie dS warstwy wirowej o powierzchniowej gęstości natężenia wirów $\bar{\gamma}$ wyróżniamy dodatnią stronę dS_+ i stronę ujemną dS_- . Zewnętrzną normalną do elementu dS_+ oznaczymy przez $\bar{n}$. Jeśli oznaczymy przez $\bar{V}_+$ prędkość absolutną na dS_+ a przez $\bar{V}_-$ prędkość absolutną płynu na dS_-, to mamy znany związek [2, 3, 4]

$$\bar{\gamma} = \bar{n} \times (\bar{V}_+ - \bar{V}_-) \tag{3}$$

Ponieważ zgodnie z założeniem przepływ poza warstwą jest przepływem potencjalnym, to:

$$\bar{V}_+ = \nabla \varphi_+ \qquad \bar{V}_- = \nabla \varphi_-$$

Ale skok potencjału prędkości jest równy cyrkulacji prędkości Γ . Zatem związek (3) można zapisać także tak [4]:

$$\bar{\gamma} = \bar{n} \times \nabla(\varphi_+ - \varphi_-) = \bar{n} \times \nabla\Gamma \tag{4}$$

Ponieważ po obu stronach warstwy wirowej prędkości unoszenia są takie same:

$$\bar{V}_e = \bar{V}_{e+} = \bar{V}_{e-} , \tag{5}$$

to przy uwzględnieniu wzoru (1) związek (3) będzie:

$$\bar{\gamma} = \bar{n} \times (\bar{V}_{w+} - \bar{V}_{w-}) \tag{6}$$

przy czym ze względu na brak odrywania przepływu:

$$\bar{V}_{w+} \cdot \bar{n} = \bar{V}_{w-} \cdot \bar{n} = \bar{V}_{w0} \cdot \bar{n} = 0, \tag{7}$$

gdzie:

$$\bar{V}_{w0} = \frac{1}{2}(\bar{V}_{w+} + \bar{V}_{w-}) \tag{8}$$

jest prędkością względną w środku warstwy wirowej.

Związki kinematyczne (4) do (8) mają podstawowe znaczenie przy wyprowadzaniu zależności dynamicznych znanych pod uogólnionymi twierdzeniami Żukowskiego. Oprócz nich okazuje się przydatna zależność dla iloczynu $\bar{\gamma} \times \bar{n}$. Przy zastosowaniu do związku (6) wzoru dla podwójnego iloczynu wektorowego mamy:

$$\bar{\gamma} \times \bar{n} = \bar{V}_{w+} - \bar{V}_{w-} - \bar{n}[(\bar{V}_{w+} - \bar{V}_{w-}) \cdot \bar{n}]$$

Ale na mocy (7) ostatni wyraz jest równy zeru.
Stąd:

$$\bar{\gamma} \times \bar{n} = \bar{V}_{w+} - \bar{V}_{w-} = \nabla \Gamma \tag{9}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_+}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial n} = 0 \tag{9a}$$

Wyrażenie (9a) stanowi jeden z warunków brzegowych na powierzchni wirowej opływanej bez odrywania przepływu.

3. Związki dynamiczne dla warstwy wirowej

Ponieważ, zgodnie z założeniem, warstwa wirowa znajduje się w przepływie potencjalnym, a także na dodatniej i ujemnej stronie tej warstwy, przepływ płynu barotropowego jest przepływem potencjalnym, to ważna jest tu całka Cauchy'ego-Lagrange'a. Całka ta wyrażona za pomocą prędkości względnej ma postać:

$$\frac{\partial' \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V_w^2 - \frac{1}{2} V_e^2 + \mathcal{P} + U = C(t)$$

Zastosujemy tę całkę do obu stron warstwy wirowej.
Biorąc pod uwagę związek (5) oraz to, że stała $C(t)$ ma taką samą wartość dla dS_+ i dS_- a także $U_+ = U_-$ mamy:

$$\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \frac{\partial'(\varphi_+ - \varphi_-)}{\partial t} + \frac{1}{2}(V_{w+}^2 - V_{w-}^2) \tag{10}$$

Ale:

$$\frac{\partial'(\varphi_+ - \varphi_-)}{\partial t} = \frac{\partial' \Gamma}{\partial t} \tag{10a}$$

$$\frac{1}{2}(V_{w+}^2 - V_{w-}^2) = \frac{1}{2}(\bar{V}_{w+} + \bar{V}_{w-}) \cdot (\bar{V}_{w+} - \bar{V}_{w-}) \tag{10b}$$

Widzimy, że pierwszy czynnik wyrażenia (10b) jest równy prędkości względnej w środku warstwy wirowej, a drugi czynnik jest określony wzorem (9). Uwzględniając to możemy wzór (10) zapisać w postaciach:

$$\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \frac{\partial' \Gamma}{\partial t} + \bar{V}_{w0} \cdot (\bar{\gamma} \times \bar{n}) \tag{11a}$$

$$\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \frac{\partial' \Gamma}{\partial t} + \bar{n} \cdot (\bar{V}_{w0} \times \bar{\gamma}) \tag{11b}$$

$$\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \frac{\partial' \Gamma}{\partial t} + \bar{V}_{w0} \cdot \nabla \Gamma \tag{11c}$$

Wszystkie wzory (11) są równoważne. Przedstawiają one najbardziej ogólną postać małego twierdzenia Żukowskiego dla warstwy wirowej utworzonej z wirów zamkniętych; mogą one zamykać się w nieskończoności. Za tą powierzchnią nie ma wirów swobodnych. Warstwa ta zastępuje płat nośny o skończonej rozpiętości, nie wytwarzający siły nośnej.

W przypadku cieczy nieściśliwej funkcja ciśnienia $\mathcal{P} = p/\varrho$ i wzory (11) są:

$$p_- - p_+ = \varrho\left[\frac{\partial' \Gamma}{\partial t} + \bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma})\right] \tag{12a}$$

$$p_- - p_+ = \varrho\left(\frac{\partial' \Gamma}{\partial t} + \bar{V}_{w0}\cdot\nabla\Gamma\right) \tag{12b}$$

Ze wzorów (11) i (12) wynika natychmiast dynamiczny warunek brzegowy na śladzie za płatem nośnym. Na śladzie wirowym powstającym za płatem ciśnienia po obu stronach śladu są takie same. Więc wtedy we wzorach (11) i (12) należy podstawić:

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \qquad \text{lub} \qquad p_+ = p_-$$

Widać stąd, że warunek brzegowy na śladzie lub na powierzchni wirowej utworzonej z wirów swobodnych, oznaczonych przez $\bar{\gamma}_-$ w odróżnieniu od wirów związanych, $\bar{\gamma}_+$, zastępujących płat nośny, jest taki sam dla płynu ściśliwego i płynu nieściśliwego. Wyrażenia dla tego warunku są:

$$\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} + \bar{V}_{w0}\cdot\nabla\Gamma_s = 0 \tag{13a}$$

$$\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} + \bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_-) = 0 \tag{13b}$$

Jeśli przepływ jest ustalony, to $\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} = 0$ i $\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_- = 0$.

Uzyskaliśmy znany wynik: w ruchu ustalonym płata wiry swobodne $\bar{\gamma}_-$ są równoległe do prędkości względnej.

Jeśli płat skończonej rozpiętości wytwarza siłę nośną, to:

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_+ + \bar{\gamma}_- \qquad \Gamma = \Gamma_s + \Gamma_z \tag{14}$$

Zgodnie z twierdzeniem Kelvina o pochodnej cyrkulacji prędkości, $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ mamy:

$$\frac{d\Gamma_z}{dt} = -\frac{d\Gamma_s}{dt} = -\left(\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} + \bar{V}_{w0}\cdot\nabla\Gamma_s\right) = -\left[\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} + \bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_-)\right] \tag{15}$$

Z określenia wirów związanych wynika, że:

$$\frac{d\Gamma_z}{dt} = \frac{\partial' \Gamma_z}{\partial t}$$

Zatem wzór (15) można zapisać:

$$\frac{\partial' \Gamma_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} + \bar{V}_{w0}\cdot\nabla\Gamma_s\right) = -\left[\frac{\partial' \Gamma_s}{\partial t} + \bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_-)\right] \tag{16}$$

Związek (16) zastosujemy do wzorów (11) i (12). Bardzo proste działania dają następujące wyrażenia:

$$\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+) \tag{17a}$$

$$\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \bar{V}_{w0}\cdot\nabla\Gamma_z \tag{17b}$$

$$p_- - p_+ = \varrho\,\bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+) \tag{18a}$$

$$p_- - p_+ = \varrho\,\bar{V}_{w0}\cdot\nabla\Gamma_z \tag{18b}$$

Widzimy, że różnica ciśnień po obu stronach płata nośnego uzależniona jest od natężenia wirów związanych. Wiry swobodne oddziałają na różnicę ciśnień na płacie tylko przez ich wpływ na prędkość względną.

Podstawowe związki dynamiczne (17) i (18) dla warstwy wirowej, zastępującej płat nośny, jak widać, są ważne tak dla ruchu ustalonego płata jak i dla nieustalonego ruchu tego płata w dowolnym zbiorniku wody, w którym przepływ jest potencjalny z wyjątkiem obszarów zajmowanych przez warstwy wirowe.

Na podstawie wzorów (17) i (18) można wyrazić postulat Żukowskiego--Czapłygina na krawędzi spływu płata nośnego. Ponieważ na krawędzi spływu $p = p_+$ lub $p_+ = p_-$ a $\bar{V}_\omega \neq 0$, to wtedy $\bar{\gamma}^+ = 0$ względnie $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \tau} = 0$, gdzie τ mierzone jest wzdłuż cięciwy płata.

4. Siła hydrodynamiczna działająca na powierzchnię nośną

Do wyznaczenia siły oddziaływania płynu na warstwę wirową zastosujemy ogólny wzór dla reakcji hydrodynamicznej w przepływie potencjalnym:

$$\bar{R} = -\int_S (p - p_0)\,\bar{n}\,dS$$

Na dodatniej stronie powierzchni wirowej S_+ zewnętrzna normalna jest $\bar{n}$ a ciśnienie $p = p_+$. Na ujemnej stronie powierzchni wirowej zastępującej cienki płat nośny mamy odpowiednio: $\bar{n}_- = -\bar{n}$ i $p = p_-$. Zakładamy płyn nieściśliwy. Ciśnienie p_0 jest określane daleko przed płatem. Ponieważ $S_+ = S_- = S$, to:

$$\bar{R} = \int_S (p_- - p_+)\,\bar{n}\,dS \tag{19}$$

a moment tej siły względem bieguna O będzie:

$$\bar{M} = \int_S (p_- - p_+)\,\bar{r}\times\bar{n}\,dS, \tag{20}$$

gdzie: $\bar{r}$ jest promieniem wodzącym elementu powierzchni dS. Podstawiając wzór (18a) do wyrażenia (19) mamy:

$$\bar{R} = \int_S \varrho\,\bar{n}\otimes\bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+)\,dS \tag{21a}$$

Wyrażenie podcałkowe wzoru (21a) można doprowadzić do prostej postaci przez zastosowanie wzoru dla podwójnego iloczynu wektorowego:

$$\bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C}) = \bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) + \bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})$$

W naszym przypadku $\bar{B} = \bar{n}$; $\bar{A} = \bar{n}$; $\bar{C} = \bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+$.

Więc:

$$\bar{n}\,[\bar{n}\cdot(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+)] = \bar{n}\times[\bar{n}\times(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+)] + \bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+(\bar{n}\cdot\bar{n})$$

Łatwo wykazać, że $\bar{n}\times(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+) = 0$.

Istotnie, stosując do powyższego wyrażenia wyżej podany wzór dla podwójnego iloczynu wektorowego otrzymujemy:

$$\bar{n}\times(\bar{V}_{w0}\times\bar{\gamma}_+) = \bar{V}_{w0}(\bar{n}\cdot\bar{\gamma}_+) - \bar{\gamma}_+(\bar{V}_{w0}\cdot\bar{n})$$

Ale normalna $\bar{n}$ jest prostopadła do powierzchni utworzonej z wektorów $\bar{\gamma}_+$, zatem $\bar{n}\cdot\bar{\gamma}_+ = 0$. Dalej, na mocy warunku brzegowego (7) $\bar{V}_{w0}\cdot\bar{n} = 0$.

Stąd po uwzględnieniu powyższych zależności wzór (21a) przybiera prostą postać:

$$\bar{R} = \rho \int_S (\bar{V}_{w0} \times \bar{\gamma}_+)\, dS \tag{21b}$$

Podobnie wzór (20) można zapisać następująco:

$$\bar{M} = \rho \int_S \bar{r} \times (\bar{V}_{w0} \times \bar{\gamma}_+)\, dS \tag{22}$$

Wzory (21b) i (22) można także uzyskać przez podstawienie wyrażenia (18b) do wzorów (19) i (20). I tak:

$$(p_- - p_+)\bar{n} = \rho \bar{n} (\bar{V}_{w0} \cdot \nabla \Gamma_z) = \rho [\bar{V}_{w0} \times (\bar{n} \times \nabla \Gamma_z) + \nabla \Gamma_z (\bar{V}_{w0} \cdot \bar{n})]$$

Stąd po uwzględnieniu zależności (4) i (7) uzyskuje się już prosto wzory (21b) i (22).

Jeśli płat nośny nie wytwarza siły nośnej, to podstawienie wyrażeń (12) do wzorów (19) i (20) i wykonanie analogicznych działań do działań wyżej wykonanych prowadzi do wzorów:

$$\bar{R} = \rho \int_S \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \bar{n} + \bar{n} \bar{V}_{w0} \cdot \nabla \Gamma \right) dS \tag{23a}$$

$$\bar{M} = \rho \int_S \bar{r} \times \bar{n} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \bar{V}_{w0} \cdot \nabla \Gamma \right) dS \tag{23b}$$

lub wzorów w postaci:

$$\bar{R} = \rho \int_S \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \bar{n} + \bar{V}_{w0} \times \bar{\gamma} \right) dS \tag{23c}$$

$$\bar{M} = \rho \int_S \bar{r} \times \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \bar{n} + \bar{V}_{w0} \times \bar{\gamma} \right) dS \tag{23d}$$

Wzory (23) mogą być zastosowane do wyznaczenia sił o charakterze bezwładnościowym działających na płat nośny.

Łatwo jest stwierdzić, że w przypadku przepływu izentropowego gazów wzory (21), (22), (23) dla reakcji $\bar{R}$ i $\bar{M}$ należy pomnożyć przez $(\varkappa-1)\varkappa^{-1}$

LITERATURA

[1] Biełocerkowskij S.M., Skripacz B.K., Tabaczników W.G.: Kriło w niestacjonarnom patokie gaza. Izd. Nauka, Moskwa 1971.

[2] Koczin N.E.: Wektornoje isczislenie i naczała tensornogo isczislenia. Izd. Akademii Nauk ZSRR, Moskwa 1951.

[3] Krężelewski M.: Hydromechanika ogólna i okrętowa, cz. II. Wyd. PG, Gdańsk 1982.

[4] Lipis W.B.: Gidrodinamika grebnogo winta. Izd. Sudostrojenie, Leningrad 1975.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ
ДЛЯ ВИХРЕВОГО СЛОЯ В ОБЩИМ ДВИЖЕНИИ

Р е з ю м е

В работе поставлено в зависимость интенсивность вихревого слоя от скачка относительной скорости на этом слое.

Представлены кинематические и динамические связи, а также формулы для гидродинамических реакции, в которых использованы интенсивность вихревого слоя и относительная скорость.

KINEMATIC AND DYNAMIC RELATIONS FOR VORTEX SHEET
IM GENERAL MOTION

S u m m a r y

There is shown that vortex density can be related to relative velocity jump on the vortex sheet. This and other kinematic and dynamic relations, based on the relative velocity and vortex density, as well as the expressions for hydrodynamic forces acting on the vortex sheet are presented in the paper.