ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Henryk KUDELA
Instytut Techniki Cieplnej i Mechaniki Płynów
Politechniki Wrocławskiej

BADANIA NAD METODĄ DYSKRETNYCH WARSTW WIROWYCH

Streszczenie: W pracy zbadano doświadczalnie wpływ wartości parametrów numerycznych występujących w metodzie warstw wirowych na dokładność wyników. Otrzymane rozwiązania porównano ze znanymi rozwiązaniami dokładnymi. Zbadano wpływ zjawiska oderwania się warstwy przyściennej na jakość otrzymywanych wyników.

1. Wstęp

W pracy [3] Chorin podał numeryczną metodę, zwaną metodą kropel wirowych /patrz [7]/, przeznaczoną do modelowania przepływów z dużymi liczbami Reynoldsa /małymi wartościami współczynniki lepkości/. Istotną własnością metody jest brak w obliczeniach siatki numerycznej. Wprowadza ona zwykle do obliczeń tzw. lepkość numeryczną, która może być tego samego rzędu co lepkość cieczy. Metoda kropel wirowych posiada jednak pewne wady, do których należą długie czasy obliczeniowe /liczba działań w jednym kroku czasowym jest proporcjonalna do kwadratu liczby wirów/ i powolna zbieżność rozwiązań w pobliżu ściany [4]. Próbą przezwyciężenia tych wad jest metoda warstw wirowych również zaproponowana przez Chorina [4]. Odbywa się to jednak kosztem uproszczeń równań ruchu cieczy. Metoda warstw wirowych służy do rozwiązywania równań warstwy przyściennej Prantla. Celem obecnej pracy było doświadczalne zbadanie wpływu wartości parametrów numerycznych występujących w metodzie warstw wirowych na dokładność otrzymywanych wyników, a ponadto zbadanie jak zjawisko oderwania warstwy przyściennej wpływa na otrzymywane wyniki.

2. Krótki opis i wyprowadzenie metody warstw wirowych [4]

Równania warstwy przyściennej w formie równań transportu wirowości wraz z równaniem ciągłości mają postać:

$$\partial_t \xi + (\underline{u} \cdot \nabla)\xi = \nu \partial_{yy} \xi \tag{1}$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \tag{2}$$

gdzie

$$\xi = -\partial_y u \tag{3}$$

a $\partial_{(\cdot)}$ oznacza różniczkowanie po zmiennej $(\cdot)$, ∇ - operator gradientu, ν - kinematyczny współczynnik lepkości, $\underline{u} = (u,v)$ - wektor prędkości, ktorego składowa u jest prędkością styczną do ściany, a v składową normalną. Oś x jest skierowana stycznie do ściany, a oś y prostopadle do niej. Zakłada się, że ściana znajduje się na dodatniej półosi x /y=0/, a ciecz wypełnia całą półpłaszczyznę $y \geqslant 0$. Warunki graniczne są następujące:

$$\underline{u} = \underline{0} \qquad \text{dla} \quad y=0\,, \qquad x \geqslant 0 \tag{4}$$

$$\underline{u} = (U_\infty,\ 0) \qquad \text{dla} \quad y = \infty \tag{5}$$

W metodzie warstw wirowych wykorzystuje się tzw. algorytm rozszczepienia, zgodnie z którym równanie główne rozkłada się na sumę dwóch równań elementarnych. Rozwiązanie otrzymuje się przez kolejne rozwiązywanie równań elementarnych. W naszym przypadku równanie (1) rozkłada się na równanie Eulera /ν=0/ oraz równanie dyfuzji. Równanie Eulera rozwiązuje się w zmiennych Lagrange'a, wprowadzając do obliczeń elementy wirowe zwane dalej warstwami wirowymi. Równanie dyfuzji natomiast rozwiązuje się metodą przypadkowego błądzenia, dodając do składowej deterministycznej położenia warstwy wirowej, losową o rozkładzie Gaussa z odpowiednio dobranymi parametrami. Równania Eulera w zmiennych Lagrange'a opisujące przemieszczenie infinitezymalnej cząstki cieczy mają postać:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{u} \tag{6}$$

Jak wiadomo, powyższe równanie opisuje również ruch warstw wirowych. Jeżeli do zaaproksymowania równań (6) użyjemy ilorazu różnicowego w przód, to algorytm przemieszczania warstw wirowych już z uwzględnieniem składnika losowego symulującego lepkość ma postać:

$$x_i^{n+1} = x_i + \Delta t \cdot u \tag{7}$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \Delta t \cdot v + \eta\,,$$

gdzie $\underline{x}_i^n = \underline{x}_i(n \cdot \Delta t)$, $x_i = (x_i, y_i)$, Δt - krok czasowy, η - zmienna losowa o rozkładzie Gaussa z wartością średnią $E[\eta] = 0$ i wariancja $\mathrm{var}[\eta] = 2 \cdot \nu \Delta t$. Prawą stronę równań (6) można wyrazić poprzez wirowość (3), posługując się wzorami (3) i (2) następująco:

$$u(x,y) = U_\infty(x) - \int_y^\infty \xi(x,y)\ dy \tag{8}$$

$$v(x,y) = -\partial_y \int_0^y u(x,y)\ dy \tag{9}$$

W metodzie warstw wirowych wirowość zastępowana jest zbiorem nie obracających się równoległych do osi x odcinków /warstw wirowych/ o długości h i intensywności ξ_j równej różnicy prędkości nad warstwą i pod warstwą $\xi_j = u_{nad} - u_{pod}$. Tak więc:

$$\xi(x,y) \cong \sum_j \xi_j\, \delta(y - y_j)\, \chi_j(x), \tag{10}$$

gdzie $\delta(y)$ jest deltą Diraca, a $\chi_j(x)$ funkcją charakterystyczną równą jedności, gdy $x \in [x_j - h/2, x_j + h/2]$, a poza tym równą zero.

Średnią prędkość, z jaką porusza się i-ta warstwa w kierunku osi x, można obliczyć wstawiając wyrażenie (10) do wzoru (8):

$$u_i = U_\infty(x) - \frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2}\left(\int_{y_i}^{\infty}\sum_j \xi_j\,\delta(y-y_j)\,\chi_j(x)\,dy\right)dx$$

$$= U_\infty(x) - 1/2\,\xi_i - \sum_j \xi_j d_j, \tag{11}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich warstwach, dla których $y_j > y_i$ oraz $0 \le d_j \le 1$, $d_j = 1 - |x_i - x_j|/h$. Pojawienie się składnika $1/2\,\xi_i$ można wytłumaczyć następująco: wiadomo, że $\int_{t_1}^{t_2}\delta(t) = 1$, gdy $t \in (t_1, t_2)$, natomiast, gdy $t = t_1$ arbitralnie można przyjąć, że całka ta jest równa 1/2. Składową v_i aproksymuje się ilorazem centralnym

$$v_i = -\frac{(I_+ - I_-)}{h}, \tag{12}$$

gdzie $I_\pm$ są przybliżonymi wartościami $\int_0^{y_i} u\,(x \pm h/2)\,dy$

$$I_\pm = U_\infty(x_i \pm h/2) - \sum\nolimits_\pm \xi_j d_j y_j^*,$$

$$d_j = 1 - |x_i \pm h/2 - x_j|/h$$

$$y_j^* = \min(y_i, y_j),$$

a sumowanie $\sum_+$ (odp. $\sum_-$) odbywa się po wszystkich warstwach takich, że $d_j^+ \le 1$ ($d_j^- \le 1$). Warunki brzegowe $u(x, y = \infty) = U_\infty(x)$ oraz $v(x, y = 0) = 0$ spełnione są automatycznie. Dla spełnienia warunku $\underline{u}\cdot\underline{s} = \underline{0}$, gdzie $\underline{s}$ jest wektorem jednostkowym stycznym do ściany, na ścianie odbywa się proces generacji warstw wirowych. Zakłada się, że pole prędkości jest antysymetryczne $u(x,-y) = -u(x,y)$ /stąd $\xi(x,-y) = \xi(x,y)$/. Jeżeli $u(x,0) = u_0 \ne 0$, to wzdłuż ściany tworzy się warstwa wirowa o jednostkowej intensywności równej $2u_0$, którą dzieli się na odcinki o długości h i pozwala się tym odcinkom dyfundować w obszar przepływu. Dla lepszego odtworzenia procesu dyfuzji programowo zapewnia się, aby każda generowana warstwa miała intensywność nie większą od z góry zadanej liczby ξ_{max}. W miejsce pojedynczej warstwy tworzy się więc pewną /patrzystą/ liczbę warstw $2\cdot 1$ tak, aby $\sum_{i=1}^{2l}\xi_j^i = 2u_0$, $2l = [2u_0/\xi_{max}] + 1$, gdzie [ ] oznacza część całkowitą wyrażenia.

Warunek $\xi(x,-y) = \xi(x,y)$ uwzględniany jest poprzez zwracanie do cieczy warstw wirowych, które przekroczyły ścianę i przeszły do dolnej półpłaszczyzny $y < 0$. Dla zmniejszenia wariancji otrzymywanych wyników Chorin zastosował procedurę "końcówkowania" /szczegóły patrz [4], [1]/.

3. Badania numeryczne

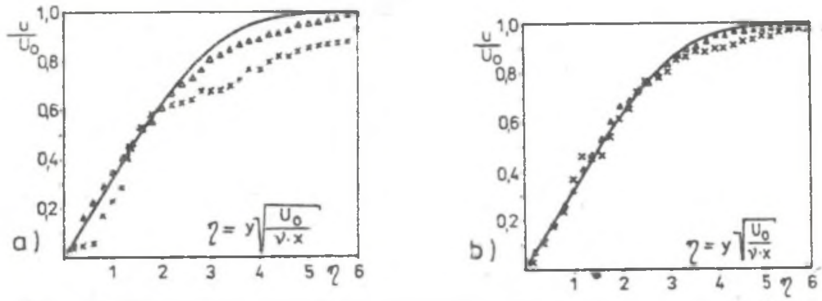
3.1. Uwagi wstępne

Do obliczeń wykorzystano, po niewielkich zmianach, program Chorina zadokumentowany przez Cheera [1]. Obliczenia były prowadzone z konieczności dla skończonego odcinka płytki, tzn. dla $0 \le x \le a$. Aby uniknąć przeciwnych do kierunku przepływu niepożądanych oddziaływań Chorin zaproponował następującą procedurę: warstwy wirowe, które przekroczyły $x=a$, są z obliczeń oliminowane, a warstwy, których środki znalazły się w pasku $[a-2h, a]$, doznają ruchu konwekcyjnego tylko w kierunku osi x. W obecnej pracy przyjęto $a=1,4$. Jako pierwsze rozwiązywano zagadnienie formowania się warstwy przyściennej nad płaską płytką, gdy zewnętrzne pole prędkości jest stałe $U_\infty(x) = U_0$. Stacjonarnym rozwiązaniem takiego zagadnienia jest dla (1) - (5) dobrze znany profil Blasiusa [9, s.134]. Następnie rozwiązywano zagadnienie, w którym zewnętrzna prędkość zmieniała się jak $U_\infty(x) = U_0 - bx$, $U_0>0$, $b>0$. Zagadnienie to było rozwiązywane przez Howarth'a [6] metodą rozwinięć asymptotycznych. Do obecnej pracy rozwiązania, które będziemy uważali za dokładne, zaczerpnięto z [7 s. 598]. Rozwiązania te zależą od dwóch bezwymiarowych zmiennych $x^* = -\frac{bx}{U_0}$ oraz $\eta = 1/2 \cdot y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$. Według Howarth'a dla $x^* = 0,12$ zachodzi oderwanie warstwy przyściennej. Do obliczeń przyjęto najpierw rozkład $U_\infty(x) = 1 - 0,075x$, dla którego punkt oderwania przypada dla $x=1,6$, czyli poza rozpatrywanym obszarem, a następnie $U_\infty(x) = 1-0,23x$, gdzie punkt oderwania przypada dla $x = 0,51$, tzn. wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Celem zmniejszenia błędu statystycznego rozkłady prędkości uśredniano po 20 krokach czasowych. Jeżeli intensywność nowo powstającej warstwy była mniejsza od z góry zadanej liczby ξ_0, to warstwa ta była pomijana. W obecnej pracy przyjęto $\xi_0 = 1/2\, \xi_{max}$.

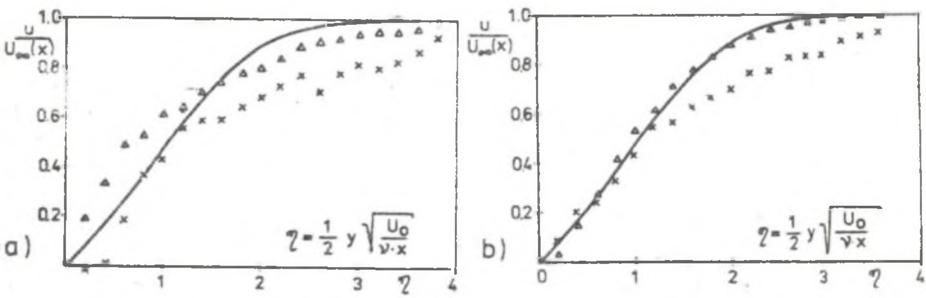
3.2. Wyniki numeryczne

Parametrami, którymi można wpływać na proces obliczeniowy, są: ξ_{max}, h i Δt. W pracy [5] Chorin podał, że dla uniknięcia oscylacji rozwiązań należy przyjmować $\Delta t \leqslant h$. Dlaej przyjęto we wszystkich eksperymentach $\Delta t = h$ i oznaczono jedną literą r /$\Delta t=h=r$/. Dobór ξ_{max} oraz r jest kompromisem pomiędzy dokładnością a czasem trwania obliczeń. Przykładowo, dla zagadnienia, gdy $U_\infty(x) = 1$, $\xi_{max} = 0,1$ i $r=0,1$, liczba warstw wirowych po 60 krokach czasowych wynosiła 417, a czas trwania obliczeń pola prędkości dla $x=0,2$ do 1, co 0,1 na maszynie ODRA-1306 wynosił ok. 100 minut, natomiast dla tego samego zagadnienia z $\xi_{max} = 0,8$ i $r=0,2$ liczba wirów wynosiła 34, a czas obliczeń ok. 2,5 minuty.

W pracy [4] eksperymentalnie stwierdzono, że dla $\Delta t \leqslant 0,2$, $h \leqslant 0,2$ oraz $\xi_{max} \leqslant 0,1$ dominującym błędem jest błąd statystyczny, który wraz ze wzrostem liczby wirów maleje raczej wolno. Na rys. 1 przedstawiono rozkłady prędkości dla $U_\infty(x) = 1$, a na rys. 2, gdy $U_\infty(x) = 1-0,075x$. Na tle rozwiązań dokładnych naniesiono rozwiązania numeryczne: znak Δ odnosi się do $\xi_{max} = 0,1$, natomiast $\times$ do $\xi_{max} = 0,8$. Rysunkom a/ odpowiada $r=0,1$, a rysunkom b/ $r=0,2$. Pod rysunkami podano również liczbę N warstw wirowych, które brały udział w obliczeniach.



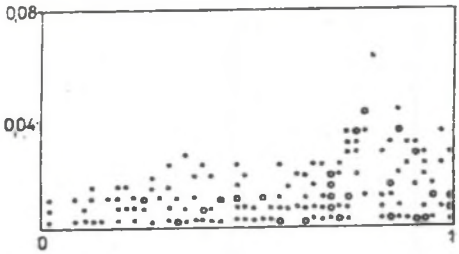
Rys. 1. Uśrednione rozkłady prędkości dla U x=1, x=0,5, $\nu=10^{-4}$
a/ r=,1 , △ - ξ_{max}=0,1, N=417, × - ξ_{max}=0,8, N=85
b/ r=0,2, △ - ξ_{max}=0,1, N=12, × - ξ_{max}=0,8, N=34



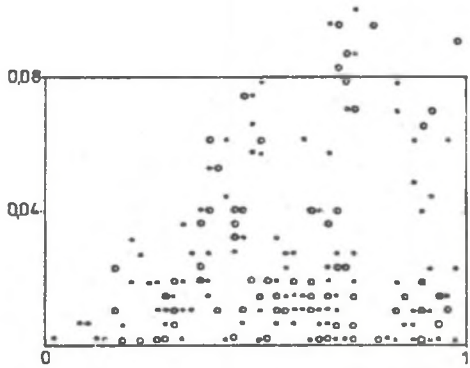
Rys. 2. Uśrednione rozkłady prędkości dla U x=1,075x, x=1, $\nu=10^{-4}$
a/ r=0,1, △ - ξ_{max}=0,1, N=417, × - ξ_{max}=0,8, N=121
b/ r=0,2, △ - ξ_{max}=0,1, N=162, × - ξ_{max}=0,8, N=47

Przedstawione wyniki otrzymano po 60 krokach czasowych. Przyjęto, że w przybliżeniu jest osiągany wtedy stan stacjonarny. Częściowo potwierdziły to obserwacje pól prędkości po 40,60 i 80 krokach czasowych. Najlepsze rozwiązania otrzymano dla r=0,2 i ξ_{max}=0,1. Można zauważyć, że rozwiązania dla r=0,1, ξ_{max}=0,8 wykazują pewne oscylacje. Zwiększenie r /r= Δt=h/ powodowało tłumienie tych oscylacji. Rys. 3 przedstawia przykładowe usytuowanie warstw wirowych nad płytką po 60 krokach czasowych dla $U_\infty(x)$= 1 oraz r=0,1 i ξ_{max}= 0,1.

Aby zbadać wpływ oderwania warstwy przyściennej na otrzymywane wyniki przeprowadzono obliczenia dla $U_\infty(x)$ = 1-0,23x. Nie uzyskano przepływu stacjonarnego. Warstwa przyścienna gwałtownie się poszerza. Pojawia się przepływ wsteczny dla x $\leqslant$ 0,51. Rozkłady prędkości, mimo uśredniania, są bardzo nieregularne, a ich ważność jest wątpliwa. Przykładowy rozkład wirów nad płytką dla $U_\infty(x)$= 1-0,23x, r=0,1 i ξ_{max}=0,5 przedstawiono na rys. 4.



Rys. 3. Warstwy wirowe nad płytką: $U_\infty(x)=1$, $r=0,1$, $\xi_{max}=0,1$, $N=417$
o- warstwa wirowa o intensywności dodatniej, •- warstwa wirowa o intensywności ujemnej, $\nu=10^{-4}$



Rys. 4. Warstwy wirowe nad płytką: $U_\infty(x)=1-0,23x$, $r=0,1$, $\xi_{max}=0,5$, $N=307$ o- warstwa o intensywności dodatniej, •- warstwa o intensywności ujemnej, $\nu=10^{-4}$

4. Wnioski i uwagi końcowe

Na podstawie przedstawionych wyników można wnioskować, że:
1/ przy ograniczonej liczbie kroków czasowych na ogół nie otrzymuje się najlepszych dokładności przy najmniejszych wartościach Δt, h i ξ_{max},
2/ duże wartości $\xi_{max} \cong 0,8$ przy stosunkowo małych wartościach r /$r=\Delta t=h=0,1$/ mogą powodować, nie mające fizycznego znaczenia, oscylacje rozwiązań,
3/ obecna wersja metody warstw wirowych nie nadaje się do modelowania przepływów z oderwaniem warstwy przyściennej.

Należy zwrócić uwagę, że metoda warstw wirowych /podobnie jak metoda kropel wirowych /nie jest zorientowana na otrzymywanie bardzo dokładnych rozwiązań, lecz nacisk położony jest w niej na symulację fizycznej strony przepływu cieczy/ wprowadzenie do obliczeń elementu wirowego, generacja wirów na ścianie/.

Równania Prandtla zostały wyprowadzone na podstawie przyjęcia pewnych hipotetycznych założeń, z których wynika między innymi $v \ll u$. Chorin w prywatnej korespondencji zasugerował, że być może należałoby sprawdzać, czy ten warunek jest spełniony dla każdej warstwy. Jeżeli nie, to warstwę wirową należałoby zastąpić kroplą wirową /por. [2], [5]/. W ten sposób zastępowałoby "dopasowywanie" równań Prandtla do równań Naviera-Stokesa i być może pozwoliłoby to na modelowanie przepływów z oderwaniem warstwy przyściennej. Prace w tym kierunku zostały już pdojęte przez autora. Wyniki zostaną zaprezentowane w terminie późniejszym.

Literatura

[1] Cheer A.Y.: BOUNDL: A Program For Calcuating Flow Past a Semi-Infinite Flat Plate Using the Vortex Sheet Method, Lawrence Berkelyy Laboratory University of California, Physics Computer Science and Math. Division, IBL - 6643 Supplement, 1978.

[2] Cheer A.Y.; A Study of Incompressible 2-D Vortex Flow Past a Circular Cylinder, ibid, LBL-9950,1979

[3] Chorin A.J.; Numerical Study of Slightly Viscous Flow, J.Fluid Mech. 57 s. 785-796, 1973

[4] Chorin A.J.; Vortex Sheet Approximation of Boudary Layers, J.Comp. Phys. 27 s. 428-442, 1978

[5] Chorin A.J.; Vortex Models and Boundary Layer Instability, SIAM J.Sci. Stat. 1, s. 1-21, 1980

[6] Howarth L.; On the solution of the Laminar Boundary Layer Equations, Proc. Roy. Soc. London A919, 169, s. 547-579, 1938

[7] Kudela H.; Metody dyskretnych wirów, w„Metody Analityczne i Numeryczne w Mechanice Płynów" - wykłady - s. 111-130, Szkoła Letnia Mechaniki Płynów, Mikołajki 1983

[8] Kočin N.E., Kibel I.A., Roze N.M.: Teoreticeskaja gidromechanika, OGiZ Moskwa 1963, t. II

[9] Schlichting H.; Teoria prograničnowo sloja, Nauka, Moskwa 1974.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ВИХРОВЫХ СЛОЕВ

Р е з ю м е

В работе изучено экспериментально влияние размера численных параметров метода вихровых слоёв на точность получаемых результатов. Результаты сравнено с точными решениями. Исследовано влияние точки сепарации пограничного слоя на получаемые результаты.

STUDY OF THE VORTEX SHEET METHOD

S u m m a r y

The paper experimentaly investigates the influence of the numerical parameters in the vortex sheet method on the accuracy of the results. The results were compared with the known accrate solutions. The influence of the boundary separation point on the results which were being obtained was also investigated.