ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Stanisław MAY
Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

OPŁYW PŁYNEM LEPKIM ROZCIĄGANEGO LINIOWO WALCA KOŁOWEGO

Streszczenie: Rozwiązywano numerycznie równania Naviera-Stokesa w przypadku osiowo-symetrycznym dla funkcji prądu zależnej liniowo od współrzędnej osiowej. W szczególnym przypadku małej lepkości znaleziono rozwiązanie analityczne, analogiczne do rozwiązania Riabouchinsky'ego dla przepływu płaskiego.

1. Wstęp

Równania Naviera-Stokesa w przypadku płaskim i osiowo-symetrycznym przechodzą w równania zwyczajne, jeżeli funkcja prądu zależy liniowo od jednej ze zmiennych/w przypadku osiowo-symetrycznym - od współrzędnej osiowej/. Rozwiązanie szczególne dla przypadku płaskiego podał Riabouchinsky [1]. Opisuje ono przepływ wokół rozciąganej półpłaszczyzny, której prędkość rośnie proporcjonalnie do odległości od brzegu. Szymański i Witoszyński [2] podali równania zwyczajne dla funkcji prądu przy symetrii osiowej. W przedstawionej pracy zajmujemy się analizą rozwiązań równań Witoszyńskiego-Szymańskiego dla warunków brzegowych, odpowiadających opływowi rozciąganego liniowo walca kołowego. Jest to osiowo-symetryczna analogia rozwiązania Riabouchinsky'ego. Analogiczne przepływy występują w niektórych procesach technologicznych, w szczególności przy formowaniu monofilu w technologii włókien chemicznych.

2. Równania

W przepływie osiowo-symetrycznym rozważa się funkcję prądu $\psi(r,z)$ związaną ze składowymi prędkości wzorami:

$$u=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad v=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{2.1}$$

gdzie u i v oznaczają składowe prędkości odpowiednio w kierunku osi z i promienia. Dla funkcji prądu w postaci /2.2/

$$\psi(r,z)=A(s)\,z, \tag{2.2}$$

gdzie $s=r^2$, równania Naviera-Stokesa sprowadzają się do równania zwyczajnego /2.3/

$$2\nu s A''' - (A-2\nu)A'' + A'^2 = K \qquad (2.3)$$

w którym ν jest kinematycznym współczynnikiem lepkości, zaś K stałą proporcjonalną do pochodnej ciśnienia w kierunku z. Równanie /2.3/ podali w 1931r. Witoszyński i Szymański. Funkcja prądu /2.2/ opisuje w szczególności przepływ wywołany przez półnieskończony walec kołowy, rozciągany w kierunku osi symetrii z prędkością proporcjonalną do odległości od początku walca. W problemie tym jako warunki brzegowe przyjmujemy równość prędkości obu faz na powierzchni walca oraz znikanie składowej u w nieskończoności:

$$u(r_0,z) = w\cdot\frac{z}{r_0}, \quad v(r_0,z)=0, \quad u(\infty,z)=0 \qquad (2.4)$$

r_0 oznacza promień walca, zaś w stałą o wymiarze prędkości; uw/r_0 jest równe przyśpieszeniu walca. Ze względu na warunek brzegowy /2.4$_3$/ ciśnienie nie zależy od współrzędnej z, skąd w równaniu /2.3/ $K=0$.

Dla dalszych rozważań wprowadzimy zmienne bezwymiarowe:

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad Z = \frac{z}{r_0}, \quad U = \frac{u}{w}, \quad V = \frac{v}{w} \qquad (2.5)$$

$$x = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^2, \quad y(x) = -\frac{\psi}{2\nu r_0 Z} \qquad (2.6)$$

oraz stałą bezwymiarową α o strukturze liczby Reynoldsa

$$\alpha = \frac{w r_0}{4\nu} \qquad (2.7)$$

Bezwymiarowe składowe prędkości U, V można wyrazić przez bezwymiarową funkcję prądu $y(x)$:

$$U = \frac{Zy'}{\alpha R^2}, \quad V = -\frac{y}{2\alpha R} \qquad (2.8)$$

Wydatek przez powierzchnię $Z=$ const lub $R=$ const ma postać:

$$q = 2\pi\int_{r_0}^{r} ru\,dr = -2\pi r z v(r) = 4\pi\nu r_0 Z y(x) \qquad (2.9)$$

Składowa V nie zależy od Z, natomiast składowa U oraz wydatek q są proporcjonalne do wartości Z.

W zmiennych bezwymiarowych /2.6/ równanie /2.3/ dla funkcji prądu wraz z warunkami brzegowymi /2.4/ przyjmują kształt:

$$y''' - y'' + (y-1)(y''-y') = y'^2 \qquad (2.10)$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=\alpha, \quad y'(\infty)=0 \qquad (2.11)$$

Dzięki wprowadzeniu zmiennej x jako logarytmu kwadratu promienia w równaniu /2.10/ nie pojawia się już explicite zmienna niezależna.

Równanie /2.10/ rozwiązano numerycznie dla różnych wartości α oraz analitycznie w przypadku asymptotycznym $\alpha\to\infty$.

3. Rozwiązanie

Równanie /2.10/ całkowano numerycznie metodą Rungego-Kutty. Krzywe całkowe mają postać krzywej logistycznej o wartościach asymptotycznych y_- i y_+ dla $x \to \mp\infty$. Warunek brzegowy /2.11/ można spełnić wtedy, gdy:

$$y_+ > \lambda \tag{3.1}$$

gdzie $\lambda \cong 1.4687...$ Temu zakresowi zmienności y_+ odpowiadają ujemne wartości y_-, co jest wymagane dla spełnienia pierwszego z warunków /2.11/.

W przypadku asymptotycznym $y_+ \to \infty$ pochodne wyższe dążą do nieskończoności szybciej niż niższe. Pomijając pochodne niższe względem wyższych i wprowadzając nowe zmienne /3.2/

$$\xi = y_+ x\,, \qquad \eta = \frac{y}{y_+} \tag{3.2}$$

otrzymujemy zamiast /2.10/,/2.11/ równanie /3.3/

$$\eta''' + \eta\eta'' - \eta'^2 = 0 \tag{3.3}$$

z warunkiem brzegowym /3.4/

$$\eta(0) = 0, \qquad \eta(\infty) = 1 \tag{3.4}$$

Identyczne równanie otrzymał Riabouchinsky przy rozważaniu wspomnianego już problemu płaskiego. Możemy więc wykorzystać szczególne rozwiązanie wykładnicze znalezione przez Riabouchinsky'ego /zależne od 2 stałych dowolnych/. Po uwzględnieniu warunku brzegowego /3.4/ ma ono prostą postać:

$$\eta = 1 - e^{-\xi} \tag{3.5}$$

Mimo formalnego podobieństwa rozwiązanie /3.5/ różni się jednak od rozwiązania Riabouchinsky'ego tym, że w naszym przypadku argument ξ jest logarytmem odległości od ścianki, podczas gdy w rozwiązaniu Riabouchinsky'ego występuje bezpośrednio sama odległość. Wracając do argumentu R otrzymujemy zatem zamiast zależności wykładniczej /3.5/ zależność potęgową /3.6/:

$$y = y_+\left(1 - \frac{1}{R^{2y_+}}\right) \tag{3.6}$$

Biorąc pochodną /3.6/ dla $R = 1$ znajdujemy zależność między y_+ i α:

$$y_+ = \sqrt{\alpha} \tag{3.7}$$

Znalezione rozwiązanie odpowiada więc przypadkowi asymptotycznemu $\alpha \to \infty$. Bliższym omówieniem tego rozwiązania zajmiemy się w części 4. Niżej podamy tylko podstawowe wielkości otrzymane na podstawie /3.6/ i /3.7/:

$$y = \sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{1}{R^{2\sqrt{\alpha}}}\right), \qquad \frac{U}{Z} = \frac{1}{R^{2\sqrt{\alpha}+2}}, \qquad \frac{V}{V_m} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{R^{2\sqrt{\alpha}}}\right) \tag{3.8}$$

$$V_m = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \qquad \frac{U_t}{U_0} = \frac{1}{e}, \qquad x_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \qquad x_m = \frac{\ln(2\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \tag{3.9}$$

Znaczenie nowo wprowadzonych symboli we wzorach /3.8/,/3.9/ wyjaśniono na rys.2 oraz przy omawianiu wyników w części 4.

4. Omówienie wyników

Główne wielkości fizyczne charakteryzujące pole przepływu to obie składowe prędkości oraz wydatek. Miarą wydatku, jak wynika z /2.9/, jest $y(x)$. Na rys.2 przedstawiono schematycznie podstawowe funkcje opisujące przepływ. Wydatek odniesiono do pełnego wydatku w każdym przekroju, zaś obie składowe prędkości do ich wartości maksymalnych. Składowa U osiąga wartość maksymalną Z na brzegu walca, zaś składowa V - wartość maksymalną V_m w pewnej odległości $R_m = e^{x_m/2}$ od brzegu. Iloraz składowej U i jej pochodnej logarytmicznej na powierzchni walca określa pewną wartość $x = x_t$, którą można interpretować jako grubość /w skali logarytmicznej/ warstwy tworzącej się przy powierzchni. Wreszcie przez x_d oznaczono wartość x, której odpowiada $y = y_d = (y_+ - y_-)/2$.

Z fizycznego punktu widzenia najwygodniej jest charakteryzować poszczególne rozwiązania przez parametr α. Ze względu jednak na stosowaną metodę obliczeń numerycznych poszczególne krzywe opisane są przez y_+. Zależność między y_+ i α podano na rys.1. Wynika z niej, że y_+ jest rosnącą funkcją α; dla $\alpha \to 0$ $y_+ \to \lambda$, dla $\alpha \to \infty$ $y_+ \to \sqrt{\alpha} \to \infty$.

Przy omawianiu rozwiązań równania /2.10/ celowe jest przyjęcie odmiennych współrzędnych dla przedstawienia rozwiązań odpowiadających dużym i małym wartościom α. Dla dużych α /rys.3/ przyjęto współrzędne ξ, η, określone przez /3.2/. Krzywa dla $y_+ \to \infty$ $(\alpha \to \infty)$ odpowiada rozwiązaniu analitycznemu /3.5/. Rozwiązania odpowiadające dużym α mają pochodną malejącą monotonicznie ze wzrostem ξ. Gałąź krzywej całkowej zawierająca punkt przegięcia, odpowiadająca dla dużych α ujemnym ξ i η i nie zaznaczona na rys.3, jest tu pozbawiona sensu fizycznego.

Dla małych α wygodniejszy jest układ współrzędnych X, Y:

$$X = \frac{(x - x_d)\, y'_d}{y_+ - y_-}, \qquad Y = \frac{y - y_-}{y_+ - y_-},$$

gdzie $y'_d = y'(x_d)$ /rys.4/. W tych współrzędnych krzywe odpowiadające małym wartościom α leżą blisko krzywej asymptotycznej $\alpha \to 0$. Sens fizyczny mają te gałęzie krzywych, dla których $Y > Y_0$, gdzie $Y_0 = y_- / (y_+ - y_-)$ odpowiada powierzchni walca /na której $x = y = 0$ /. Dla $\alpha \to 0$ Y_0 zmierza do 0, ponieważ $y_- \to 0$ /rys.1/. Zatem dla malejącego α punkt przegięcia krzywej całkowej oddala się od powierzchni walca. Odpowiednia odległość dąży do nieskończoności dla $\alpha \to 0$, co decyduje o niedogodności współrzędnych związanych z powierzchnią walca.

Daleko od powierzchni walca y jest prawie stałe, zaś $y' \ll 1$.

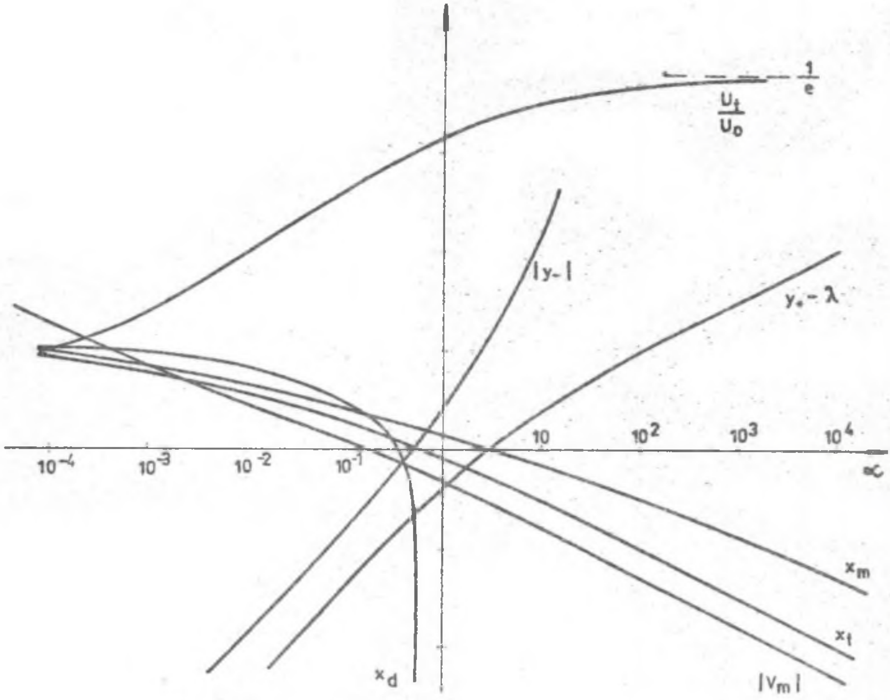
Z /2.8/ wynika, że składowa prędkości U jest wtedy mała względem V, zaś V zależy odwrotnie proporcjonalnie od R. Daleko od ciała przepływ jest więc bliski przepływowi potencjalnemu, odpowiadającemu stałej intensywności źródeł ujemnych na osi walca. Blisko walca występuje warstwa przyścienna, której grubość jest malejącą funkcją α.

Profile U/Z pokazano na rys.5. Jako współrzędną przyjęto stosunek x/x_t. Dla $\alpha\to\infty$ profil ma zgodnie z /3.5/ przebieg wykładniczy jako funkcja x /potęgowy jako funkcja R /. Dla $\alpha\to 0$ profil U/Z dąży do łamanej: $\frac{U}{Z}\to 1-\frac{x}{x_t}$ dla $x\leqslant x_t$, $\frac{U}{Z}\to 0$ dla $x\geqslant x_t$. Wielkością charakteryzującą kształt profilu U jest stosunek $U_t=U(x_t)$ do wartości $U_0=U(0)$ na brzegu. Stosunek ten zmienia się od $1/e$ dla $\alpha\to\infty$ do 0 dla $\alpha\to 0$. Zależność U_t/U_0 oraz x_t od α pokazano na rys.1. Logarytmiczna grubość warstwy x_t zmierza do 0 dla $\alpha\to\infty$ i do ∞ dla $\alpha\to 0$. Przebieg składowej V, pokazany tylko schematycznie na rys.2, scharakteryzowany jest przez V_m i x_m, których zależność od α podano na rys.1. Maksymalna wartość składowej V jest malejącą funkcją α, przy czym dla α dużych $V_m\sim\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Składowa V nie zależy od Z, zaś składowa U jest do Z proporcjonalna; zatem w przekrojach odpowiadającyoh małym Z maksymalna wartość U jest mniejsza od maksymalnej wartości $|V|$, przeciwnie jest w przekrojach odpowiadających dużym Z. Wielkość $|V_m|$ można więc interpretować jako wartość Z charakteryzującą przekrój, w którym maksymalna wartość $|V|$ zrównuje się z maksymalną wartością U. Dla małych α zrównanie to następuje daleko od początku walca, dla dużych natomiast na odcinku początkowym. W ostatnim przypadku już w niewielkiej odległości od początku walca realizują się warunki charakterystyczne dla warstwy przyściennej.

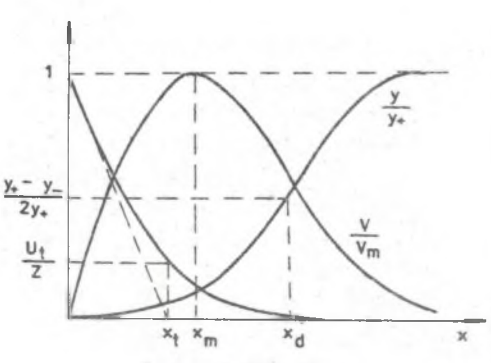
Literatura

[1] D.Riabouchinsky.:C.R.Acad.Sci., Paris, 179, 1133-1136 /1924/.

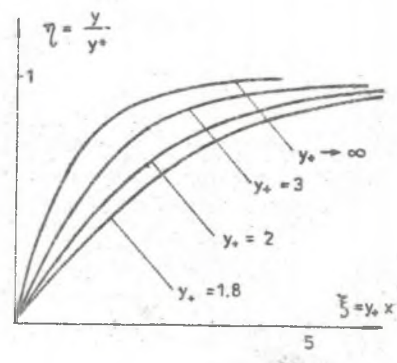
[2] C.Witoszyński, P.Szymański.:Comptes rendus du 3e Congr. Int. de Mec. appl. Stockholm 1930, t.1, 355-357.



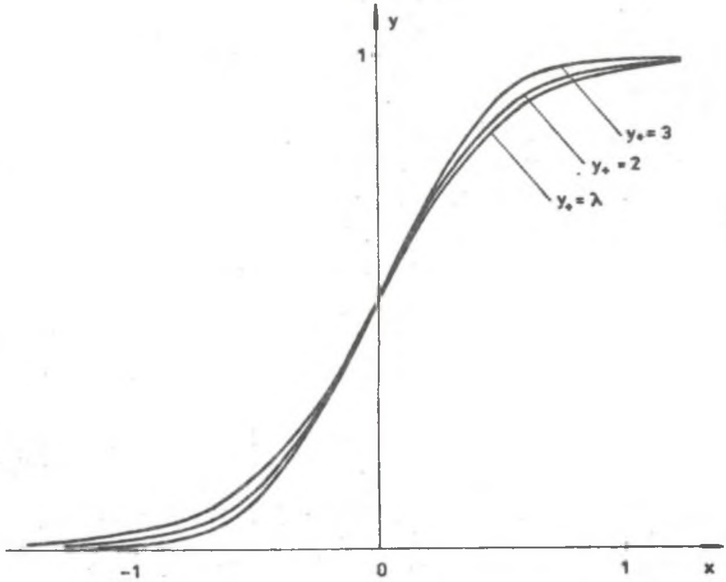
Rys.1. Zależność niektórych globalnych parametrów rozwiązania od α



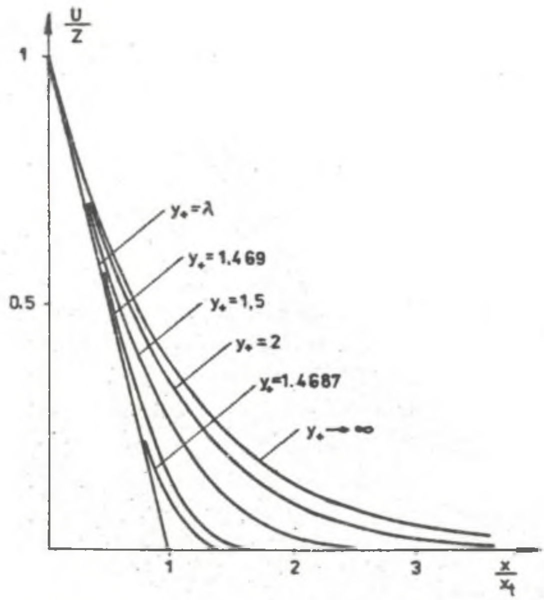
Rys.2. Schematyczna zależność wydatku i składowych prędkości od x



Rys.3. Wydatek dla dużych α



Rys.4. Wydatek dla małych α



Rys.5. Profile składowej prędkości U

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ ЛИНЕЙНО РАСТЯГИВАЕМОГО КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

Р е з ю м е

Рассматривается осесиметрическое решение уравнения Навье-Стокса, для функции тока линейно зависимой от осевой координаты. Решение получено нумерическим путем. В асимптотическом случае малой вязкости было найдено аналитическое решение, аналогично решению Рябушинского для плоского случая.

VISCOUS FLOW NEAR THE LINEARLY STRECHED CIRCULAR CYLINDER

S u m m a r y

The axisymmetric Navier-Stokes equations were solved for the flow function linear with respect to the axial coordinate. Solutions were obtained numerically. In the asymptotic case of small viscousity an analytical solution was found, analogous to the Riabouchinsky solution for the plane case.