

Zbigniew NOWAK

Politechnika Krakowska

Krzysztof WIERZCHOLSKI

Politechnika Lubelska

## HYDRODYNAMICZNA TEORIA SMAROWANIA ŁOŻYSKA STOŻKOWEGO ZA POMOCĄ NIENEWTONOWSKIEGO CZYNNIKA SMARUJĄCEGO

Streszczenie: W pracy podjęto próbę analitycznego rozwiązania przedmiotowego zagadnienia dla przypadku łożyska stożkowego o skończonej szerokości. W rozważaniach uwzględniono zmienność współczynnika konsystencji czynnika smarującego z temperaturą. Wyznaczono rozkłady współrzędnych wektora prędkości, ciśnienia, temperatury oraz nośność badanego łożyska.

### 1. Wstęp

Hydrodynamiczna teoria smarowania łożysk ślizgowych /walcowych i stożkowych/ za pomocą nieneutonowskiego czynnika smarującego, opisanego reologicznie półempirycznym równaniem potęgowym /Ostwald-De Waele/, była dotychczas przedmiotem bardzo niewielu prac, m.in. Teipela [1], [2], Wierzycholskiego [3] oraz Nowaka i Wierzycholskiego [4]. We wszystkich tych rozprawach zakładano niezależność od temperatury współczynnika konsystencji m czynnika smarującego. Fakt ten stanowi bardzo silne założenie upraszczające w świetle bardzo wyraźnej zależności tego parametru reologicznego od temperatury. W tej pracy uwzględniono zmienność współczynnika konsystencji czynnika smarującego z temperaturą zgodnie z półempiryczną formułą, podaną przez Pikusa [5].

### 2. Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem pracy jest analiza teoretyczna przepływu nieneutonowskiego czynnika smarującego, opisanego półempirycznym prawem potęgowym, ze szczególnym uwzględnieniem zmienności współczynnika konsystencji z temperaturą, przez szczelinę ślizgowego łożyska stożkowego o skończonej szerokości /zagadnienie trójwymiarowe!/. Ze znanych związków fizycznych Reissnera-Rivlina [6] można wyprowadzić, że dla potęgowego czynnika smarującego związki pomiędzy składowymi tensora naprężeń i odpowiednimi składowymi tensora prędkości odkształceń mają postać:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p \delta_{ij} + 2^n m(T_1) \left| \frac{1}{2} e_{kt} e_{kt} \right|^{(n-1)/n} e_{ij} \quad /2.1/$$

dla  $i, j, k, t = 1, 2, 3$ , gdzie  $\bar{\sigma}_{ij}$  są składowymi tensora naprężeń, zaś  $e_{ij}$  - tensora prędkości odkształceń. Współczynnik konsystencji  $m$  jest funkcją temperatury, tj.  $m = m(T_1)$ , zaś wskaźnik płynięcia czynnika smarującego - zgodnie z wynikami badań doświadczalnych - przyjmujemy jako niezależny od temperatury, tzn.  $n = \text{const}$ . Założymy ponadto, że:

- $m(T_1) = m_0 \cdot m_1(T_1)$ , gdzie  $m_1$  jest bezwymiarowym współczynnikiem konsystencji czynnika smarującego, zaś  $m_0$  oznacza jego wymiarową wartość dla  $T_1 = 0$ ;
- przepływ smaru przez szczelinę jest ustalony i laminarny.

### 3. Podstawowe równania oraz warunki brzegowe

Nieizotermiczny, laminarny, ustalony przepływ nienewtonowskiego płynu opisany jest układem równań: ruchu, ciążkości i energii /wynikającymi z podstawowych zasad zachowania/ [6], tj. odpowiednio:

$$\text{Div } S = \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad , \quad /3.1/$$

$$\text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad /3.2/$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( c_v T + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \text{div } (\kappa \text{ grad } T) + \text{div } (S \cdot \mathbf{v}) \quad . \quad /3.3/$$

Założymy ponadto, że gęstość czynnika  $\rho$  oraz współczynnik przewodzenia ciepła  $\kappa$  są niezależne od temperatury i ciśnienia. Składowe prędkości  $v_y, v_x$  czynnika smarującego, ciśnienie  $p$  oraz temperaturę  $T$  można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} v_y &= \omega l (\cos \alpha^*) v_{y1} \quad , & p &= \rho_0 \left( \frac{y}{\xi} \right)^2 p_1 \quad , \\ v_x &= \frac{y}{l} v_{x1} \quad , & T &= T_0 + E_c \text{Pr} T_0 T_1 \quad , \end{aligned} \quad /3.4/$$

gdzie indeks "1" oznacza wielkości bezwymiarowe;  $E_c, \text{Pr}$  są odpowiednio liczbami: Eckerta i Prandtla, natomiast  $\tilde{\Psi}_1 = \tilde{\xi}/l \approx 10^{-5}$  jest promieniowym luzem względnym szczeliny. Ponadto:

$$\tilde{\nu} = \frac{m_0}{\rho_0} \left( \frac{\omega l \cos \alpha^*}{\xi} \right)^{n-1} \quad /3.5/$$

oznacza zmodyfikowany kinematyczny współczynnik lepkości. Znaczenie pozostałych symboli występujących we wzorach /3.4/ można łatwo odczytać z rys. 1. Po podstawieniu /3.4/ i /3.5/ do równań /3.1/, /3.2/, /3.3/ i /2.1/ i pominięciu członów rzędu  $\tilde{\Psi}_1$  otrzymujemy:

$$\rho_1 \tilde{\text{Re}}^2 \frac{v_{y1}^2}{x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ m_1(T_1) \left| \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} \right|^{n-1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} \right] = 0 \quad , \quad /3.6a/$$

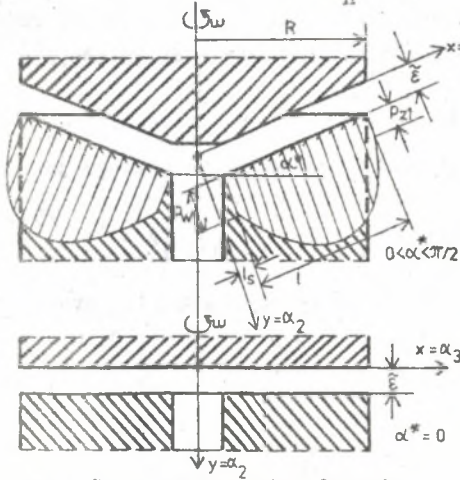
$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left[ m_1(T_1) \left| \frac{\partial v_{\varphi_1}}{\partial y_1} \right|^{n-1} \frac{\partial v_{\varphi_1}}{\partial y_1} \right] = 0 ; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0 , \quad /3.6b/; /3.6c/$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} (\varrho_1 v_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\varrho_1 v_{x_1}) + \varrho_1 \frac{v_{x_1}}{x_1} = 0 , \quad /3.6e/$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} \right) = - m_1(T_1) \left| \frac{\partial v_{\varphi_1}}{\partial y_1} \right|^{n-1} \left( \frac{\partial v_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right)^2 , \quad /3.6e/$$

dla  $0 \leq y_1 \leq 1$  ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ,  $s_1 \leq x_1 \leq 1$  , gdzie przez  $\tilde{Re}_n$  oznaczono zmodyfikowaną liczbę Reynoldsa:

$$\tilde{Re}_n = \frac{(\omega l \cos \alpha^*)^{2-n} \varrho_0 \tilde{\epsilon}^n}{m_0} , \quad /3.7/$$



Rys.1 Schemat szczeliny łożyska

Warunki brzegowe można natomiast sformułować następująco:

$$v_{\varphi_1} = x_1 , \quad v_{x_1} = v_{y_1} = 0 \quad \text{dla } y_1 = 0 , \quad /3.8a/$$

$$v_{\varphi_1} = v_{x_1} = v_{y_1} = 0 \quad \text{dla } y_1 = 1 , \quad /3.8b/$$

$$p_1 = p_{w1} \quad \text{dla } x_1 = s_1 , \quad /3.9a/$$

$$p_1 = p_{z1} \quad \text{dla } x_1 = 1 , \quad /3.9b/$$

$$T_1 = f_{c1} \quad \text{dla } y_1 = 0 , \quad /3.10a/$$

$$T_1 = f_{p1} \quad \text{dla } y_1 = 1 , \quad /3.10b/$$

gdzie  $f_{c1}$ ,  $f_{p1}$  są przyrostami temperatur, odpowiednio: czopa i powierzchni, powyżej temperatury otoczenia.

#### 4. Rozwiązanie analityczne problemu

a/ Wobec  $m_1 > 0$  , równanie /3.6b/ po zróżniczkowaniu i scałkowaniu względem  $y_1$  przyjmie postać:

$$\frac{\partial v_{\varphi_1}}{\partial y_1} = - [C_x(x_1)]^{1/(n+1)} \{m_1[T_1(x_1, y_1)]\}^{1/n} \quad /4.1/$$

gdzie  $C_x$  jest nieznanym parametrem. Po podstawieniu /4.1/ do /3.6e/ otrzymamy równanie pozwalające na wyznaczenie temperatury  $T_1$ :

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + |C_x|^{(n-1)/(n+1)} C_x^{2/(n+1)} \{m_1[T_1(x_1, y_1)]\}^{-1/n} = 0 \quad /4.2/$$

z warunkami /3.10/, w przedziale  $0 \leq y_1 \leq 1$  ,  $s_1 \leq x_1 \leq 1$  .

b/ Po podstawieniu rozwiązania równania /4.2/ do /4.1/ i scałkowaniu tego ostatniego przy uwzględnieniu /3.8b/ otrzymamy:

$$v_{\varphi_1} = - [C_x(x_1)]^{1/(n+1)} \int_1^{y_1} \{m_1[T_1(x_1, y_2, C_x)]\}^{-1/n} dy_2 \quad /4.3/$$

dla  $s_1 \ll x_1 \ll 1$  oraz  $0 \ll y_1 \ll y_2 \ll 1$ .

Natomiast z /4.3/ i /3.8a/ wynika, że równanie algebraiczne pozwalające na wyznaczenie parametru  $C_x$  ma postać:

$$C_x^{1/(n+1)} \int_0^1 \{m_1[T_1(x_1, y_2, C_x)]\}^{-1/n} dy_2 - x_1 = 0. \quad /4.4/$$

/c/ Po podstawieniu rozwiązania równania /4.2/ i /4.3/ do /3.6a/, możemy z tego ostatniego wyznaczyć składową prędkości  $v_{x1}$  jako funkcję parametrów  $\partial p_1 / \partial x_1$ ,  $T_1$ ,  $v_{\varphi_1}$ , tzn.:  $v_{x1} = v_{x1}(\partial p_1 / \partial x_1, T_1, v_{\varphi_1})$ .

/d/ Analogicznie z równania /3.6d/ można wyznaczyć składową prędkości  $v_{y1}$ , tzn.:  $v_{y1} = v_{y1}(\partial p_1 / \partial x_1, T_1, v_{\varphi_1})$ . Nakładając na to rozwiązanie warunek /3.8b/, otrzymamy równanie, z którego wyznaczamy wartości ciśnienia  $p_1$  jako funkcji parametrów  $v_{\varphi_1}$  i  $T_1$ . Po podstawieniu tej ostatniej do rozwiązań  $v_{x1}$  i  $v_{y1}$  możemy wyeliminować z nich gradienty ciśnienia  $\partial p_1 / \partial x_1$ .

### 5. Przewidywania rozwiązań analitycznych

Przyjmijmy, że współczynnik konsystencji czynnika smarującego jest wykładniczą funkcją temperatury, tzn.:

$$m_1(T_1) = \exp[-\beta_1(n) T_1] = 1 - \beta_1(n) T_1 + \frac{1}{2!} [-\beta_1(n) T_1]^2 + \dots \quad /5.1/$$

Wyrazy rzędu  $(\beta_1 T_1)^2 / 2!$  są pomijalnie małe, ponieważ  $0 \ll \beta_1 \ll 1$  oraz  $0 \ll T_1 \ll 1$ . Obliczmy pochodną  $dC_x / d\beta_1$  w otoczeniu punktu  $\beta_1 = 0$ .

Otrzymamy wówczas:

$$C_x = C_x|_{\beta_1=0} + \beta_1 \left. \frac{dC_x}{d\beta_1} \right|_{\beta_1=0} + O(\beta_1^2) =$$

$$= x_1^{n+1} - \beta_1 \left[ (f_{c1} + \frac{1}{2} \Delta f) x_1^{n+1} + \frac{1}{12} x_1^{2(n+1)} \right] \frac{n+1}{n} + O(\beta_1^2 / 2!), \quad /5.2/$$

gdzie:  $\Delta f = f_{p1} - f_{c1}$ .

Wykorzystując rozwinięcia /5.1/ i /5.2/, rozwijamy w otoczeniu punktu  $\beta_1 = 0$  funkcję /4.3/ oraz rozwiązanie równania /4.2/. Otrzymane wyniki podstawiamy do rozwiązań  $v_{x1}$ ,  $v_{y1}$ ,  $v_{\varphi_1}$ ,  $p_1$ ,  $T_1$  - omówionych w poprzednim paragrafie - uzyskując w ten sposób funkcje opisujące rozkład wartości prędkości czynnika smarującego:  $v_{x1} = v_{x1}(x_1, y_1)$ ,  $v_{y1} = v_{y1}(x_1, y_1)$ ,  $v_{\varphi_1} = v_{\varphi_1}(x_1, y_1)$ , ciśnienia  $p_1 = p_1(x_1)$  oraz temperatury  $T_1 = T_1(x_1, y_1)$ . Poniżej podajemy pełne rozwiązania tylko dla funkcji  $p_1$  i  $T_1$ , tzn.:

$$p_1(x_1) = (p_{w1} - p_{z1}) \frac{x_1^{n-1} - 1}{s_1^{n-1} - 1} + \frac{3}{20} \tilde{\text{Re}}_n^2 \left[ (x_1^2 - 1) - (s_1^2 - 1) \frac{x_1^{n-1} - 1}{s_1^{n-1} - 1} \right] + p_{z1} +$$

$$- \frac{1}{40} \frac{A_1}{n} \frac{5n-2}{n} \frac{n-1}{s_1^{n-1} - 1} \left[ (x_1^{2n} - 1) - (s_1^{2n} - 1) \frac{x_1^{n-1} - 1}{s_1^{n-1} - 1} \right] \left[ \frac{p_{w1} - p_{z1}}{3} + \frac{1}{20} \tilde{\text{Re}}_n^2 (1 - s_1^2) \right] +$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{60} \frac{\beta_1 \tilde{\text{Re}}}{n}^2 \left\{ 2 \Delta f (1-x_1^2) + \frac{1}{10} \frac{1}{n+3} (1-x_1^{n+3}) - \left[ 2 \Delta f (1-s_1^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{10} \frac{1}{n+3} (1-s_1^{n+3}) \right] \frac{x_1^{n-1}}{s_1^{n-1}} \right\}, \quad \dots \quad /5.3/
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_1(x_1, y_1) = & f_{c1} + \Delta f y_1 + \frac{1}{2} x_1^{n+1} (y_1 - y_1^2) - \frac{1}{2} \beta_1 f_{c1} x_1^{n+1} y_1 (1-y_1) + \\
 & - \frac{1}{12} \frac{\beta_1}{n} \Delta f x_1^{n+1} (y_1 - y_1^2) (1+3n-2y_1) - \frac{1}{24} \frac{\beta_1}{n} x_1^{2(n+1)} (y_1 - y_1^2) \cdot \\
 & \cdot (n - y_1 + y_1^2). \quad /5.4/
 \end{aligned}$$

### 6. Uwagi końcowe

a/ Rozkłady ciśnienia opisane wzorem /5.3/ dla  $p_{z1}=p_{w1}=1$  oraz  $s_1=1/10$  przedstawiono graficznie na rys. 2a i 2b. Łatwo zauważyć, że dla nienewtonowskiego czynnika smarującego, opisanego prawem potęgowym o zmiennej z temperaturą wartości współczynnika konsystencji, wartość ciśnienia wyraźnie maleje w porównaniu z odpowiednimi wartościami ciśnienia dla czynnika o własnościach newtonowskich i stałej wartości współczynnika lepkości. Zmiana ta również na miejsce przy porównaniu wartości ciśnienia z ich odpowiednimi wartościami dla czynnika newtonowskiego o stałej wartości współczynnika konsystencji /spadek ciśnienia jest wywołany przez malenie wartości współczynnika konsystencji ze wzrostem temperatury/.

b/ Nośność  $\tilde{C}_{n\beta}$  łożyska stożkowego można wyznaczyć ze wzoru [1]:

$$\tilde{C}_{n\beta} = p_0 l^2 \left\{ \pi s_1^2 (p_{w1} - p_{z1}) \cos^2 \alpha^* + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (p_1 - p_{z1}) x_1 \cos^2 \alpha^* dx_1 d\varphi \right\}$$

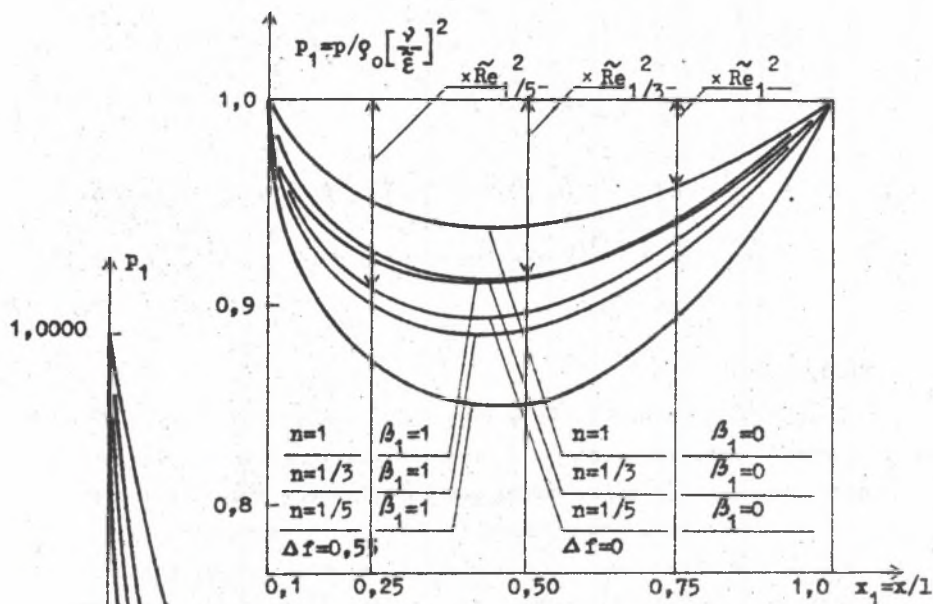
dla  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $s_1 \leq x_1 \leq 1$ ,

/6.1/

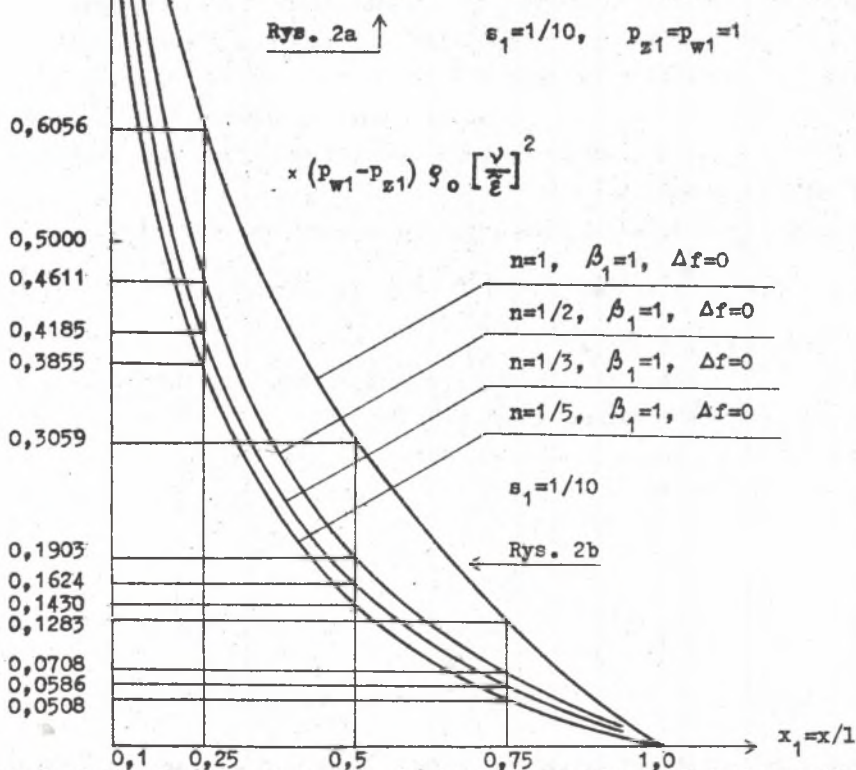
gdzie  $p_0$  jest charakterystyczną wartością ciśnienia. Przyjmując  $p_{z1} = p_{w1} = 1$ , wówczas stosunek spadku nośności  $\tilde{C}_{n\beta}$  dla nienewtonowskiego czynnika smarującego do spadku nośności  $\tilde{C}_{10}$  łożyska dla newtonowskiego czynnika smarującego o stałym współczynniku lepkości można wyrazić w postaci:

$$\frac{\tilde{C}_{n\beta}}{\tilde{C}_{10}} = \left[ \frac{\eta_0}{\eta} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\omega l \cos \alpha^*}{\tilde{m}} \right]^{2-2n} \cdot \frac{\left[ 1 + \frac{2}{n+1} \frac{n-1}{s_1^{n-1}} - \frac{4}{n+1} \frac{s_1^2}{s_1-1} \right]}{\left[ 1 + \frac{1}{\ln s_1} - 2 \frac{s_1^2}{s_1-1} \right]} \left( 1 + \frac{2}{3n} \beta_1 \Delta f \right).$$

Wykres tej ostatniej zależności w funkcji wartości wskaźnika płynięcia przedstawiono na rys. 3.

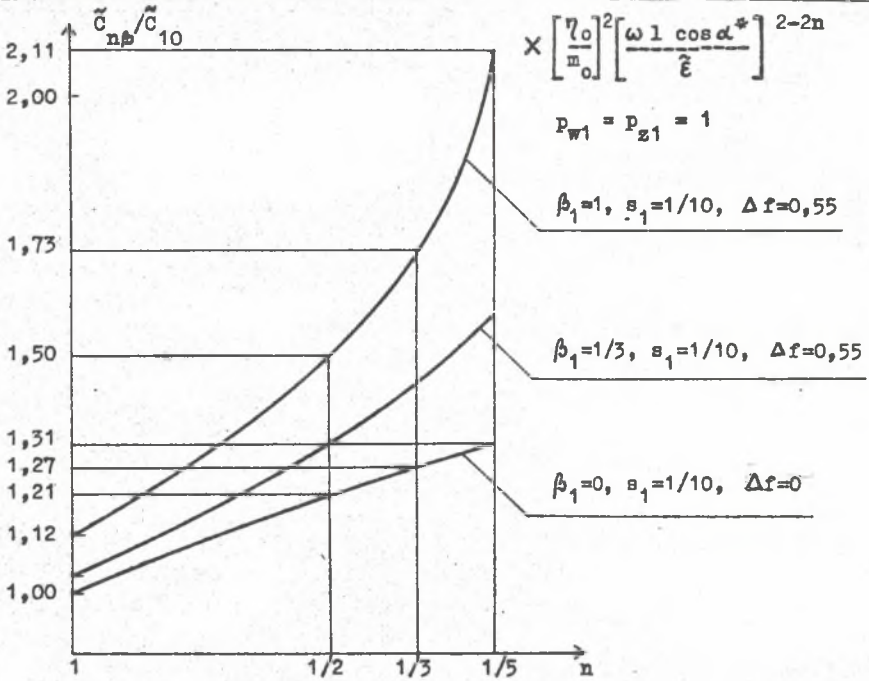


Rys. 2a  $s_1=1/10, p_{z1}=p_{w1}=1$



Rys. 2b

Rys.2 Rozkłady bezwymiarowego ciśnienia w szczelinie łożyska stożkowego



Rys.3 Zmiana stosunku sił nośnych  $\tilde{C}_{np}/\tilde{C}_{10}$  w funkcji wskaźnika płynięcia

### Literatura

- [1] Teipel J.: Zylindrische Gleitlager mit nichtnewtonischen Schmiermitteln. Ing.-Arch., 49,139/1980/.
- [2] Teipel J., Waterstraat A.: Nichtnewtonsche Schmiermittel im Radialgleitlager. Konstruktion, 32,373/1980/.
- [3] Wierzcholski K.: A non-Newtonian ferrofluid flow in the deformable gap of a journal bearing in a magnetic field. Rev.Rom.Sci.Techn. Mech.Appl., 25,319/1980/.
- [4] Nowak Z., Wierzcholski K.: Flow of a non-Newtonian power law lubricant through the conical bearing gap. Acta Mechanica, 50/1984/.
- [5] Pikus M.Ju.: Gidrostatičeskaje smazka vjazkoplastičnymi i vjazkimi židkostjami. Minsk: Vyšejšaja Skola /1981/.
- [6] Astarita G., Marrucci G.: Principles of a non-Newtonian fluid mechanics. London: McGraw-Hill /1974/.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ КОНУСНОГО ПОДШИПНИКА  
С ПОМОЩЬЮ НЕНЬЮТОНОВСКОГО СМАЗОЧНОГО ФАКТОРА

Р е з ю м е

В работе поднята попытка аналитического решения проблемы неизотермического течения неньютоновского смазочного фактора - описываемого реологически полуэмпирической формулой степени - в щели конусного подшипника. В рассуждениях учтена изменчивость коэффициента консистенции смазочного фактора с температурой. Предложена конечная ширина подшипника. Определены распределения скорости, давления, температуры и несущая способность исследованного подшипника. Анализировалось влияние изменчивости коэффициента с температурой, а также указывателя текучести на выше вычисленные полевые значения. Результаты изображены графически на 3 диаграммах.

HYDRODYNAMICAL LUBRICATION THEORY OF CONICAL JOURNAL BEARING  
BY MEANS OF NON-NEWTONIAN LUBRICANT

S u m m a r y

This paper is intended to be an important continuation of a work by the same authors which has been just published in "Acta Mechanica". In that work an attempt was made to study the non-isothermal, non-Newtonian flow of a power law lubricant through the gap of a conical journal bearing. The authors succeeded in omitting the necessity of using numerical procedures, and obtained a relatively simple solution to the problem considered. To receive such a solution, the lubricant consistency was assumed to be independent of temperature.

In the present paper the same problem is considered but the lubricant consistency is assumed to be dependent on temperature according to the exponential formula. Additionally, a finite width of the conical bearing is assumed. Hence, the problem discussed becomes three-dimensional and, therefore, much more complicated. In spite of it, the authors succeeded in obtaining an analytical solution to the problem considered. In conclusion, the pressure and temperature distribution have been found. The results obtained in this paper are graphically illustrated on 3 figures.