ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 88 Nr kol. 807

Grzegorz PAKULA, Jan RDUCH
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych
Politechnika Śląska

ANALIZA PRZEPŁYWU NIEŚCIŚLIWEJ CIECZY NEWTONOWSKIEJ W SZCZELINIE UTWORZONEJ PRZEZ DWIE WSPÓŁOSIOWE, RÓWNOLEGŁE TARCZE WIRUJĄCE ZE STAŁĄ PRĘDKOŚCIĄ

Streszczenie: W pracy przedstawiono dwie metody rozwiązania równań Naviera-Stokesa dla przepływu przez szczelinę między dwiema wirującymi tarczami: metodę analityczną bazującą na rozwinięciu funkcji w szeregi oraz numeryczną metodę różnic skończonych. Dokonano porównania przedstawionych metod.

1. Wstęp

Przepływ cieczy między dwiema równoległymi, współosiowymi tarczami był obiektem wielu prac teoretycznych i doświadczalnych. Rozpatruje się przede wszystkim przepływ laminarny opisany równaniami Naviera-Stokesa. Metody rozwiązania tych równań można podzielić na:
- analityczne,
- analityczno-numeryczne,
- numeryczne.

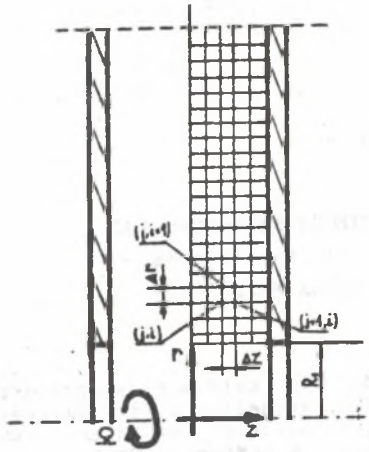
Wyniki na ogół zgadzają się z pomiarami laboratoryjnymi, z wyjątkiem małego obszaru dopływowego.

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrujemy ustalony, odśrodkowy przepływ nieściśliwej cieczy newtonowskiej między dwiema równoległymi, płaskimi i gładkimi tarczami wirującymi ze stałą prędkością kątową Ω.

Dla opisu przyjmujemy walcowy układ współrzędnych r, φ, z jak na rysunku 1. Zakładamy symetrię osiową (w równaniach odrzucamy człony zawierające pochodną względem φ) oraz symetrię względem płaszczyzny $z = 0$. Ponadto przyjmujemy, że $b \ll r_0$. Równania Naviera-Stokesa, opisujące przepływ po dokonaniu analizy rzędu wielkości i opuszczeniu członów małych w porównaniu z pozostałymi, przyjmują postać:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (1)$$



Rys.1. Układ współrzędnych oraz siatka do obliczeń numerycznych.

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \qquad (2)$$

Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (3)$$

Do układu (1),(2),(3) dołączamy warunki brzegowe:

$$u(1,z) = u_0(z),$$
$$v(1,z) = v_0(z),$$
$$u(r,1/2) = w(r,1/2) = w(r,0) = 0,$$
$$v(r,1/2) = r, \qquad (4)$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}(r,0) = \frac{\partial v}{\partial z}(r,0) = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial z}(r,0) = 0$$

Powyższe równania przytoczone są w formie bezwymiarowej. Poszczególne wielkości mają się następująco do swoich wymiarowych odpowiedników oznaczonych gwiazdką:

$u = u_*/\Omega R_1$ - bezwymiarowa prędkość promieniowa,
$v = v_*/\Omega R_1$ - bezwymiarowa prędkość styczna,
$w = w_*/\Omega B$ - bezwymiarowa prędkość osiowa,
$p = p_*/\rho\Omega^2 R_1^2$ - bezwymiarowe ciśnienie,
$r = r_*/R_1$ - bezwymiarowy promień,
$z = z_*/B$ - bezwymiarowa współrzędna przestrzenna,
$Re = \Omega B^2/\nu$ - liczba Reynoldsa,
ρ - gęstość cieczy, ν - lepkość kinematyczna.

Przyjmujemy, że $p(R_1) = const$. Wartość tej stałej nie ma znaczenia, gdyż interesuje nas jedynie przyrost ciśnienia od R_1 do pewnego promienia r. Istnieje szereg metod i sposobów rozwiązania przedstawionych równań ruchu. W pracy zostały przedstawione i porównane: metoda analityczna rozwiązania równań ruchu za pomocą szeregów i metoda numeryczna - metoda różnic skończonych.

3. Rozwiązanie numeryczne

Obszar przepływu pokrywamy siatką punktów, jak na rysunku 1. Stosujemy schemat niejawny. Dla punktów nie leżących na granicy obszaru tworzymy równania różnicowe zastępując pochodne w równaniach (1) - (3) ilorazami różnicowymi pierwszego stopnia. W wyniku otrzymujemy równania dla $1 < j < N$:

$$u_{i+1,j}(u_{i+1,j}-u_{i,j})/(\Delta r)_i - v_{i+1,j}^2/r_{i+1} + w_{i+1,j}(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1})/2(\Delta z)_j =$$

$$= \frac{dp}{dr}\Big|_{i+1} + \frac{1}{Re}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1})/(\Delta z)_j^2. \qquad (5)$$

$$u_{i+1,j}(v_{i+1,j} - v_{i,j})/(\Delta r)_i + (u_{i+1,j}\, v_{i+1,j})/r_{i+1} +$$

$$+ w_{i+1,j}(v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1})/2(\Delta z)_j =$$

$$= \frac{1}{Re}(v_{i+1,j+1} - 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1})/(\Delta z)_j^2 \qquad (6)$$

$$(u_{i+1,j}-u_{i,j})/(\Delta r)_i + \frac{u_{i+1,j}}{r_{i+1}} + (w_{i+1,j+1}-w_{i+1,j-1})/2(\Delta z)_j = 0. \qquad (7)$$

Dla i = 1 oraz i = N obowiązują równania wynikające z warunków brzegowych (4):

$$u_{i+1,N} = 0 \qquad (8)$$

$$v_{i+1+N} = r_{i+1} \qquad (9)$$

$$w_{i+1,N} = 0 \qquad (10)$$

$$w_{i+1,1} = 0 \qquad (11)$$

$$-3u_{i+1,1} + 4u_{i+1,2} - u_{i+1,3} = 0 \qquad (12)$$

$$-3v_{i+1,1} + 4v_{i+1,2} - v_{i+1,3} = 0 \qquad (13)$$

$$w_{i+1,3} - 4w_{i+1,2} + 3w_{i+1,1} = 0 \qquad (14)$$

Równania (5)-(14) tworzą układ 3 N + 1 równań o 3 N + 1 niewiadomych. Znając wartości u, v, w dla i, można w zasadzie wyliczyć u, v, w oraz $\frac{dp}{dv}$ dla i + 1.

Ponieważ jednak równania (5) i (6) są nieliniowe, układ ten byłby kłopotliwy do rozwiązania. Z tego powodu dokonujemy linearyzacji. Stosujemy transformację:

$$\Delta u_j = u_{i+1,j} - u_{i,j},$$

$$\Delta v_j = v_{i+1,j} - v_{i,j} \qquad (15)$$

$$\Delta w_j = w_{i+1,j} - v_{i,j}$$

Podstawiamy (15) do równań (5)-(14) i opuszczamy człony zawierające Δ w

potędze wyższej niż jeden. Są one małe w porównaniu z pozostałymi, jeżeli zastosować odpowiednio mały krok Δr. Po linearyzacji układ równań przyjmuje postać:

$$\Delta u_{i-1}(-w_{i,j}/2(\Delta z)_j - 1/Re\,(\Delta z)_j^2) + \Delta u_j(+u_{i,j}/(\Delta r)_j + 2/Re\,(\Delta z)_j^2) +$$

$$+\Delta u_{j+1}(w_{i,j}/2(\Delta z)_j - 1/Re(\Delta z)_j^2) + \Delta v_j(-2\,v_{i,j}/r_{i+1}) + w$$

$$+\Delta w_j(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})/2\,(\Delta z)_j + \frac{dp}{dr}\Big|_{i+1} = v_{i,j}^2/r_{i+1} -$$

$$- w_{i,j}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})/2\,(\Delta z)_j + (u_{i,j+1} - 2\,u_{i,j} + u_{i,j-1})/Re(\Delta z)_j^2 \quad (16)$$

$$\Delta u_j\, v_{i,j}/r_{i+1} + \Delta v_{j-1}(-w_{i,j}/2\,(\Delta z)_j - 1/Re(\Delta z)_j^2) +$$

$$+\Delta v_j(u_{i,j}/(\Delta v)_j + u_{i,j}/r_{i+1} + 2/Re(\Delta z)_j^2) + \Delta v_{j+1}(w_{i,j}/2\,(\Delta z)_j - 1/Re(\Delta z)_j^2) +$$

$$+\Delta w_j(v_{i,j+1}/2(\Delta r)_i - v_{i,j-1}/2\,(\Delta z)_j) = -u_{i,j}\,v_{i,j}/r_{i+1} -$$

$$- w_{i,j}(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})/2\,(\Delta z)_j + (v_{i,j+1} - 2\,v_{i,j} + v_{i,j-1})/Re(\Delta z)_j^2 \quad (17)$$

$$\Delta u_j\,(1/(\Delta r)_i + 1/r_{i+1}) + \Delta w_{j+1}/2\,(\Delta z)_j - \Delta w_{j-1}/2\,(\Delta z)_j =$$

$$= -u_{i,j}/r_{i+1} - w_{i,j+1}/2(\Delta z)_j + w_{i,j-1}/2(\Delta z)_j. \quad (18)$$

$$\Delta u_N = -u_{i,N}, \quad (19)$$

$$\Delta v_N = (\Delta r)_i, \quad (20)$$

$$\Delta w_N = -w_{i,N}, \quad (21)$$

$$-3\Delta u_1 + 4\Delta u_2 - \Delta u_3 = 3\,u_{i,1} - 4\,u_{i,2} + u_{i,3}, \quad (22)$$

$$-3\Delta v_1 + 4\Delta v_2 - \Delta v_3 = 3\,v_{i,1} - 4\,v_{i,2} + v_{i,3}, \quad (23)$$

$$\Delta w_1 = -w_{i,1}, \quad (24)$$

$$\Delta w_3 - 4\Delta w_2 + 3\Delta w_1 = -w_{i,N-2} + 4\,w_{i,N-1} - 3\,w_N \quad (25)$$

Równania (16)-(25) tworzą układ 3 N+1 liniowych, niezależnych równań o 3 N+1 niewiadomych ($\Delta u, \Delta w, \Delta v, \frac{dp}{dr}$).

Znając wartości prędkości dla promienia i, możemy wyliczyć przyrosty, a

tym samym prędkości dla promienia i+1 oraz pochodną ciśnienia. Przedstawiony schemat rozwiązania za pomocą różnic skończonych K.E.Boyd i W.Rice [2] zastosowali dla przypadku przepływu dośrodkowego.

4. Rozwiązanie analityczne za pomocą szeregów

W celu rozwiązania równań ruchu (1)-(3) określono funkcję prądu Ψ spełniającą równanie ciągłości:

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad w = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{26}$$

Rozwiązania poszukuje się wtedy w postaci szeregów:

$$\Psi = r^2 f_{-1}(z) + r f_0(z) + f_1(z) + \frac{1}{r} f_2(z) + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} f_n(z) + \ldots, \tag{27}$$

$$v = r g_{-1}(z) + g_0(z) + \frac{1}{r} g_1(z) + \frac{1}{r^2} g_2(z) + \ldots \frac{1}{r^n} g_n(z) + \ldots, \tag{28}$$

$$p = r^2 h_{-2}(z) + r h_{-1}(z) + h(z) + h_0 \ln(r) + \frac{1}{r} h_1(z) + \ldots + \frac{1}{r^n} h(z) + \ldots \tag{29}$$

oraz na podstawie (26):

$$u = r f'_{-1}(z) + f'_0(z) + \frac{1}{r} f'_1(z) + \ldots + \frac{1}{r^n} f'_n(z), \tag{30}$$

$$w = -2 f_{-1}(z) - \frac{1}{r} f_0(z) + \frac{1}{r^3} f_2(z) + \ldots + (n-1)\frac{1}{r^{(n+1)}} f_n(z) + \ldots \tag{31}$$

Równania te rozpatruje się przy następujących warunkach brzegowych:

$$\begin{aligned} u(r, \pm 1/2) &= 0 \\ v(r, \pm 1/2) &= r \\ w(r, \pm 1/2) &= 0 \\ \int_{-1/2}^{+1/2} u(r,z)\,dz &= U \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie:

U - stała, reprezentująca bezwymiarowe natężenie przepływu.

Wstawiając (28), (29), (30) i (31) do równań ruchu (1), (2) i (3), uwzględniając kolejne wyrazy szeregów otrzymamy:

$$\begin{aligned} f'^2_{-1} - 2 f_{-1} f''_{-1} - g^2_{-1} &= -2 h_{-2} + f''_{-1} \\ 2 f'_{-1} g_{-1} - 2 f_{-1} g'_{-1} &= g''_{-1} \\ 0 &= h'_{-2} \end{aligned} \tag{33}$$

$$-2 f_0'' f_{-1} + f_0' f_{-1}' - f_0 f_{-1}'' - 2 g_0 g_{-1} = -h_{1-} + f_0'''$$

$$-2 f_{-1} g_0' + 2 f_0' g_{-1} - f_0 g_{-1}' + g_0 f_{-1}' = g_0'' \qquad (34)$$

$$0 = h_{-1}'$$

itd.

Wykorzystując warunki brzegowe (32) oraz utworzone według wyżej pokazanego schematu kolejne układy równań można określić funkcje $f_n(z)$, $g_n(z)$, $h_n(z)$ w zależności od parametrów rozwiązania: liczby Reynoldsa Re i stałej U. Pełny schemat rozwiązania analitycznego za pomocą szeregów można znaleźć w pracy [6].

5. Własności przedstawionych metod

Metoda analityczna jest metodą przybliżoną z uwagi na skończoną liczbę wyrazów przyjmowanych do obliczeń. Metoda ta ma tę własność, że już na promieniu wejściowym szczeliny R_1 otrzymujemy w wyniku obliczeń pewien rozkład prędkości, który nie jest zgodny z wynikami badań doświadczalnych [4],[5]. Dopiero dla promienia $r > (1,1 \div 1,2)\ R_1$ ([1],[3],[7]) wyniki obliczeń są porównywalne z wynikami badań, zwłaszcza dla małych przepływów. Konkretna realizacja tej metody wymaga użycia maszyny cyfrowej. Uruchomienie programu nie stwarza jednak żadnych trudności. Czasy obliczeń numerycznych są krótkie, co ma istotne znaczenie przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego - zagadnienia syntezy przepływu.

Metoda numeryczna jest również metodą przybliżoną między innymi dlatego, że dokonano linearyzacji wejściowych równań. Umożliwia jednak:
- zadawanie profilu prędkości na krawędzi dopływowej R_1,
- stosowanie w szerszym zakresie przepływów, dla przepływów, kiedy rozwiązania analityczne nie są porównywalne z wynikami badań.

Metody numeryczne potrzebują dużych pamięci maszyn cyfrowych oraz długich czasów obliczeń. Przedstawiony sposób linearyzacji oraz zastosowana metoda rozwiązywania układu równań liniowych pozwoliły na zmniejszenie zajmowanej przez program pamięci. Uruchomienie programu jest trudne i pracochłonne. Wymaga przede wszystkim ustalenia wielkości siatki (kroków Δr, Δz). Zwłaszcza istotne jest prawidłowe określenie kroku Δr. W uruchomianym programie zagadnienie to rozwiązuje się przez badanie ciągłości przepływu i taki dobór Δr, aby ciągłość przepływu była zachowana.

6. Uwagi końcowe

Przedstawiona numeryczna metoda analizy przepływu będzie ostatecznie zastosowana do analizy przepływów laminarnych przez szczeliny o różnej postaci geometrycznej (zbieżne, niesymetryczne itp.), gdzie zastosowanie

metod analitycznych nie zawsze jest możliwe.

Aktualnie prowadzone są prace związane z uruchomieniem, optymalizacją i badaniem programu obliczania przepływu metodą numeryczną.

Zaprezentowana metoda analityczna wykorzystywana jest do weryfikacji metody numerycznej.

LITERATURA

[1] Białyj B.N., Tokar I.Ja., Dincin W.A., Kulikow G.S.; Rasčetnyje charakteristiki diskovych nasosov trenija, Viestniki Mašinostrojenija, nr 9, 1971.

[2] Boyd K.E., Rice W.: Laminar inward flow of an incompressible fluid between rotating disks with full peripheral admission, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1968.

[3] Köhler M.: Die Strömung zwischen zwei parallelen, rotierenden Scheiben, Acta Mechanica 12, 1971.

[4] Murata S., Miyake Y. and Lemoto Y.: A study on a disk friction pump (ist report, Theoretical analysis for flow between corotating disk), Bull.JSME, vol.19, nr 128, 1976.

[5] Murata S., Miyake Y., Iemoto Y., Akazawa H., Sagawa S., Fujita H., Yamaji C.: A study on a disk friction pump (2nd report, Experiments on flow trough corotating disks and pump performance), Bull.JSME, vol.19, nr 136, 1976.

[6] Peube I.L., Kreith F.: Ecoulement permanent d'un fluide visquex incompressible entre deux desques paralléles en rotation, Journ.de Mechanique, vol.5, nr 2, 1966.

[7] Sawatzki O., Köhler M.: Untersuchungen an einer Reibungspumpe, Maschinenmarkt 76, 1970.

РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

Р е з ю м е

В работе рассматривается течение ньютоновской жидкости между двумя вращающимися дисками. Представлены и сравнены методы решения уравнений Навье-Стокса: аналитический и нумеричный.

LAMINAR OUTWARD FLOW OF AN INCOPRESSIBLE FLUID BETWEEN TWO ROTATING DISKS

S u m m a r y

The flow of a Newtonian fluid in a gap between two coaxial, smooth, rotating disks has been considered. Two methods of solving the Navier-Stokes equations has been presented and compared.