ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
seria: ENERGETYKA z. 88 Nr kol. 807

Kazimierz RUP
Instytut Aparatury Przemysłowej i Energetyki
Politechnika Krakowska

PŁASKI PRZEPŁYW CIECZY RIVLINA-ERIKSENA W OBSZARZE WLOTOWYM

Streszczenie: W pracy podjęto próbę zastosowania rozszerzonej teorii warstwy przyściennej Prandtla, słusznej dla wybranych modeli cieczy lepkosprężystych, do badania izotermicznego, płaskiego przepływu cieczy Rivlina-Eriksena rzędu II w obszarze wlotowym. Cały ten obszar podzielono na dwa podobszary, w których wyznaczono rozkłady prędkości, ciśnienia i pierwszej różnicy naprężeń normalnych.

1. Wstęp

Rozwój nowych syntetycznych cieczy, zwłaszcza tych, które wykazują własności lepkosprężyste, wymaga rozwiązania skomplikowanych zagadnień przepływu lub opływu. W większości prac do opisu własności reologicznych wspomnianych cieczy stosuje się równania konstytutywne charakterystyczne dla modelu cieczy Rivlina-Eriksena [1, 2, 3]. W pracach [4, 5] uogólniono słuszność teorii warstwy przyściennej Prandtla również na zagadnienia przepływowe omawianych cieczy lepkosprężystych.

W niniejszej pracy wykorzystano tę rozszerzoną teorię warstwy przyściennej do analizy płaskiego, izotermicznego i laminarnego przepływu w obszarze wlotowym, lepkosprężystej cieczy opisanej zależnością (1).

Ze względu na znaczną złożoność rozważanego zagadnienia posłużono się w celu wyznaczenia rozwiązania analityczną metodą przybliżoną typu Karmana-Pohlhausena. Zgodnie z ideą zastosowanej metody cały obszar wlotu został podzielony na dwa podobszary. Podobszar pierwszy ograniczony jest z lewej strony powierzchnią przekroju wlotowego, natomiast z prawej powierzchnią przekroju, w której grubość warstwy przyściennej osiągnie połowę odległości pomiędzy płytami tworzącymi płaski kanał przepływowy. W podobszarze drugim pojęcie grubości warstwy przyściennej traci sens, ale pole prędkości jest w tym podobszarze nieuformowane. Charakterystyczny w rozważaniach jest fakt, że pole prędkości w obu podobszarach opisuje się za pomocą dwu różnych funkcji przybliżających.

W szczególnym przypadku cieczy newtonowskiej /$\beta_2=0$/ otrzymane wyniki dla obliczonego spadku ciśnienia porównano z wynikami badań doświadczalnych [6]. Na podstawie analizy porównawczej stwierdza się duży stopień zgodności otrzymanych wyników.

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy laminarny, ustalony przepływ nieściśliwej cieczy typu Rivlina-Eriksena w obszarze wlotowym płaskiego kanału utworzonego z dwu szerokich płyt położonych w odległości 2h.

Opisane zagadnienie rozwiązane zostanie przy następujących założeniach:

1/ przepływ cieczy charakteryzuje się osiową symetrią,

2/ nie występuje poślizg na ściankach przewodu,

3/ pomijamy wpływ sił masowych jako małych w porównaniu z oddziaływaniem sił ciśnienia i sił bezwładności,

4/ wskutek tarcia wewnętrznego tworzą się na obu ściankach przewodu przepływowego warstwy przyścienne, które posiadają podobny przebieg jak w przypadku wzdłużnie opływanej płaskiej płyty.

Własności reologiczne analizowanej cieczy lepkosprężystej opisywać będziemy w kartezjańskim układzie odniesienia za pomocą zależności [1, 2, 3, 4]:

$$S = -pI + \eta_0 A_1 + \beta_0 A_2 \qquad /1/$$

gdzie: S - tensor naprężeń,

A_1, A_2 - kinematyczne tensory Rivlina-Eriksena,

I - tensor jednostkowy rzędu drugiego,

η_0, β_0 - stałe materiałowe.

Podobnie jak w [3] założono w równaniu (1) warunek dla stałych materiałowych w postaci $\eta_0 > 0$, $\beta_0 \geq 0$. Uwzględniając następnie założenia 1-4 oraz klasyczne założenia teorii warstwy przyściennej, jak również przyjmując

$$\nu = \frac{\eta_0}{\varrho} = 0/\delta^2/ \quad \text{i} \quad \beta = \frac{\beta_0}{\varrho} = 0/\delta^2/,$$

otrzymamy, wychodząc z ogólnych równań ruchu analizowanej cieczy, następujące równania warstwy przyściennej:

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_2} + \beta\left[v_1\frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} + v_2\frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + O(\delta) \qquad /2/$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = O(\delta) \qquad /3/$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \qquad /4/$$

Warunki graniczne mają postać:

$$x_2 = 0 \ ; \quad v_1 = v_2 = 0$$

$$x_2 = 0 \ ; \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_2} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad /5/$$

$$x_2 = h \ ; \quad v_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$$

3. Rozwiązanie problemu

Całkując równanie /2/ w obszarze warstwy przyściennej oraz uwzględniając równanie ciągłości /4/ otrzymamy:

$$\frac{d\delta_1^{**}}{dx} + \left(2\delta_1^{**} + \delta_1^{*}\right)\frac{1}{U_1}\frac{dU_1}{dx} = \frac{\nu}{U_1 h^2 \delta_1}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} + \frac{\nu}{U_1 h}\Gamma$$

$$- \frac{2\beta}{U_1 h^2 \delta_1}\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x}(U_1\bar{u})\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \delta_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_1}{\delta_1}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)\right] d\eta \qquad /6/$$

W równaniu /6/ oznaczają:

$\eta = \frac{x_2}{\delta}$, $\bar{u} = \frac{u}{U_1}$, $x = x_1$, U_1 – prędkość w obszarze na zewnątrz warstwy przyściennej, $\delta_1 = \frac{\delta}{h}$, $\delta_1^{**} = \delta_1 \int_0^1 \bar{u}(1-\bar{u})d\eta$, $\delta_1^{*} = \delta_1 \int_0^1 (1-\bar{u})d\eta$.

Pole prędkości aproksymować będziemy następującymi wielomianami:

$$\bar{u} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda}{6}\left(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4\right) + \frac{\Gamma}{2}\left(\eta^2 - 2\eta^3 + \eta^4\right) \qquad /7/$$

gdzie: $\lambda = \frac{\delta_1^2 h^2}{\nu}\frac{dU_1}{dx} - \frac{\beta}{\nu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial \eta}\Big|_{\eta=0}$, $\Gamma = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\Big|_{\eta=1}$ /8/

Równanie /6/ oraz zależność /7/ słuszne są w obu rozważanych podobszarach. Należy tylko zaznaczyć, że w podobszarze pierwszym $\Gamma \equiv 0$, a w drugim $\delta_1 \equiv 1$. Podstawiając odpowiednio zależność /7/ do /6/, następnie całkując to ostatnie po zmiennej η otrzymujemy dla każdego podobszaru po dwa sprzężone, nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne. Równania te zostały scałkowane w sposób numeryczny za pomocą metody GEAR na maszynie cyfrowej CYBER 72. W celu uogólnienia dalszych rozważań wprowadzono do /6/ następujące wyrażenia bezwymiarowe:

$$Re = \frac{U_0 2h}{\nu}, \quad We = Re\,\frac{\beta}{h^2}, \quad \xi = \frac{x_1}{h \cdot Re} \qquad /9/$$

Liczba Weissenberga We stanowi stosunek sił sprężystości do sił lepkości. W przypadku szczególnym przepływu cieczy newtonowskiej /$\beta_0 = 0$/ wartości początkowe / startowe/ dla całkowania numerycznego wynosiły: $\xi = 0{,}0001$, $\delta_1 = 0{,}02$, $\lambda = 0{,}017$. W ogólnym przypadku /$\beta_0 \neq 0$/ wartości te były zależne od wartości stosunku We/Re. Uzyskane wyniki końcowe dla pierwszego podobszaru stanowiły wartości początkowe dla zmiennych całkowania w podobszarze drugim. Dla zmiennej Γ przyjmowano w drugim podobszarze zerowy warunek początkowy.

W tablicy 1 przedstawiono długości odcinków wlotowych dla kilku wybranych wartości stosunku We/Re. Ponadto posłużono się tutaj następującymi kryteriami oceny omawianych długości odcinków wlotowych:

a/ osiągnięcie prędkości przepływu w osi przewodu równej 99% prędkości dla uformowanego parabolicznego przepływu,

b/ osiągnięcie wartości iloczynu $c_f Re/4$ równej 99% odpowiedniej wartości dla uformowanego przepływu, c/ osiągnięcie charakterystycznych wartości w obszarze drugim przez wielkości Γ i λ, a mianowicie: Γ =-2,0000 i λ = 0,0000.

Rozwiązanie ścisłe dla przypadku w pełni uformowanego przepływu laminarnego otrzymany podstawiając wymienione w punkcie c/ wartości do /7/.

Tablica 1

We/Re	ξ - Le		
	a	b	c
0,0000	0,1199	0,1499	0,3409
0,0010	0,1203	0,1503	0,3413
0,0100	0,1263	0,1098	0,3473
0,0600	0,1360	0,1200	0,3570
0,1000	0,1386	0,1221	0,3596

Spadek ciśnienia po długości przepływu wyznaczano z zależności:

$$\frac{p_o - p}{\frac{1}{2}\rho U_o^2} = \left(\frac{U_1}{U_o}\right)^2 - 1 \qquad /10/$$

i odpowiednio w podobszarze drugim

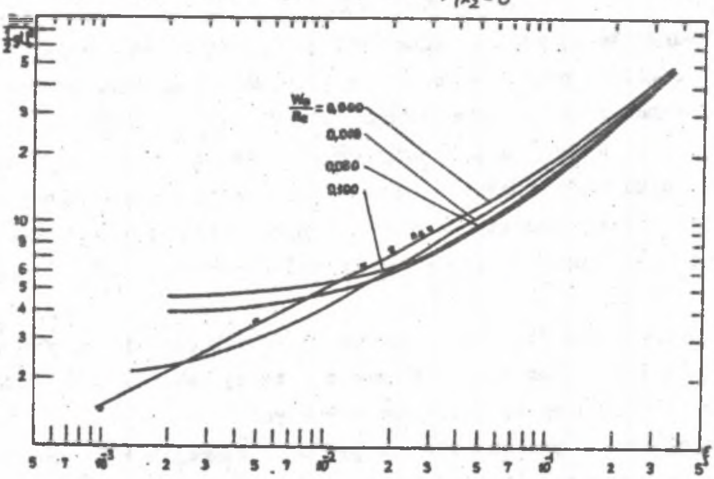
$$\frac{p_o - p}{\frac{1}{2}\rho U_o^2} = \frac{p_o - p}{\frac{1}{2}\rho U_o^2}\Big|_{\xi=\xi_o} + (\xi - \xi_o)\frac{dp^*}{d\xi} \qquad /11/$$

W celu wyznaczenia współczynnika strat tarcia wykorzystano następującą zależność:

$$\frac{c_f}{Re} = \frac{\tau_w}{\rho U_1^2} = \frac{\nu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\Big|_{x_2=0}}{U_1^2} \qquad /12/$$

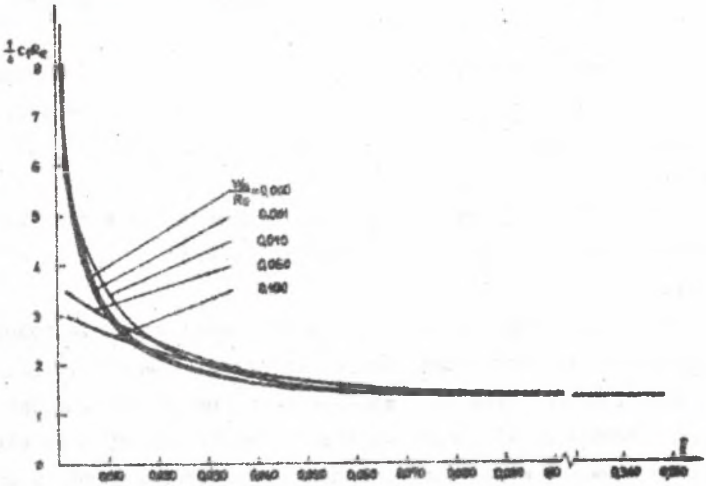
Wychodząc z równania /1/ określono w rozważanym przypadku przepływu pierwszą różnicę naprężeń normalnych, która na ściankach wynosi:

$$t_{11} - t_{22} = t_{xx} - t_{yy} = 2\beta_o\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\Big|_{x_2=0} \qquad /13/$$

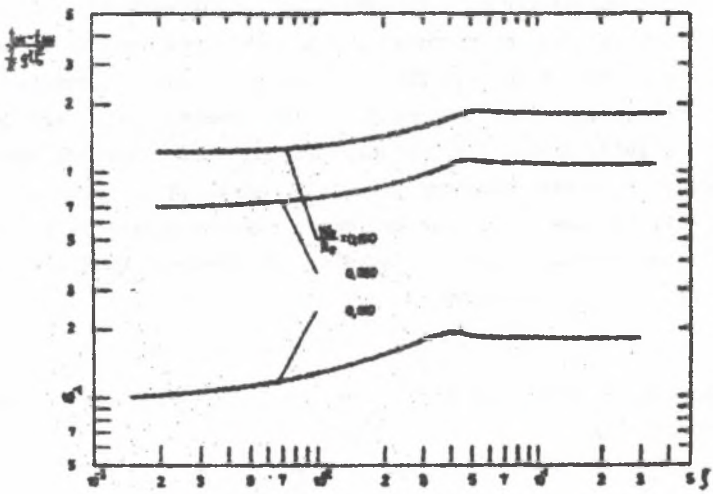


Rys. 1 Spadek ciśnienia w obszarze wlotowym w zależności od stosunku liczb We/Re. ✱ - dane doświadczalne dla cieczy newtonowskiej.

Otrzymane rezultaty końcowe dla kilku wybranych wartości parametru We/Re przedstawiono w sposób graficzny na rysunkach 1, 2, 3.



Rys. 2 Krzywe współczynnika strat tarcia w obszarze wlotowym dla wybranych wartości parametru We/Re.



Rys. 3 Przebieg zmian pierwszej różnicy naprężeń normalnych wzdłuż ścianki kanału przepływowego.

4. Wnioski końcowe

Przytoczona analiza płaskiego przepływu cieczy Rivlina-Eriksena /1/ w obszarze wlotowym pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

- W poczatkowej części podobszaru pierwszego własności sprężyste cieczy mają zasadniczy wpływ na formowanie się warstwy przyściennej, a więc i na pole prędkości. Tę część obszaru przepływu określa się w literaturze por. ang. „Region of elastic solid-like behavior" [5].
- Opisane własności przepływu pozwalają wyjaśnić fakt istnienia skończonej, ale różnej od zera wartości grubości warstwy przyściennej w przekroju wlotowym. Grubość warstwy przyściennej w tym przekroju zależy od stosunku liczb We/Re.
- W przypadku cieczy /1/ zaobserwowano znaczne wydłużanie się odcinka wlotowego, w tym zarówno podobszaru I, jak również II wraz ze wzrostem parametru We/Re.
- Całkowita długość hydrodynamicznego odcinka wlotowego wykazuje podobne tendencje zmian dla wszystkich przytoczonych kryteriów oceny /Tablica 1/.
- Własności lepkosprężyste płynu mają znaczny wpływ na przebieg zmian iloczynu $c_f Re/4$. Odchylenia od przypadku cieczy newtonowskiej dają się szczególnie łatwo zauważyć w sąsiedztwie przekroju wlotowego, gdzie omawiany iloczyn przyjmuje wartości skończone zależne od parametru We/Re.
- Znaczacy wpływ parametru We/Re zaobserwowano również na przebieg strat ciśnienia / Rys. 1 / opisanych zależnościami /10/ i /11/. Uwidacznia się to zwłaszcza dla małych wartości bezwymiarowej współrzędnej ξ / $\xi < 0,1$ /.
- Wartości pierwszej różnicy naprężeń normalnych określonej na ściankach przewodu przepływowego wzrastają liniowo wraz ze wzrostem parametru We/Re. Ponadto dla ustalonej wartości parametru We/Re obserwuje się narastanie wartości tej różnicy naprężeń w kierunku przepływu aż do osiągnięcia granicy podobszarów, po czym widoczny jest jej spadek / Rys. 3/.
- Z rysunków 1, 2 można łatwo zauważyć asymptotyczną zbieżność otrzymanych rezultatów do odpowiednich dla przypadku cieczy newtonowskiej, gdy przepływ staje się w pełni uformowany.

Literatura

[1] Schowalter, W. R., Mechanics of Non-Newtonian Fluids, Academic Press / New York 1980 /.

[2] Tiu, C., K.L. Tan, Rheol. Acta, 16, 497 /1977/.

[3] Dunwoody, J., Journal of Rheology, 27/4/, 373 /1983/.

[4] Beard, D.W., K. Walters, Proc. Camb. Phil. Soc., 60, 667 /1964/.

[5] White, J.L., A.B. Metzner, AJChE Journal, 11, 324 /1965/.

[6] Žukauskas, A., J. Ziugzda, Heat Transfer in Laminar Flow of Fluid, Mintis / Vilnus 1969 /.

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ РИВЛИНА-ЭРИКСЕНА В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Р е з ю м е

В настоящей работе приведено теоретический анализ стационарного ламинарного движения несжимаемой жидкости Ривлина-Эриксена второго ранга в начальном участке параллельных пластин.

Основываясь на теории пограничного слоя расширеной для случая вискоэластической жидкости, решено систему уравнений для этого пограничного слоя используя интегральный метод Кармана Польгаузена. С помощью этого метода получено распределение скоростей, падение давления, зависимость для коэффициента сопротивления трения и первой разницы нормальных напряжении в начальном учатске плоского канала. Определено тоже длину начального участка.

Сопоставления этих результатов с расчетами для ньютоновской жидкости указывают на существенное влияние вискоэластических свойств жидкости на полученные результаты.

ENTRANCE REGION OF VISCOELASTIC FLUID IN A CHANNEL

S u m m a r y

The laminar, isothermal entrance region flow of viscoelastic fluid in a channel formed by two parallel flat plates has been studied by using momentum integral method and the boundary-layer equations for the Rivlin-Eriksen fluid.

It has been found that viscoelasticity changes the magnituje of the total entrance length depending on the relative magnitudes of elastic and viscous forces, or the ration of Weissenberg to Reynolds numbers. It has been also shown that the main effect of viscoelasticity causes the increase of the normal stress on the solid boundary and increases the pressure drop in the inlet region.