

Jerzy M. SĄWICKI

Wydział Hydrotechniki  
Politechnika Gdańska

## MARYS KONCEPCJI KONWENCYJNEGO MODELU BURZLIWOCI

Streszczenie: W pracy zaproponowano model turbulencji, w którym współrzędne tensora naprężeń burzliwych wyrażono poprzez algebraiczną kombinację składowych wektora prędkości średniej. Poniżej przykład zastosowania modelu.

## 1. Wstęp.

Jednym z podstawowych celów teorii ruchu burzliwego jest sformułowanie zamkniętego układu równań, którego rozwiązanie z akceptowaną przez użytkownika dokładnością opisywałoby interesujące go zjawiska. Realizacji tego celu służą różnorodne modele turbulencji. Ich wspólnym punktem wyjścia jest rozdzielenie rzeczywistego pola prędkości i ciśnienia na dwie części - średnią i pulsacyjną. Pozwala to zapisać równania zachowania masy i pędu w postaci znanych równań Reynoldsa:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad /i, j = x, y, z/ \quad /1/$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u_i' u_j'}) \quad /2/$$

gdzie:  $u_i$  - składowe prędkości średniej,  $u_i'$  - składowe prędkości pulsacyjnej,  $p$  - ciśnienie średnie,  $\rho$  - gęstość cieczy,  $\nu$  - kinematyczny współczynnik lepkości,  $t$  - czas,  $x_i$  - współrzędne przestrzenne.

Występujące w równaniu /2/ człony :

$$(\tau_t)_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \quad /3/$$

interpretowane są jako współrzędne tensora naprężeń burzliwych. Współrzędne te są nieznanne, toteż równania /1,2/ nie tworzą układu zamkniętego. Sposób jego zamknięcia jest wyróżnikiem konkretnych modeli turbulencji. Literatura zagadnienia prezentuje cały ich szereg. Bardzo pogłębony i trafny przegląd modeli turbulencji znaleźć można np. w pracy [1].

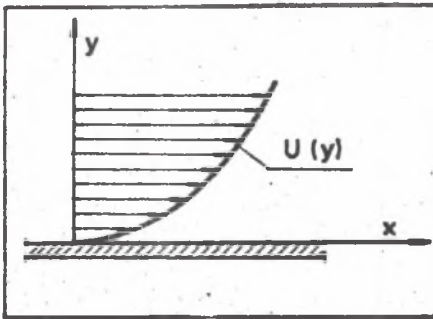
Istniejące modele podzielić można w zasadzie na dwie główne klasy. Pierwsza z nich /modele bezpośrednie/ oparta jest na idei Boussinesqa, wprowadzającej pojęcie lepkości burzliwej. Dla prostego przepływu jednowymiarowego wzdłuż ścianki /rys.1/ mamy :

$$\tau_{yx} = \mu_t \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad /4/$$

Do grupy tej należy np. klasyczny model Prandtla /z 1925 roku/, w którym przyjęto :

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \quad /l - \text{"droga mieszania"/} \quad /5/$$

Druga klasa /modele pośrednie/ cechuje się istnieniem dodatkowych róż-



rys.1.

..niczkowych równań transportu /analogicznych do równania 2/, których rozwiązanie określa tensor /3/. Są tu zarówno modele oparte na koncepcji lepkości turbulentnej, jak np. drugi model Prandtla /z 1945 roku/ :

$$\mu_t = \rho \sqrt{k} l \quad /6/$$

jak też nie posługujące się tym pojęciem - przykładowo model wg Bradshawa:

$$\tau \approx \rho k \quad /7/$$

Symbol "k" w równaniach /6/ i /7/ oznacza kinetyczną energię turbulencji. Jest ona wyznaczana z osobnego równania transportu.

Z innego punktu widzenia można istniejące modele podzielić na grupę modeli dyfuzyjnych /wykorzystujących koncepcję lepkości burzliwej, opartą na analogii między molekularną a turbulentną wymianą pędu/ oraz grupę modeli "różniczkowych" /w których dodatkowe naprężenia turbulentne wyznaczane są z różniczkowych równań transportu/.

Sformułowane dotychczas modele pozwoliły na rozwiązanie wielu problemów [1,4]. Posiadają one jednak szereg słabych punktów. Grupa bezpośrednich modeli dyfuzyjnych, choć prosta w stosowaniu, nie nadaje się np. do opisu przepływów z recyrkulacją. Ponadto przy bliższej analizie wykazuje pewną wewnętrzną sprzeczność - zgodnie z równaniami /4,5/ naprężenia turbulentne powinny maleć ze wzrostem odległości od ścianki /bowiem maleje wtedy gradient prędkości średniej - rys.1/, podczas gdy eksperyment wskazuje na tendencję odwrotną [3]. W modelach konkretnych rozbieżność tę kompensuje się przez wprowadzenie funkcji /np.  $l = \kappa y$  wg Prandtla/ rosnącej wraz z "y" szybciej, niż maleje gradient prędkości, lecz wątpliwości logiczne pozostają. Wydaje się, że jest to efektem zastosowania nie w pełni przekonującej analogii między "chaosem molekularnym" a "chaosem turbulentnym" /problem ten jest sygnalizowany np. w pracy [4] /.

Z kolei pośrednie modele "różniczkowe" poprzez zwiększenie układu równań powodują poważny wzrost pracochłonności przy ich rozwiązywaniu /jako skrajny przykład można tu podać model Kolavandina [1], który dla płaskiej warstwy przyściennej składa się z 20 równań różniczkowych/, a ponadto i tak nie rozwiązują kwestii zamykania układu, wykorzystując różne hipotezy empiryczne [1].

Reasumując powyższe uwagi, można uznać celowość prowadzenia dalszych prac nad konstruowaniem nowych modeli turbulencji. Niniejsza praca jest poświęcona przedstawieniu ogólnej koncepcji pewnego nowego modelu.

2. Koncepcja konwekcyjnego modelu turbulencji.

Ruch burzliwy traktować można jako przepływ płynu /substancji płynnej i ciągłej/, opisany przez pole uśrednionych prędkości i ciśnień.

Bardzo poglądowy jest tu formalny punkt widzenia - uśrednione parametry mogą być traktowane jako pewne przybliżenie odpowiednich rozwiązań równań Naviera-Stokesa. Parametry te wstawione do równań powodują więc pojawienie się pewnej odchyłki. Aby kontrolować tę odchyłkę, do równań Naviera-Stokesa, wprowadza się pewien człon dodatkowy, co prowadzi do równań /1,2/. Pozostając w dalszym ciągu przy ujęciu formalnym można wobec struktury równania zachowania pędu stwierdzić, że ten człon dodatkowy może stanowić korektę albo "lepkościowego", albo konwekcyjnego członu równań Naviera-Stokesa, /bądź ich obu jednocześnie/. W dotychczas sformułowanych modelach stosuje się korektę członu lepkościowego. Tymczasem naprężenia turbulentne powstają wskutek procesów o charakterze właśnie konwekcyjnym [2]. Sugeruje to inne podejście do zagadnienia i stanowi pierwszą przesłankę prezentowanego modelu.

Drugą przesłanką wynika z powszechnie chyba akceptowanego stwierdzenia [3,4], że burzliwość jest własnością ruchu, a nie substancji. Można więc napisać :

$$\bar{u}^r = \bar{F} \bar{u} = \bar{G} \bar{u} \quad /8/$$

gdzie  $\bar{u}^r$  - prędkość pulsacyjna,  $\bar{u}$  - prędkość rzeczywista,  $\bar{u}$  - prędkość średnia,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  - pewne afinory, transformujące wektory prędkości rzeczywistej lub średniej w wektor prędkości pulsacyjnej.

Trzecia wreszcie przesłanka wiąże się ze wzorem Darcy-Weisbacha, który pozwala napisać [3] / $\lambda$  - współczynnik oporu wg Nikuradse'go/ :

$$\tau = \lambda \frac{\rho u^2}{8} \quad /9/$$

Zależność /9/ traktowana jest jako relacja empiryczna. Tymczasem jej przydatność w hydraulice nasuwa wniosek, że powinna być ona pomocna przy konstruowaniu modeli turbulencji.

Powyższe przesłanki pozwoliły sformułować hipotezę, że współrzędne tensora naprężeń burzliwych /3/ mogą być przedstawione jako funkcje składowych wektora prędkości średniej :

$$(\tau_t)_{ij} = -\rho \bar{u}_i^r \bar{u}_j^r = f_{ij}(u_k) \quad /i,j,k = x,y,z/ \quad /10/$$

Wykorzystując zasadę różniczkowania funkcji złożonej /10/ można teraz równanie /2/ przepisać w postaci :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + g_k^{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x_j} = f_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \Delta u_k \quad /11/$$

Symbole " $f_{ij}$ " oraz " $g_k^{ij}$ " oznaczają pewne, chwilowo nieokreślone, funkcje.

Porównanie zależności /11/ z równaniami Naviera-Stokesa pozwala stwierdzić, że różnią się one postacią członu konwekcyjnego /stąd nazwa modelu/. Układ /1,11/ jest ogólną postacią konwekcyjnego modelu turbulencji.

Dla sformułowania szczegółowej wersji modelu należy wyznaczyć postać funkcji " $f_{ij}$ " /równanie 10/. Do dalszych rozważań przyjęto :

$$f_{ij} = g A_{ij}^{kl} u_k u_l \quad /12/$$

gdzie  $A_{ij}^{kl}$  mają charakter stałych mnożników. Przy takim założeniu otrzymuje się następującą postać modelu konwekcyjnego :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^j} (A_{ij}^{kl} u_k u_l) = f_i - \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \quad /13/$$

W ogólnym przypadku mnożników  $A_{ij}^{kl}$  jest 81, lecz wobec struktury równania zachowania ilości ruchu można się spodziewać, że dla ustalonego  $/ij/$  ich wartości liczbowe są do siebie zbliżone /brak jest podstaw do przypuszczeń, że niektóre z dziewięciu iloczynów typu  $u_k u_l$  mają większy wkład w naprężenia turbulentne niż pozostałe/. W dalszym ciągu przyjęto więc :

$$A_{ij}^{kl} = (A_T)_{ij} = (\text{const.})_{ij} \quad /14/$$

Określenie 9 bezwymiarowych parametrów  $(A_T)_{ij}$  jest przedmiotem dalszych prac. Tutaj zaprezentowany będzie tylko przykład formalnego zastosowania proponowanego modelu.

### 3. Przykład liczbowy.

Rozważmy ustalony przepływ burzliwy między dwiema równoległymi płytami, odległymi o  $H$  /rys.2/. Górna płyta porusza się z prędkością  $U$ , zaś dolna jest nieruchoma.

Wobec charakteru przepływu  $\underline{u} = u_x \underline{i}$ , toteż równanie /1/ daje :

$$\text{div } \underline{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad /15/$$

Funkcja /12/ ma tu szczególnie prostą postać :

$$(\tau_t)_{zx} = g A_T u_x^2(z) \quad /16/$$

skutkiem czego z /13/ otrzymujemy :

$$\frac{d^2 u_x}{dz^2} + \frac{2A_T}{\nu} u_x \frac{du_x}{dz} = 0 \quad /17/$$

z warunkami brzegowymi :

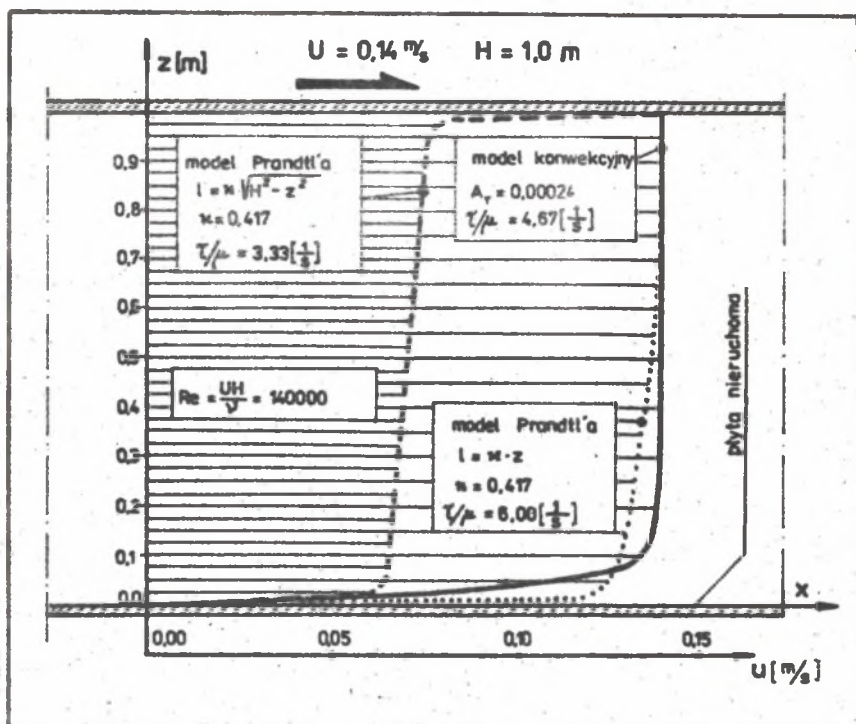
$$z = 0 - u_x = 0, \quad z = H - u_x = U \quad /18/$$

Równanie /17/ daje się rozwiązać analitycznie, co prowadzi do następującego rozkładu prędkości średnich :

$$u_x(z) = KC \frac{1 - \exp\left(-\frac{2Cz}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2Cz}{K}\right)} \quad /19/$$

$$\text{gdzie } K = \sqrt{\frac{\nu}{A_T}} \quad /20/$$





rys.2.

Stałą  $C$  należy wyznaczyć z drugiego warunku /18/. Przykładowy profil prędkości dla  $H = 1.0$  m,  $U = 0.14$  m/s i  $A_T = 0.00024$  pokazano na rys.2.

Z kolei wykorzystując dla rozważanego zadania model Prandtla /4,5/ otrzymano następujące równanie :

$$\frac{d}{dz} \left[ g l^2 \left( \frac{du_x}{dz} \right)^2 + \mu \frac{du_x}{dz} \right] = 0 \quad /21/$$

z warunkami brzegowymi /18/. Celem rozwiązania /21/ obliczono jedną kwadraturę, co dało :

$$g l^2 \left( \frac{du_x}{dz} \right)^2 + \mu \frac{du_x}{dz} = C \quad /22/$$

a następnie równanie /22/ całkowano numerycznie. Pewien dylemat powstaje tu przy określaniu drogi mieszania "l". Zgodnie z koncepcją Prandtla może ona być opisana przez liniową funkcję odległości od ścianki. Rozważono dwa przypadki :

1. burzliwość ulega stłumieniu wzdłuż każdej ścianki sztywnej :

$$l = \kappa \sqrt{H^2 - z^2} \quad /23/$$

2. burzliwość ulega stłumieniu tylko wzdłuż ścianki nieruchomej :

$$l = \kappa z \quad /24/$$

Profile prędkości dla obu przypadków przedstawiono na rys. 2 (przyjęto tu  $\kappa = 0.417$ ).

Ze względu na dowolny w zasadzie wybór parametru  $A_2$  w modelu konwektywnym nie podjęto dyskusji otrzymanych wyników. Przedstawiony przykład potraktowano jedynie jako demonstrację sposobu stosowania modelu.

#### LITERATURA

- [1] Launder B.B., Spalding D.B.; Mathematical models of turbulence . Academic Press, London 1972 ;
- [2] Łojczyński L.G.; Mechanika żłdkosti i gaza . Izdatelstwo Nauka, Moskwa 1973 ;
- [3] Prandtl L.; Dynamika przepływów . PWN, Warszawa 1956 ;
- [4] Tennekas H., Lumley J.L.; A first course in turbulence . MIT Press 1972.

#### ОБЩИИ ЗАМЫСЕЛ КОНВЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНЦИИ

#### Резюме

В статье представлено идея новой модели турбулентного движения. Главной чертой модели является выражение компонентов реингольдового тензора через алгебраическую комбинацию компонентов вектора средней скорости. Представлено численный пример.

#### CONCEPTION OF CONVECTIVE MODEL OF TURBULENCE

#### Summary

The paper deals with the conception of a new model of turbulence. In the model the turbulence distress tensor components have been described by means of algebraic combination of mean velocity components. Numerical example has been presented.