ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 88 Nr kol. 807

Jolanta STACHARSKA-TARGOSZ
Zbigniew NOWAK
Piotr GRYGLASZEWSKI

Politechnika Krakowska

ZASTOSOWANIE METODY LINEARYZACJI OPTYMALNEJ DO PROBLEMU WYMIANY CIEPŁA W PRZEPŁYWACH CIECZY NIENEWTONOWSKICH

Streszczenie: W pracy rozpatrywany jest nieizotermiczny przepływ cieczy nienewtonowskiej w rurze kołowej, przy uwzględnieniu zmienności z temperaturą własności reologicznych i termicznych płynu. Przedstawiono zastosowanie metod: linearyzacji optymalnej i uśredniania poprawek funkcjonalnych do obliczania współczynnika Fanninga dla wyżej wymienionego przepływu.

1. Wprowadzenie

Obliczanie spadków ciśnień podczas przepływów cieczy nienewtonowskich w przewodach stanowi jedno z ważniejszych zagadnień występujących w praktyce inżynierskiej. Uwzględnienie nieizotermiczności zjawiska zbliża rozpatrywany model matematyczny do rzeczywistych warunków, lecz jednocześnie komplikuje w znacznym stopniu obliczeniową stronę problemu.

W niniejszej pracy rozpatrywany będzie nieizotermiczny przepływ laminarny reostabilnych cieczy nienewtonowskich, opisanych prawem potęgowym, w poziomej rurze kołowej o założonej stałej temperaturze ścianki. Założono, że przepływ odbywa się na długości przewodu poza odcinkiem stabilizacji cieplnej, czyli tam, gdzie zarówno pola temperatury, jak i prędkości są już uformowane i nie zmieniają się w kierunku przepływu. Uwzględniona zostanie zmienność z temperaturą wybranych własności reologicznych: $K=K(T)$ i termicznych: $\lambda=\lambda(T)$ płynu oraz jego zdolność do rozpraszania energii /mierzona wartością liczby Brinkmana/. Szczególny przypadek powyżej przedstawionego zagadnienia rozpatrywany był w pracy [1]. Otrzymano tam dokładne rozwiązanie analityczne wyprowadzonego równania energii przy założeniu niezmienności z temperaturą współczynnika przewodzenia ciepła, tj. λ=const.

2. Sformułowanie problemu

Postawiony w pracy problem opisany jest równaniem energii [1]:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\lambda(T)\, r\, \frac{dT}{dr}\right] + K(T)\left[-\frac{dv}{dr}\right]^{n+1} = 0\,, \qquad /2.1/$$

które po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych przyjmie postać:

$$\frac{1}{Y}\frac{d}{dY}\left[\Lambda(\theta)\, Y\, \frac{d\theta}{dY}\right] + Br\, k(\theta)^{-1/n}\, Y^{(n+1)/n} = 0\,, \qquad /2.2/$$

z warunkami brzegowymi/w postaci bezwymiarowej/:

$$\frac{d\theta}{dY}(Y=0) = 0\,, \quad \theta(Y=1) = 0\,. \qquad /2.3/$$

Wobec niemożliwości uzyskania dokładnego rozwiązania równania /2.2/, konieczne staje się stosowanie metod przybliżonych [2].

Zmienność z temperaturą współczynnika konsystencji oraz współczynnika przewodzenia ciepła cieczy przyjmiemy odpowiednio:

$$k(\theta) = 1/(1+\gamma\theta)^n\,, \quad \Lambda(\theta) = 1 + \alpha\theta\,. \qquad /2.4/$$

Wstawiając zależności /2.4/ do /2.2/, otrzymuje się następującą postać równania energii /w formie bezwymiarowej/:

$$\frac{1}{Y}\frac{d}{dY}\left[(1+\alpha\theta)\frac{d\theta}{dY}Y\right] + Br\,(1+\gamma\theta)\,Y^{(n+1)/n} = 0\,, \qquad /2.5/$$

lub po wprowadzeniu zmiennych η i ε :

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[(1+\alpha_1\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{d\eta}\eta\right] + 4\,\hat{\hat{Br}}^2\,\eta^2\,\varepsilon = 0\,, \qquad /2.6/$$

z warunkami brzegowymi:

$$\frac{d\varepsilon}{d\eta}(\eta=0) = 0\,, \qquad \varepsilon(\eta=1) = 1\,. \qquad /2.7/$$

W celu rozwiązania równania /2.6/ zastosujemy metodę linearyzacji optymalnej [3], polegającą na skonstruowaniu równania różniczkowego liniowego:

$$\frac{\psi}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right] + 4\,\hat{\hat{Br}}^2\,\eta^2\,\varepsilon = 0\,, \qquad /2.8/$$

aproksymującego "optymalnie" rozpatrywane równanie różniczkowe nieliniowe. Za kryterium "optymalnej" linearyzacji równania /2.6/ przyjmuje się minimum całki z kwadratu różnicy E równań: nieliniowego /2.6/ i liniowego /2.8/:

$$I(\psi) = \iint_S E^2\, dS = \min. \qquad /2.9/$$

Powyższa metoda wymaga rozwiązania w pierwszym etapie równania pola temperatury przy założeniu Λ = const. Równanie /2.6/ dla $\alpha_1 = 0$ rozwiążemy metodą uśredniania poprawek funkcjonalnych [4], która polega ogólnie na zastąpieniu samej funkcji ciągł ej w danym obszarze przez jej średnią całkową w tym obszarze. Zgodnie z ideą przewodnią tej metody równanie /2.6/ /przy α_1=0/ aproksymujemy w pierwszym przybliżeniu równaniem:

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\frac{d\varepsilon_1}{d\eta}\right] = -4\,\hat{Br}^2\,\eta^2\,q_1\,, \text{ gdzie } q_1 = 2\int_0^1 \varepsilon_1\,\eta\, d\eta\,. \qquad /2.10/$$

Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy pierwsze przybliżenie pola temperatury:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\hat{Br}^2\left(1 - \frac{1}{6}\hat{Br}^2\right)^{-1}\left(1 - \eta^4\right) + 1\,. \qquad /2.11/$$

Celem podwyższenia dokładności rozwiązania konstruujemy drugie przybliżenie będące rozwiązaniem równania:

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\frac{d\varepsilon_2}{d\eta}\right] = -4\,\hat{Br}^2\,\eta^2\,\varepsilon_1 - 4\,\hat{Br}^2\,\eta^2\,q_2\,, \qquad /2.12/$$

gdzie:

$$q_2 = 2\int_0^1 \varepsilon_2\,\eta\,d\eta - q_1\,.$$

W rezultacie otrzymujemy pole temperatury w postaci:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\hat{Br}^4}{64\left(1-\hat{Br}^2/6\right)}\left(1-\eta^8\right) + \frac{240\hat{Br}^2 - 3\hat{Br}^6 - 20\hat{Br}^4}{960\left(1-\hat{Br}^2/6\right)^2}\left(1-\eta^4\right) + 1\,. \qquad /2.13/$$

Drugi etap metody linearyzacji optymalnej polega na wyznaczeniu optymalnej wartości parametru nastawialnego ψ_{opt}. Postulat minimum wymaga spełnienia następującego warunku:

$$\left.\frac{dI(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=\psi_{opt}} = 0\,. \qquad /2.14/$$

Tak więc wartość optymalną parametru nastawialnego oblicza się ze wzoru:

$$\psi_{opt} = \frac{\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta(1+\alpha_1\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right]\right)\left(\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right]\right)\eta\,d\eta\right\}}{\int_0^1\left\{\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right]\right\}^2\eta\,d\eta} \qquad /2.15/$$

dla ε danego wzorem /2.13/. Ostatecznie rozwiązanie równania różniczkowego /2.6/ przyjmie postać:

$$\varepsilon = C_1\left(1-\eta^8\right) + C_2\left(1-\eta^4\right) + 1\,, \qquad /2.16/$$

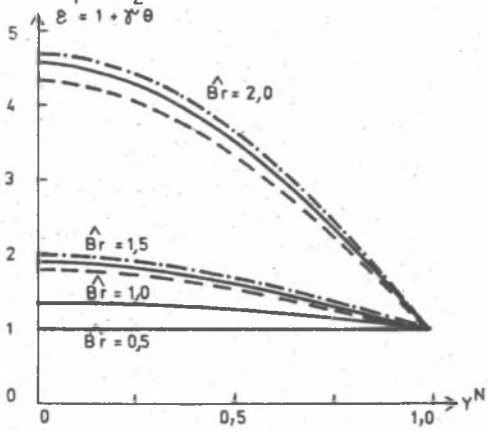
gdzie:

$$C_1 = -\frac{\hat{Br}^4/\psi_{opt}^2}{64\left(1-\hat{Br}^2/6\psi_{opt}\right)}\,;\quad C_2 = \frac{240\left(\hat{Br}^2/\psi_{opt}\right) - 3\left(\hat{Br}^6/\psi_{opt}^3\right) - 20\left(\hat{Br}^4/\psi_{opt}^2\right)}{960\left(1-\hat{Br}^2/6\psi_{opt}\right)^2}\,. \qquad /2.17/$$

Powracając do pierwotnych oznaczeń, pole temperatury dla przepływu cieczy nienewtonowskiej o zmiennym z temperaturą współczynniku przewodzenia ciepła opisane jest zależnością:

$$\theta = \frac{1}{\gamma}\left[C_1\left(1-Y^{4N}\right) + C_2\left(1-Y^{2N}\right)\right], \qquad /2.18/$$

gdzie C_1 i C_2 są obliczane z zależności /2.17/, zaś $N=\frac{3n+1}{n}$.



Rys.1 Profile temperatur w przekroju poprzecznym rury, dla różnych wartości $\hat{Br}$ i α_1

3. Wyznaczenie współczynnika oporu Fanninga

Podczas laminarnego przepływu cieczy nienewtonowskich w rurach kołowych wartość współczynnika oporu przepływu oblicza się z zależności [1]:

$$c_f = \frac{16}{(Re_{M-R})_w} \left[\frac{2(3n+1)}{n} \int_0^1 Y \left[\int_Y^1 k(\theta)^{-1/n} Y^{1/n} dY \right] dY \right]^{-n} \qquad /3.1/$$

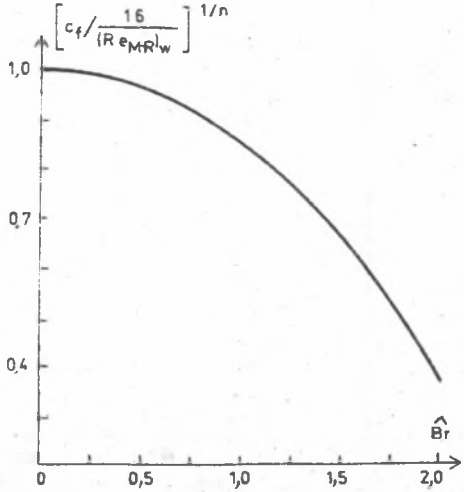
po uprzednim znalezieniu rozkładu temperatury w przekroju poprzecznym przewodu. Podstawiając do powyższego wzoru wyrażenie /2.18/ otrzymujemy ogólną zależność współczynnika Fanninga c_f w funkcji liczby Reynoldsa $(Re_{M-R})_w$, zmodyfikowanej liczby Brinkmana $\hat{Br}$, wskaźnika płynięcia n oraz optymalnego parametru nastawialnego ψ_{opt}:

$$c_f = \frac{16}{(Re_{M-R})_w} \left[1 + \frac{2}{3} C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right]^{-n} . \qquad /3.2/$$

Tablica 1

$$\left[c_f / \frac{16}{(Re_{M-R})_w} \right]^{1/n}$$

$\hat{Br}$	$\alpha_1 = 0,0$ Rozwiązanie dokładne[1]	$\alpha_1 = 0,0$ Metoda uśredniania poprawek funkcjonalnych	$\alpha_1 = 0,1$ Metoda linearyzacji optymalnej	$\alpha_1 = -0,1$ Metoda linearyzacji optymalnej
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
0,25	0,992	0,992	0,992	0,992
0,50	0,968	0,968	0,968	0,968
0,75	0,928	0,928	0,921	0,922
1,00	0,869	0,869	0,869	0,870
1,25	0,790	0,790	0,747	0,752
1,50	0,688	0,687	0,682	0,692
1,75	0,556	0,555	0,440	0,466
2,00	0,388	0,385	0,375	0,407



Rys.2 Wykres funkcji /3.2/

Poszukajmy obecnie takiej temperatury zastępczej θ_*, dla której wzór /3.2/ równoważny jest zależności:

$$c_f = \frac{16}{(Re_{M-R})_*} , \qquad /3.3/$$

gdzie liczba Reynoldsa wyznaczana jest w temperaturze θ_*. Nietrudno wykazać, że:

$$\theta_* = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right) , \qquad /3.4/$$

przy czym temperatura ta odpowiada lokalnej wartości temperatury w przekroju poprzecznym rury w odległości Y_* od osi przewodu, będącej rozwiązaniem następującego równania:

$$\left[Y_*^{\frac{3n+1}{2n}}\right]^4 + \frac{C_2}{C_1}\left[Y_*^{\frac{3n+1}{2n}}\right]^2 - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}\right] = 0 . \qquad /3.5/$$

Rozwiązanie powyższego równania ze względu na Y_* ma postać:

$$Y_*^{\frac{3n+1}{2n}} = 0,70 \quad \text{lub} \quad Y_* = (0,70)^{\frac{2n}{3n+1}} , \qquad /3.6/$$

dla zakresu zmian zmodyfikowanej liczby Brinkmana: $0 \leqslant \hat{Br} \leqslant 2$ i parametru decydującego o zmianie współczynnika przewodzenia ciepła w cieczy: $-0,1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0,1$. Ograniczenie powyższe wynika z oszacowania wartości $\hat{Br}$ i α_1, dla których zagadnienie ma sens fizyczny. Dla wartości wskaźnika płynięcia $0,5 \leqslant n \leqslant 1$ otrzymuje się $0,84 \leqslant Y_* \leqslant 0,87$, natomiast średnia wartość /w sensie całkowym/ w tym przedziale zmienności n wynosi:

$$(Y_*)_m = 0,85 . \qquad /3.7/$$

Należy podkreślić, że otrzymana wartość Y_* nie zależy od wartości $\hat{Br}$, wskaźnika płynięcia n oraz α_1 , w podanych zakresach zmienności tych parametrów.

4. Wnioski końcowe

Przedstawione rozważania stanowią rozszerzenie proponowanej w pracy[1] przybliżonej metody obliczania współczynnika Fanninga na przypadek przepływu cieczy nienewtonowskiej o zmiennym z temperaturą współczynniku przewodzenia ciepła $\lambda = \lambda(T)$. Otrzymane wyniki charakteryzują się wysokim stopniem aproksymacji podanych w pracy [1] analitycznych rozwiązań dokładnych. Błąd średni temperatur wynosi: dla $\hat{Br} = 2,0$ - $\bar{\sigma} = 0,025$, a dla $\hat{Br} = 1,0$ - $\bar{\sigma} = 0,9 \cdot 10^{-4}$, zaś maksymalny błąd względny wynosi 2%. Błąd średni dla współczynnika oporu Fanninga dla zakresu zmienności $0 \leqslant \hat{Br} \leqslant 2$ wynosi $\bar{\sigma} = 0,015$, a maksymalny błąd względny 1%.

W pracy wykazano, że do obliczania współczynnika Fanninga w rozważanym przepływie wystarczająca jest znajomość zmierzonej lub obliczonej lokalnej wartości temperatury tylko w jednym punkcie przekroju poprzecznego rury, leżącym w odległości 0,15 promienia przewodu od jego ścianki.

Wykaz oznaczeń

K - współczynnik konsystencji,
R - promień rury,
r - współrzędna promieniowa,
T - temperatura bezwzględna,
v - prędkość cieczy,
λ - współczynnik przewodzenia ciepła,
ϱ - gęstość cieczy,
τ - naprężenie styczne,

Wielkości bezwymiarowe

$Br = (\tau_w/K_w)^{(n+1)/n} (K_w R^2)/(\lambda T_w)$ - liczba Brinkmana,

$\hat{Br} = \frac{2n}{3n+1}\sqrt{Br\,\gamma}$; $\hat{\hat{Br}} = \hat{Br}\,(1 - \alpha/\gamma)^{-1}$ - zmodyfikowane liczby Brinkmana,

$c_f = \tau_w/(\frac{1}{2}\rho v_m^2)$ - współczynnik oporu Panninga,

$k = K/K_w$ - bezwymiarowy współczynnik konsystencji,

n - wskaźnik płynięcia,

$Re_{M-R} = [\rho v_m^{2-n}(2R)^n] / [8^{n-1}(\frac{3n+1}{4n})^n K]$ - liczba Reynoldsa dla cieczy potęgowej wg Metznera i Reeda,

$Y = r/R$ - bezwymiarowa współrzędna promieniowa,

α ; $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\gamma}/(1 - \frac{\alpha}{\gamma})$ - stałe determinujące zależność współczynnika przewodzenia ciepła od temperatury,

γ - stała determinująca zależność współczynnika konsystencji od temperatury,

$\varepsilon = 1 + \gamma\theta$ - temperatura bezwymiarowa,

$\theta = (T - T_w)/T_w$ - temperatura bezwymiarowa,

$\eta = Y^{(3n+1)/4n}$ - bezwymiarowa współrzędna promieniowa,

$\Lambda = \lambda/\lambda_w^{(3n+1)/4n}$ - bezwymiarowy współczynnik przewodzenia ciepła.

Wskaźniki

m - wartość średnia, w - wartość dla r=R, * - wartość zastępcza.

Literatura

[1] Nowak Z., Gryglaszewski P., Stacharska-Targosz J.: Przybliżona metoda obliczania oporów przepływu przy laminarnych, nieizotermicznych przepływach cieczy nienewtonowskich w przewodach. Materiały konferencyjne XI Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej Inżynierii Chemicznej i Procesowej, II,189/1983/

[2] Rup K.: Praca doktorska. Politechnika Krakowska /1978/

[3] Vujanović B.: Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem. Int.J.Heat Mass Transfer, 16,315/1973/

[4] Sokolov J.D.: O mietodje osriednienia funkcjonalnych popravok. Ukrainskij Matematičeskij Zurnal, 1,9/1957/

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ К ПРОБЛЕМЕ ОБМЕНА ТЕПЛА В ТЕЧЕНИЯХ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Р е з ю м е

Рассматриваемая проблема являются расширением приближенного метода вычисления коэффициента сопротивления Фаннинга, приведенных в раньних работах авторской группы, на случай течения в трубе неньютоновской жидкости, подвергающейся закону степени с переменным с температурой коэффициенте проводимости тепла жидкости. Рассуждения ограничиваются к течению в области за термическим впускным отсеком, где профили температур и скорости не переме-

мются вдоль оси трубы. Предлагается постоянную температуру стенки. Основные уравнения энергии описывающие поле температуры решены методами: оптимальной линеаризации усреднения функциональных исправлений. Полученные результаты приведены диаграммами и в особом случае сравнены с результатами ранних работ авторов. Выведена простая зависимость разрешающая вычислить локальное значение коэффициента сопротивления Фаннинга, в области за термическим впускным отсеком.

APPLICATION OF THE OPTIMAL LINEARIZATION METHOD
TO THE HEAT TRANSFER PROBLEM IN FLOWS OF NON-NEWTONIAN FLUIDS

S u m m a r y

The problem considered in this paper is intended to be an extention of the approximative analytical method of Fannings friction factor calculation, presented in previous paper of authors, on the case of the tube flow of non-Newtonian power law fluids with temperature dependent rheological property, when also the temperature dependence of thermal fluid conductivity should be taken into account.
The considerations are restricted to the flow just beyond the thermal entrance region where the temperature and velocity profiles do not change along the tube axis. The thermal boundary condition of constant wall temperature is considered only. The basic equation of energy describing the temperature field is solved by means of two methods: optimal linearization and averaging the functional corrections. Moreover, a simple formula for calculating the Fannings friction factor in the outlet section of thermal entrance region have been derived. The results obtained in this paper are graphically illustrated on 2 figures.