ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ENERGETYKA z. 88 Nr kol. 807

Andrzej STYCZEK

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

METODA MOMENTÓW DLA RUCHÓW WIROWYCH

Streszczenie: Dokonano przeglądu metod używanych w teorii płaskiego ruchu wirowego. Podano metodę wyznaczania takiego ruchu opartą na dynamice miar wirów. Metoda ta może być stosowana również w zagadnieniach meteorologii i oceanografii.

Ruch płaski płynu nieściśliwego może być opisany układem równań:

$$- \Delta \psi = \omega$$
$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega \qquad (1)$$

ψ jest funkcją prądu, ω - składową wirowości prostopadłą do płaszczyzny ruchu. Jeżeli obszar ruchu jest nieograniczony to, znając ω, obliczamy :

$$\psi(A) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \omega(B) \ln r_{AB} \, d\sigma_B \qquad (2)$$

Dla płynu nielepkiego, na podstawie drugiego z równań (1) wynika zachowanie wirowości:

$$\omega(t, \vec{r}) = \omega(0, \vec{r}_0)$$
$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0), \quad \vec{r}(0, \vec{r}_0) = \vec{r}_0 . \qquad (3)$$

Korzystając z definicji funkcji prądu można wyznaczyć ruch elementów płynu - zachowujących wirowość - w sposób następujący:

$$\frac{\partial \vec{r}(t, \vec{r}_0)}{\partial t} = \frac{-1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \omega(t, \vec{r}) \left\{ -\frac{\partial}{\partial y_A}, \frac{\partial}{\partial x_A} \right\} \ln r_{AB} \, d\sigma_B \qquad (4)$$

W całce tej można zamienić zmienne. Po wprowadzeniu zmiennych Lagrange'a otrzymamy równanie różniczkowo-całkowe typu Fredholma I rodzaju. Rosenhead [1] w 1932 r. stosując kwadratury zastąpił równanie (4) układem dyskretnym:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{(j)} \vec{K}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right)\omega_j \cdot A_h , \qquad \vec{r}_i\big|_o = \vec{r}_{io}$$

$\vec{K}$ wynika z jąder równania (5) i jest określone następująco:

$\vec{K} = \left\{ -\frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2} , \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2} \right\}$, a układ równań dla $\vec{r}_j$ może być interpretowany jako opis ruchu układu wirów o cyrkulacjach $2\pi A_h \omega_j$ umieszczonych w punktach $\vec{r}_j$. Całkowanie układu Rosenheada jest trudne ze względu na niestabilności wywołane osobliwością jądra $\vec{K}$. W latach siedemdziesiątych Chorin [2] oraz Kuwahara i Takami [3] wprowadzili strukturę wirów. Jest ona określona szczególną postacią funkcji ω:

$$\omega = \sum_{(j)} \omega_j \sigma_j^{-2} \phi\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_j|}{\sigma_j} \right)$$

Jak widać, rozważa się układ wirów o środkach w punktach $\vec{r}_j$. Funkcja ϕ w pracach Chorina jest prosta:

$$\phi(z) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad z > 1 \end{cases}$$

Kuwahara i Takami przyjęli $\phi(z) = 1/2 \exp(-z^2)$. Dyskretna postać równania (4) z tego rodzaju wirowością nie prowadzi do niestabilności numerycznych. Co więcej: udowodniono [4], że przy odpowiednim doborze σ, dla skończonych czasów, uzyskane w ten sposób rozwiązania są zbieżne w ograniczonej części płaszczyzny do rozwiązań równań ruchu. Zbieżność jest typu "dyskretnej" przestrzeni L^2. Widoczne są niedogodności tej metody. Po pierwsze - układ równań dla $\vec{r}_k$ ma wysoki rząd. Po drugie - wiry wprawdzie przemieszczają się - lecz zachowują strukturę, co w rezultacie prowadzi do zbieżności, jednak w słabym sensie.
Odmienne podejście do problemu ruchu wirowego wynika z czynionego dodatkowego założenia o stałości ω wewnątrz zbioru ograniczonych obszarów. Wyznaczenie ruchu, równoważne wyznaczeniu kształtu tych obszarów - sprowadza się do wyznaczenia ewolucji granic tych obszarów. Otóż, korzystając z faktu, że

$$\nabla_A \ln r_{AB} = - \nabla_B \ln r_{AB}$$

równanie (4) może być przepisane następująco:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y_B}, \frac{\partial}{\partial x_B} \right\} \omega(B) \ln r_{AB}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \ln r_{AB} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y_B}, \frac{\partial}{\partial x_B} \right\} \omega(B)\, d\sigma_B$$

Dla ruchów znikających w nieskończoności pierwszy wyraz zeruje się. Drugi składnik, skutkiem skoku ω na granicy obszaru wirowego może być zredukowany do całki konturowej. W rezultacie otrzymamy:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \oint [\omega] \ln r \, d\vec{r} \tag{5}$$

$[\omega]$ oznacza skok wirowości: $[\omega] = \omega_{zewn} - \omega_{wewn}$ = const /dla danego konturu/, a $\vec{r}(t, \vec{r}_o)$ oznacza tym razem granicę obszaru o stałej wirowości. Równanie (5) - będąc w istocie równaniem I rodzaju - stanowi podstawę "dynamiki konturów" /Contour Dynamics/ i było wielokrotnie rozwiązywane metodami numerycznymi [5], [6]. Algorytmy są stabilne i dają wysoką dokładność.

Jednak - dla wielu konturów - nakład pracy obliczeniowej jest znaczny. Wprowadzimy odrębną metodę opartą na miarach wirowości [7]. Może być ona stosowana zarówno dla płynu lepkiego, jak i nielepkiego. Rozważmy N obszarów wirowych o dowolnych wirowościach ω_k w D_k. Wprowadzimy miary wirowości:

$$I_k^{(m,n)} = \iint_{D_k} \omega_k \cdot x^m y^n \, d\sigma \tag{6}$$

Istnieje inercjalny układ odniesienia związany z centrum wirowości. W tym układzie jest:

$$\sum_{(k)} I_k^{(10)} = \sum_{(k)} I_k^{(01)} = 0$$

Z kolei wprowadzimy lokalne układy odniesienia związane z wirami. Osie ξ i η są równoległe do x i y. Zdefiniujemy

$$J_k^{(m,n)} = \iint_{D_k} \omega_k \, \xi^m \cdot \eta^n \, d\sigma \tag{7}$$

Oczywiście $J_k^{(10)} = J_k^{(01)} = 0$, a ponadto, skutkiem zależności

$$x = x_k + \xi, \qquad y = y_k + \eta \tag{8}$$

mamy związek:

$$I_k^{(m,n)} = \sum_{(p)} \sum_{(q)} \binom{m}{p} \binom{n}{q} x_k^p \, y_k^q \, J_k^{(m-p,n-q)} \tag{9}$$

x_k, y_k oznaczają współrzędne środka wirowości k-tego wiru. W inercjalnym układzie odniesienia można stosować równania dynamiki w ich naturalnej formie. Jest:

$$\frac{dI_k^{(m,n)}}{dt} = \iint_{D_k} \left\{ \frac{d\omega_k}{dt} x^m y^n + \omega_k \left[m\, x^{m-1} y^n u + n\, x^m y^{n-1} v \right] \right\} d\sigma \tag{10}$$

albowiem

$$\frac{d}{dt} \iint_{D_k} F \, d\sigma = \iint_{D_k} \left[\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \bar{V} \right] d\sigma$$

Pierwszy składnik w (10) znika dla płynu nielepkiego. Dla płynu lepkiego otrzymamy:

$$\iint_{D_k} \frac{d\omega_k}{dt}\, x^m y^n \, d\sigma = \nu \iint_{D_k} \Delta\omega_k \, x^m y^n \, d\sigma = \nu \iint_{D_k} \omega_k \left[m(n-1)x^{m-2}y^n + n(n-1)x^m y^{n-2} \right] d\sigma$$

Przeprowadzone całkowanie przez części jest możliwe dla wirowości znikającej z pochodnymi w nieskonczoności. Następnym krokiem jest przedstawienie prędkości $\{u,v\}$ w (10) jako sumy: prędkości środka wirowości, przyczynka do prędkości wywołanego istnieniem danego wiru oraz różnicy pomiędzy prędkością indukowaną pozostałymi wirami a prędkością środka wirowości:

$$\{u,v\} = \{\dot{x}_k, \dot{y}_k\} + \{u_k, v_k\} + \{U - \dot{x}_k, V - \dot{y}_k\}$$

Po wykonaniu tego oraz po zróżniczkowaniu (9) i przyrównaniu z przekształconym równaniem (10) otrzymamy:

$$\frac{d J_k^{(m,n)}}{dt} = \frac{d J_{k/own}^{(m,n)}}{dt} + \nu\left[m(m-1) J_k^{(m-2,n)} + n(n-1) J_k^{(m,n-2)} \right] + \iint_{D_k} \omega_k \left[m \xi^{m-1} \eta^n (U - \dot{x}_k) + n \xi^m \eta^{n-1} (V - \dot{y}_k) \right] d\sigma \qquad (11)$$

Jest to równanie opisujące dynamikę miar $J_k^{(m,n)}$ poszczególnych wirów. Człon "own" wynika z samoistnej ewolucji wiru. Składnik zawierający całkę może być wyznaczony przy użyciu $J_k^{(m,n)}$ następująco: zgodnie z definicją środka wirowości jest:

$$\{\dot{x}_k, \dot{y}_k\} J_k^{(00)} = \iint_{D_k} \omega_k \{U,V\} d\sigma = \iint_{D_k} \omega_k \left[1 + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots \right] \{U,V\} d\sigma$$

lub też

$$\{\dot{x}_k, \dot{y}_k\} = \frac{1}{J_k^{(00)}} \left[J_k^{(00)} + \frac{1}{2}\left(J_k^{(20)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 J_k^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + J_k^{(02)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \ldots + \ldots \right] \{U,V\}\Big|_{x_k y_k} \qquad (12)$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że wir - samoistnie - nie zmienia położenia swego środka wirowości.

Podobnie - ma miejsce rozwinięcie w szereg:

$$\{U,V\}(\xi,\eta) = \left[1 + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \ldots + \ldots \right] \{U,V\}\Big|_{x_k y_k}$$

Podstawienie wyrażenia na prędkość środka wirowości i rozwinięcia prędkości umożliwia obliczenie szukanej całki w (11). W wyniku otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
\frac{d J_k^{(m,n)}}{dt} = {} & \frac{d J_{k/own}^{(m,n)}}{dt} + \nu\left[m(m-1) J_k^{(m-2,n)} + n(n-1) J_k^{(m,n-2)}\right] + \\
& + m\Big\{ J_k^{(m,n)} \frac{\partial}{\partial x} + J_k^{(m-1,n+1)} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\Big[\Big(J_k^{(m+1,n)} - \\
& - \frac{J_k^{(20)}}{J_k^{(00)}}\Big) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\Big(J_k^{(m,n+1)} - \frac{J_k^{(11)}}{J_k^{(00)}}\Big) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \\
& + \frac{1}{2}\Big(J_k^{(m-1,n+1)} - \frac{J_k^{(02)}}{J_k^{(00)}}\Big) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big] \ldots \Big\} U\Big|_{x_k y_k} \\
& + n\Big\{ \ldots\ldots\ldots \text{ analogiczne wyrażenie} \Big\} V\Big|_{x_k y_k} .
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Pozostaje wyznaczyć $\{U,V\}$ /wraz z pochodnymi/. Otóż - używając funkcji ψ zdefiniowanej całką (2), po rozwinięciu logarytmu - otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
\Psi\Big|_{x_k y_k} = {} & \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{(\alpha) \\ \alpha \neq k}} J_\alpha^{(00)} \ln R_{\alpha k} + \frac{1}{2R_{\alpha k}^2}\left(J_\alpha^{(20)} + J_\alpha^{(02)}\right) + \\
& - \frac{1}{2}\left[4 X_{\alpha k}^2 J_\alpha^{(20)} + 8 X_{\alpha k} Y_{\alpha k} J_\alpha^{(11)} + 4 Y_{\alpha k}^2 J_\alpha^{(02)}\right] / R_{\alpha k}^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

Użyto oznaczeń: $X_{\alpha k} = x_k - x_\alpha$, $Y_{\alpha k} = y_k - y_\alpha$, $R_{\alpha k}^2 = X_{\alpha k}^2 + Y_{\alpha k}^2$ zwięźle notujących położenie środków wirowości. Układ (13) redukuje opis układu N-wirów do znalezienia samoodziaływania każdego z nich /dla aktualnej konfiguracji własnej/ oraz układu równań różniczkowych zwyczajnych. "Obcięcia" układu można dokonać wprowadzając mały parametr:

$$
\epsilon = \frac{\text{maks. średnicy } D_k}{\text{minimum } R_k}
$$

Odrzucając człony rzędu ϵ^4 i wyższego uwzględnia się jedynie miary drugiego rzędu.

W tej sytuacji - w miejsce wirów - rozważamy ich "elipsy wirowości". Umożliwia to łatwe wyrażenie członów $\frac{d J_{k/own}}{dt}$. Wiadomo bowiem [8], że elipsa o stałej wirowości - a więc równoważna w sensie równań (13) i przy przyjętej dokładności rozważanemu wirowi - nie ulega samoistnej deformacji, lecz jedynie wykonuje ruch obrotowy.

Uzyskany w ten sposób algorytm umożliwia szybkie wykonanie interesujących obliczeń.

Literatura

[1] Rosenhead, L.: Proc.Roy.Society, London, Ser. A 134 /1932/.

[2] Chorin, A.J.: J.Fluid Mech., 57, /1973/.

[3] Kuwahara, K., Takami, H.: J.Phys.Soc. of Japan, 34 /1973/.

[4] Hald, O.: SIAM J.Num.Anal., 16, /1979/.

[5] Zabusky, N.J., Hughes, M.H., Roberts, K.V.: J.Comp.Phys., Vol. 30, N 1 /1979/.

[6] Deem, G.S., Zabusky, N.J.: Phys.Rev. Lett., 40, /1978/.

[7] Melander, M.V., Styczek, A., Zabusky, N.J.: Phys.Rev. Lett., /w druku/.

[8] Batchelor, G.K., "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge, /1970/.

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ К ВИХРЕВЫМ ДВИЖЕНИЯМ ЖИДКОСТИ

Р е з ю м е

Дано введение в теорию вихревых течений. Тоже, показано новый метод решения такого течения. Этот метод может быть приложенный к геофизическим проблемам.

THE MOMENTS METHOD FOR VORTEX MOTION OF INCOMPRESSIBLE FLUID

S u m m a r y

There has been given a review of vortex methods in plane motion of liquid.
Also, a new method for describing that kind of motion is presented.
It is aplicable to many geophysical problems.