

Andrzej SZANIAWSKI

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

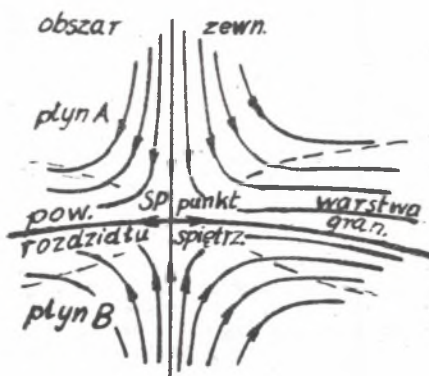
## OTOCZENIE PUNKTU SPIĘTRZENIA PRZY ROZCIĄGANEJ ŚCIANCIE

**Streszczenie:** Rozpatrywane jest ściśle rozwiązanie równań Navier-Stokes'a dla płaskiego, symetrycznego przepływu lepkiej cieczy nieściśnialwej w półprzestrzeni ograniczonej rozciąganą płaszczyzną. Rozwiązanie to może opisywać wewnętrzną strukturę przepływu w najbliższym sąsiedztwie punktu spiętrzenia przy powierzchni rozdziału między dwoma nie mieszającymi się cieciami.

### 1. Wstęp

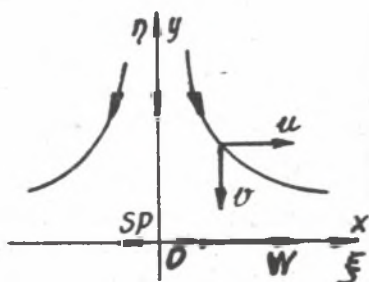
Punkty spiętrzenia, z ekstremalnymi wartościami ciśnienia i prędkości, tworzą się nie tylko przy bryłach nieprzepuszczalnych i sztywnych. Mogą one również pojawiać się przy opływie brył porowatych lub przy swobodnej powierzchni rozdziału między dwoma nie mieszającymi się płynami. Podobnie jak w innych przypadkach, przepływ może być wówczas wywołany oddziaływaniem zewnętrznym, ale w przypadku powierzchni swobodnej mogą go również wywoływać wewnętrzne zjawiska powierzchniowe, oddziaływujące dynamicznie poprzez zmienność napięcia powierzchniowego. Lokalna struktura przepływu w bliskim sąsiedztwie punktów spiętrzenia przy powierzchniach rozdziału nie mieszających się cieczy, niezależnie od czynników ten przepływ powodujących, jest przedmiotem niniejszej pracy. Obiektem rozważań są szybkie, ale laminarne przepływy cieczy lepkiej i nieściśnialwej, z ograniczeniem się do rozpatrywania przepływów płaskich i symetrycznych względem płaszczyzny normalnej do powierzchni rozdziału w punkcie spiętrzenia /Rys. 1/.

W interesującym nas przypadku, z każdej strony powierzchni rozdziału możemy wydzielić trzy obszary: obszar przepływu wewnętrznego, warstwę graniczną oraz otoczenie punktu spiętrzenia /Rys. 1/. Wykorzystując równania Navier-Stokes'a, w których odwrotność liczby Reynoldsa występuje jako mały parametr przy najwyższych pochodnych, możemy do przybliżonego wyznaczenia takich szybkich przepływów zastosować metodę polegającą na znajdowaniu rozwiązań asymptotycznych dla obszaru zewnętrznego, dla warstwy granicznej i dla otoczenia punktu spiętrzenia, oraz na ich asymptotycznym kojarzeniu. Rozwiązania zewnętrzne otrzymuje się z równań Eulera jako granicznego przypadku równań Navier-Stokes'a, w których pominięto człony lepkie, jako małe wyższego rzędu. Równania warstwy przyściennej są innym uproszczonym przypadkiem równań Navier-Stokes'a, w których pominięte pewnych członów nastąpiło po odpowiednim rozciągnięciu skali długości i prędkości w kierunku



poprzecznym do linii prądu. Dla otoczenia punktu spiętrzenia należy odpowiednio rozciągnąć skale w obu kierunkach, ale wówczas nie same równania, a jedynie warunki brzegowe ulegną uproszczeniu. Jednak te uproszczone warunki brzegowe udaje się dokładnie spełnić przez pewną klasę ściślejszych rozwiązań równań Navier-Stokes'a, które wyrażają się przez jednoparametrową rodzinę funkcji od jednej zmiennej. Przedstawienie tych rozwiązań i analiza ich własności są - przedmiotem niniejszej pracy.

## 2. Sformułowanie problemu i metoda jego rozwiązywania



Dla rozpatrywanego ustalonego, płaskiego i symetrycznego przepływu cieczy o stałej gęstości  $\rho$  i o stałym kinematycznym współczynniku lepkości  $\nu$  będziemy kartezjański układ współrzędnych  $x, y$  obierać tak, aby jego początek pokrywał się z punktem spiętrzenia  $SP$ , a jego oś  $x$  leżała na płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń przepływu /Rys. 2/. Płaszczyzna ta jest rozciągana z prędkością  $W(x)$  proporcjonalną do odległości od punktu spiętrzenia:  $W = W' \cdot x$ . Kartezjańskie współrzędne prędkości i ciśnienie będziemy oznaczać odpowiednio przez  $u, v, p$

Dla tak sformułowanego problemu poszukiwane parametry przepływu  $u, v, p$  winny spełniać równania Navier-Stokes'a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

warunki brzegowe na rozciągliwej ścianie:

$$2) \quad u(x, 0) = W' \cdot x, \quad v(x, 0) = 0, \quad W' = \text{const.}$$

oraz warunki asymptotyczne:

$$13/ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{u(x,y)}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{v(x,y)}{y} = \text{const.} < 0,$$

które wynikają z konieczności kojarzenia lokalnej struktury przepływu z rozwiązaniem zewnętrznym.

łatwo się przekonać przez podstawienie, że funkcje  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $p(x,y)$  określone wzorami:

$$14/ \quad u = -\frac{\nu}{L} \xi U'(\eta), \quad v = \frac{\nu}{L} U(\eta), \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}$$

$$p = p_{sp} + \frac{\rho \nu^2}{L^2} \left[ -\frac{1}{2} U^2(\eta) + U(\eta) - U(0) - \frac{1}{2} \Pi \xi^2 \right], \quad \Pi = -\frac{L^2 \rho \omega_0}{\rho \nu^2 \frac{\partial x^2}{\partial x^2}},$$

gdzie  $L$  jest tymczasem nieokreślona długością charakterystyczną, stają się poszukiwanymi rozwiązaniami, jeśli tylko funkcja  $U(\eta)$  spełnia równanie

$$15/ \quad U''' - U U'' + U' U' = \Pi, \quad \Pi > 0,$$

warunki brzegowe

$$16/ \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = -A, \quad A = \frac{L^2 W'}{\nu}$$

i warunek asymptotyczny

$$17/ \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{U(\eta)}{\eta} = -\sqrt{\Pi}$$

W ten sposób rozwiązanie postawionego dwuwymiarowego problemu 11/, 12/, 13/ dla trzech niewiadomych funkcji  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $p(x,y)$  zostało sprowadzone do rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego 15/ z warunkami 16/ i 17/ dla jednej funkcji  $U(\eta)$  od jednej zmiennej niezależnej  $\eta$ .

Po znalezieniu  $U(\eta)$  otrzymujemy ze wzorów 14/ parametry przepływu  $u, v, p$ , a linie prądu  $\Psi = \text{const.}$  określone są funkcją prądu

$$18/ \quad \Psi = \xi U(\eta).$$

Rozkłady ciśnienia  $p_s$  i naprężeń tnących  $\tau_s$  na ścianie możemy wówczas otrzymać ze wzorów

$$19/ \quad p_s = p_{sp} - \frac{1}{2} \frac{\rho \nu^2}{L^2} \Pi \xi^2, \quad \tau_s = \rho \nu \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = -\frac{\rho \nu^2}{L^2} T \xi, \quad T = U''(0).$$

Równanie 15/ zostało po raz pierwszy wyprowadzone w roku 1910 przez Hiemenza [1], który rozwiązał je numerycznie w obszarze  $\eta > 0$  dla szczególnego przypadku  $A = 0$ , odpowiadającego punktowi spiętrzenia przy sztywnej ścianie. Inne szczególne rozwiązanie

$$110/ \quad U = \sqrt{A} (e^{-\sqrt{A} \eta} - 1), \quad \Pi = 0, \quad A \geq 0,$$

znalezione zostało przez Riabouchinsky'ego [2]. Dla  $W' = \sqrt{-\rho p(\omega_0) / (\rho \frac{\partial x^2}{\partial x^2})}$

otrzymujemy trywialne rozwiązanie  $U = -A\eta$ , przy czym  $A = \sqrt{\Pi}$ , a obierając ponadto  $L = \sqrt{\nu / W'}$  możemy je jeszcze uprościć wprowadzając  $A = 1$ .

Dla ogólniejszego przypadku  $\Pi > 0$  i  $A \neq \sqrt{\Pi}$  będziemy obierać

$$L = \sqrt[4]{-p^2 / [\partial^2 p(0,0) / \partial x^2]}, \text{ czyli } \Pi = 1, \text{ a rozwiązania } U(\eta)$$

będziemy poszukiwać w postaci zbieżnych rozwinięć potęgowych

$$/11/ \quad U(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} \cdot (\eta - \eta_p)^n, \quad |\eta - \eta_p| < \tau_p,$$

dokoła bądź to początku układu  $\eta_0 = 0$ , bądź też punktów  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  otrzymanych drogą wprowadzenia odpowiednich przedłużeń analitycznych.

Podstawiając rozwinięcie /11/ do równania /5/, z uwzględnieniem  $\Pi = 1$ , otrzymamy wzory rekurencyjne

$$/12/ \quad a_{pn} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \cdot (2k-n)}{n(n-1)(n-2)} a_{n-k-1} a_k + \begin{cases} \frac{1}{6} & n=3, \\ 0 & n=4, 5, 6, \dots \end{cases}$$

dla których pierwsze trzy współczynniki  $a_{p0}, a_{p1}, a_{p2}$  winny być dane. Można udowodnić istnienie stałych dodatnich  $\delta_p$  i  $\tau_p$ , dla których współczynniki  $a_{pn}$  spełniają warunek

$$/13/ \quad |a_{pn}| < \frac{\delta_p}{\tau_p^{n+1}}, \quad \delta_p, \tau_p > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

a stąd wynika, że dla  $|\eta - \eta_p| < \tau_p$  szeregi potęgowe /11/ są zbieżne /dają się zmajoryzować szeregiem geometrycznym/ i w obszarze zbieżności są ogólnym trójparametrowym rozwiązaniem równania /5/.

Aby w tej szerokiej, trójparametrowej rodzinie funkcji  $U(\eta; a_{p0}, a_{p1}, a_{p2})$  wybrać dla każdego  $\eta_p$  jednoparametrową rodzinę rozwiązań spełniających warunki /6/ i /7/, należy odpowiednio dobierać pierwsze współczynniki

$a_{p0}, a_{p1}, a_{p2}$ . Przeprowadzamy to w następujący sposób. Rozpoczynamy od rozwinięcia /11/ dokoła początku układu  $\eta_0 = 0$ , gdzie dwa współczynniki  $a_{00} = 0$  i  $a_{01} = -A$  są zadane na podstawie /6/, a  $a_{02} = T/2$  będziemy się starali dobierać tak, aby spełniony był z zadowalającą dokładnością warunek asymptotyczny /7/. Przy dobieraniu  $T(A)$  obszar zbieżności  $|\eta| < \tau_0$  jest na ogół niewystarczający do zadowalającego sprawdzenia warunku /7/ i wówczas należy wprowadzać kolejne przedłużenia analityczne i pomocnicze rozwinięcia potęgowe dokoła kolejnych wartości  $\eta_p$  / $p=1, 2, \dots$ /.

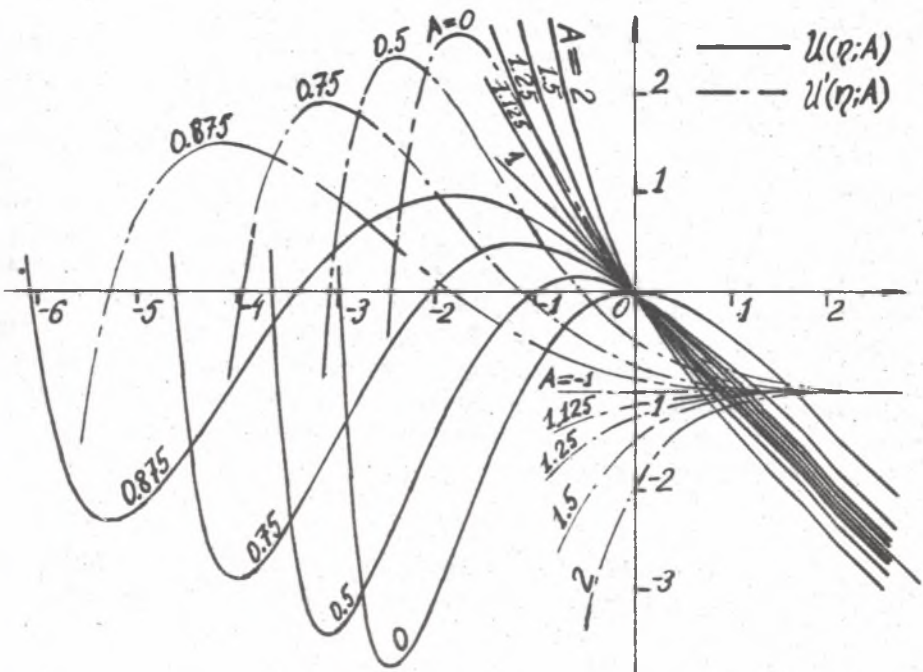
Na tej zasadzie opracowana została procedura numeryczna, która dla zadanego  $A$  i założonego  $T$  wyznacza kolejne przedłużenia analityczne funkcji  $U(\eta)$  spełniającej równanie /5/ i warunki  $U(0) = 0$ ,  $U'(0) = -A$ ,  $U''(0) = T$ , następnie sprawdza w przybliżeniu warunek /7/, a w razie jego niespełnienia dobiera poprawioną wartość  $T$  i zaczyna wszystko od początku. Postępowanie to powtarza się aż do otrzymania  $T$  z zadowalającą dokładnością.

Niestety nie dla wszystkich  $A$  procedura ta jest numerycznie dobrze uwarunkowana, a  $U(\eta)$  może mieć od jednego do trzech miejsc zerowych, co powoduje, że zależność  $T(A)$  może być niejednoznaczna. Dlatego też wielokrotność miejsc zerowych została w procedurze uwzględniona przez przyjęcie, że  $U(\eta) < 0$  dla  $\eta > 0$ , co nie jest ograniczeniem, gdyż początek układu współrzędnych jest wybierany arbitralnie i może być umieszczany w dowolnym z miejsc zerowych funkcji  $U(\eta)$ . Taki wybór pozwala uniknąć

wielokrotnego wyznaczania tych samych funkcji, różniących się jedynie innym umieszczeniem początku  $\eta=0$ . W ten sposób możemy, już teraz jednoznacznie, dla zadanego  $A$  dobrać  $T$ , oraz znaleźć wartości funkcji  $U(\eta)$  wraz z jej pochodnymi, a następnie, po rozszerzeniu zakresu zmienności  $A$  i  $T(A)$ , możemy określić rozkłady parametrów przepływu w najbliższym sąsiedztwie punktu spiętrzenia, dla szerokiego ale dopuszczalnego zakresu zmienności warunków brzegowych.

### 3. Wyniki i wnioski

Uwzględnienie wprowadzonego warunku  $U(\eta; A) < 0$  dla  $\eta > 0$  w naszkicowanej wyżej procedurze ogranicza zakres zmienności wprowadzanych wartości  $A$  jedynie do liczb nieujemnych  $0 \leq A < \infty$ , ale za to daje jednoznaczną zależność  $T(A)$ . Otrzymane w ten sposób wykresy funkcji  $U(\eta; A)$  i jej pochodnej  $U'(\eta; A)$  zostały pokazane na rys. 3.



Jednoparametrową rodzinę tak otrzymanych funkcji  $U(\eta; A)$  możemy podzielić według liczby występujących w  $U(\eta)$  miejsc zerowych na: z jednym miejscem zerowym  $|A \geq 1|$ , z trzema miejscami zerowymi  $1 < A < 1$ , oraz na jedną funkcję  $U(\eta; 0)$  z dwoma miejscami zerowymi /przypadek rozpatrywany przez Hiemenza [1]/. Jeżeli dla funkcji posiadających więcej niż jedno

miejsce zerowe obierzemy inaczej początek układu współrzędnych, to z uzyskanych wyników możemy otrzymać pozostałe przypadki rozwiązania postawionego problemu, z innymi zakresami zmienności  $A$  i z innymi odgałęzzeniami zależności  $T(A)$ . Np. dla rozpatrywanego przez Hiemenza przypadku  $A=0$  otrzymujemy  $T(0)=-1.232587656820281020174$ , jedno miejsce zerowe  $\eta_1=0$ , oraz drugie miejsce zerowe  $\eta_2=-2.9756017277$ , w którym  $U'(\eta_2)=-21.257424743$  i  $U''(\eta_2)=100.64413660$ . Obierając początek układu w tym drugim miejscu zerowym otrzymamy inny zestaw  $A=21.257424743$  i  $T=100.64413660$ , określający tę samą krzywą opisującą rozwiązanie tego samego problemu, ale z inną wartością  $A$ , oraz z innym rozmieszczeniem dwóch miejsc zerowych. Z drugiej strony, dla tej samej wartości

$A=21.257424743$  otrzymujemy z bezpośredniego zastosowania przedstawionej procedury  $T=96.88023$ , a określona w ten sposób funkcja  $U(\eta)$  będzie miała już tylko jedno miejsce zerowe  $\eta=0$ . Tak więc z jednej funkcji  $U(\eta)$  można otrzymać różne rozwiązania postawionego problemu dla kilku /do trzech/ wartości  $A$ , jak również postawiony problem z jedną wartością  $A$  może dawać więcej /do dwóch/ różnych rozwiązań  $U(\eta)$ . Dla mniejszych ujemnych wartości  $A$  problem nie posiada rozwiązań.

Wydaje się, że wymienione wyżej własności funkcji  $U(\eta)$  mogą mieć duże znaczenie dla poznania struktury przepływu w punkcie spiętrzenia. Funkcje  $U(\eta)$  i  $U'(\eta)$  przedstawiają w pewnej skali rozkłady składowych prędkości w kierunkach normalnym i stycznym do ścianki, a ich miejsca zerowe i zmiany znaku wskazują, że w pewnych warunkach struktura przepływu może być bardziej złożona, z możliwością istnienia zamkniętych obszarów o wewnętrznej cyrkulacji. Mimo że uzyskane rozwiązania są ścisłymi rozwiązaniami postawionego problemu, nie należy się spodziewać, aby wszystkie one były realizowane w rzeczywistych warunkach. Wskazuje na to np. niejednoznaczność  $U(\eta; A)$  dla niektórych wartości  $A$  i można oczekiwać, że niektóre z tych rozwiązań nie będą spełniały warunków stateczności. Badania stateczności otrzymanych rozwiązań nie były przedmiotem niniejszej pracy i są one sprawą otwartą, jednakże ich przeprowadzenie wymagałoby jeszcze bardzo dużego nakładu pracy i wysiłków.

#### LITERATURA

1. K.Hiemenz; Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder /Thesis, Göttingen 1911/, Dingt. Poytechn. J., 326 /1911/.
2. D.Riabouchinsky; Comptes Rendues Acad. Sci. Paris 179 /1924/.

## ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ ПРИ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ СТЕНКЕ

## Р е з ю м е

Рассматривается точное решение уравнений Навьера-Стокеса для плоского течения вязкой и несжимаемой жидкости в пространстве ограниченном растягивающейся плоскостью. Это решение может быть использовано для описания структуры течения в ближайшей окрестности точек торможения на поверхности разделяющей две несмешивающиеся жидкости.

## VICINITY OF STAGNATION POINT AT EXTENSIBLE WALL

## S u m m a r y

An exact solution of the Navier-Stokes Equations for a plane, symmetric flow of a viscous, incompressible liquid in a half-space bounded by an extensible plane wall is considered. This solution may be applied to describe the structure of flow in the close vicinity of the stagnation point at the surface separating two non-mixing fluids.