ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ENERGETYKA z. 88 Nr kol. 807

Stanisław TOKARZEWSKI

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Warszawa

KLASA ŚCISŁYCH, OSIOWO-SYMETRYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ STOKESA

Streszczenie: Osiowo-symetryczne równania Stokesa zostały rozwiązane ściśle w obszarze nieskończonego cylindra w przypadku, gdy warunki brzegowe postawione na jego powierzchni są wyrażone za pomocą funkcji dostatecznie gładkich. Wyniki uzyskano w postaci sum nieskończonych szeregów funkcyjnych.

1. Wstęp

Równiania Stokesa należą do podstawowych równań mechaniki cieczy i gazów. Stosuje się je do opisu tak zwanych przepływów powolnych charakteryzujących się małymi liczbami Reynoldsa. Przepływy takie realizują się na dużą skalę zarówno w technice, jak również w przyrodzie. Mamy z nimi do czynienia między innymi w procesach smarowania, sedymentacji, flotacji i wielu innych. Stąd poszukiwanie klas ścisłych rozwiązań równań Stokesa jest ważne nie tylko z teoretycznego, ale również praktycznego punktu widzenia. W niniejszej pracy znaleziono klasę ścisłych rozwiązań równań Stokesa w przypadku, gdy na brzegu nieskończonego walca kołowego zadane są osiowo-symetryczne, dostatecznie gładkie funkcje. Identyczne zadanie rozwiązali w 1891 roku Sampson [5], w 1953 roku Savic [6] oraz w 1958 roku Haberman i Sayre [1]. Uzyskane przez nich rozwiązania mają postać całek Fouriera i są powszechnie stosowane w obliczeniach. Natomiast ścisłe rozwiązanie osiowo-symetrycznych równań Stokesa uzyskane w tej pracy ma postać nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami niezależnych od warunków brzegowych wielomianów mnożonych przez kolejne pochodne funkcji postawionych na powierzchni nieskończonego walca kołowego. Istotnie więc się różnią od rozwiązań podanych w pracach [1], [5], [6].

2. Sformułowanie zagadnienia

Do opisu powolnych, osiowo-symetrycznych przepływów stacjonarnych realizujących się w rurach kołowych używa się następujących równań Stokesa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_2) + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \qquad /2.1a/$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_2)\right] + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - \frac{\partial v_0}{\partial r} = 0, \qquad /2.1b/$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0 \qquad /2.1c/$$

wraz z następującymi warunkami brzegowymi

$$v_1(0,z)<\infty \quad , \quad v_2(0,z)<\infty , \qquad /2.1d/$$

$$v_1(1,z)=\frac{\partial}{\partial z}Q_1(z) \quad , \quad v_2(1,z)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}Q_2(z), \qquad /2.1e/$$

gdzie funkcje Q_1 oraz Q_2 są funkcjami klasy C^{∞} z góry danymi. Jako zmienne bezwymiarowe przyjęto

$$v_0=\frac{v_0'R'}{\mu V'} , \quad v_1=\frac{v_1'}{V'} , \quad v_2=\frac{v_2'}{V'} , \quad r=\frac{r'}{R'} , \quad z=\frac{z'}{R'} . \qquad /2.1f/$$

Występujące w /2.1f/ wielkości nazywać będziemy odpowiednio: ciśnieniem, prędkością wzdłużną, prędkością promieniową, współrzędną promieniową i współrzędną wzdłużną. Wyznaczenie klasy funkcji $\{v_0(r,z), v_1(r,z), v_2(r,z)\}$ ściśle rozwiązującej zagadnienie brzegowe /2.1/ jest głównym celem niniejszej pracy.

3. Metoda rozwiazania

Wykorzystując warunki brzegowe /2.1d/ można drogą prostych przekształceń matematycznych sprowadzić układ równań /2.1a-c/ do następującej postaci

$$v_1=-\left(L^2+2L\right)v_1+\frac{r^2}{2}\varphi(z)+\psi(z), \qquad /3.1a/$$

$$v_2=-\frac{1}{r}\int_0^r r\frac{\partial v_1}{\partial z}dr , \qquad /3.1b/$$

$$v_0=-\frac{\partial v_1}{\partial z}+\int_0^r\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}dr+\int^z\varphi(z)dz, \qquad /3.1c/$$

gdzie

$$L=\int_0^r\frac{1}{r}dr\int_0^r r\frac{\partial^2}{\partial z^2}dr \qquad /3.1d/$$

jest operatorem liniowym, natomiast funkcje $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$ są dowolnymi funkcjami zmiennej z. Należy zauważyć, że równanie /3.1a/ jest równaniem biharmonicznym zapisanym w postaci różniczkowo-całkowej. Ściłe rozwiązanie równania /3.1a/ daje się zapisać w postaci następującej

$$v_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(L^2+2L\right)\right]^n\left(\frac{r^2}{2}\varphi(z)+\psi(z)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)L^n\left(\frac{r^2}{2}\varphi(z)+\psi(z)\right). \qquad /3.1d'/$$

Po wykonaniu w /3.1d'/ działań wskazanych przez różniczkowo-całkowy operator /3.1d/ otrzymujemy

$$v_1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left\{\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!!}\varphi^{(2n)}_{(z)}+\frac{r^{2n}}{2n!!}\psi^{(2n)}_{(z)}\right\}, \qquad /3.1e/$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\varphi(z)=\varphi^{(2n)}_{(z)} , \quad \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\psi(z)=\psi^{(2n)}_{(z)} , \qquad /3.1f/$$

$$2n!!=2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot \quad (2n)^2. \qquad /3.1g/$$

Oznaczenia /3.1f-g/ używane będą w dalszej części pracy. Dowolne funkcje $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$ przedstawmy w postaci sum następujących nieskończonych szeregów

$$\varphi(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s^1 Q_{1(z)}^{(2s+1)}+\alpha_s^2 Q_{2(z)}^{(2s+1)},$$
$$\psi(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s^1 Q_{1(z)}^{(2s+1)}+\beta_s^2 Q_{2(z)}^{(2s+1)}, \qquad /3.1h/$$

gdzie α_s^j i β_s^j są stałymi współczynnikami. Stosując do związków /3.1h/ oraz /3.1e/ kryterium d'Alemberta otrzymujemy następujące nierówności

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{\alpha_{s+1}^j}{\alpha_s^j}\,\frac{Q_{j(z)}^{(2s+2)}}{Q_{j(z)}^{(2s)}}\right|<1,\quad \lim_{s\to\infty}\left|\frac{\beta_{s+1}^j}{\beta_s^j}\,\frac{Q_{j(z)}^{(2s+2)}}{Q_{j(z)}^{(2s)}}\right|<1, \qquad /3.1i/$$

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{1}{(2s)^2}\,\frac{Q_{j(z)}^{(2s+2)}}{Q_{j(z)}^{(2s)}}\right|<1 \qquad /3.1j/$$

gwarantujące szeregowi /3.1e/ zbieżność w obszarze nieskończonego walca kołowego o promieniu jednostkowym. Ciąg nieznanych współczynników α_s^j i β_s^j wyznaczymy w oparciu o warunki brzegowe /2.1e/. W tym celu wprowadźmy /3.1h/ do /3.1e/ i pogrupujmy wyrazy względem kolejnych rzędów pochodnych funkcji Q_1 oraz Q_2. Następnie spełniając za pomocą /3.1b/ warunki brzegowe /2.1e/ otrzymujemy następujące formuły rekurencyjne na współczynniki α_s^j i β_s^j.

$$\alpha_s^j=-8\sum_{n=1}^{s}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}\left[\frac{1}{4(n+2)}\alpha_{s-n}^j+n\,\beta_{s-n}^j\right],$$

$$\beta_s^j=\sum_{n=1}^{s}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}\left[\frac{n}{4(n+2)(n+1)}\alpha_{s-n}^j+(n-1)\beta_{s-n}^j\right], \qquad /3.1k/$$

$$\alpha_0^1=8,\ \beta_0^1=-1,\qquad \alpha_0^2=16,\ \beta_0^2=-4.$$

Sumę szeregu /3.1e/ można również przedstawić w innych równoważnych postaciach. Na przykład grupując w /3.1e/ wyrazy względem kolejnych pochodnych funkcji Q_j otrzymujemy

$$v_1=\sum_{s=0}^{\infty}W_s^{1,1}(r)\,Q_{1(z)}^{(2s+1)}+W_s^{1,2}(r)\,Q_{2(z)}^{(2s+1)} \qquad /3.2a/$$

gdzie funkcje

$$W_s^{1,j}(r)=\sum_{n=0}^{s}(-1)^n(n+1)\left[\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!!}\alpha_{s-n}^j+\frac{r^{2n}}{(2n)!!}\beta_{s-n}^j\right] \qquad /3.2b/$$

są, jak widać, wielomianami zmiennej r. Po rozwinięciu funkcji Q_j w szereg Taylora, szereg /3.2a/ przekształca się do następującej postaci

$$v_1=\sum_{n=1}^{\infty}W_n^{1,1}(r,z-z_0)\,Q_{1(z_0)}^{(n)}+W_n^{1,2}(r,z-z_0)\,Q_{2(z_0)}^{(n)} \qquad /3.3a/$$

przy czym

$$W_n^{1,j}(r,z-z_0)=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}W_s^{1,j}(r)\,\frac{(z-z_0)^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!} \qquad /3.3b/$$

są wielomianami dwóch zmiennych r i z, gdzie $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie przekraczającą wartości $\frac{n-1}{2}$.

Każdy z trzech szeregów funkcyjnych /3.1e/,/3.2a/ oraz /3.3a/ dąży oczywiście do tej samej granicy spełniającej ściśle równanie biharmoniczne /3.1a/ oraz warunki brzegowe dane związkami /3.1b/ i /2.1e/.

4. Zakres stosowalności

Jeśli funkcje Q_j postawione na powierzchni walca kołowego spełniają nierówności /3.1i-j/, wówczas szeregi /3.1e/,/3.2a/,/3.3a/ są zbieżne, a to oznacza, że są ścisłymi rozwiązaniami równania biharmonicznego /3.1a/. Wyznaczenie dokładnego zakresu stosowalności szeregów /3.1e/,/3.2a/, /3.3a/ wymaga rozwiązania nierówności /3.1i-j/, co ze względu na skomplikowane formuły iteracyjne /3.1k/ jest bardzo trudne. Z przeprowadzonego oszacowania wynika, że następująca nierówność

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{Q_j^{(2s+2)}(z)}{Q_j^{(2s)}(z)}\right|<1 \qquad /4.1/$$

gwarantuje szeregom /3.1e/,/3.2a/,/3.3a/ zbieżność w obszarze nieskończonego walca kołowego o promieniu jednostkowym. Stąd wynika, że uzyskane w tej pracy klasy rozwiązań dane związkami /3.1e/,/3.2a/ i /3.3a/ na pewno nie są klasami pustymi.

5. Dyskusja otrzymanych rozwiązań

Ścisłe rozwiązanie równania biharmonicznego /3.1a/ spełniające warunki brzegowe /3.1b/,/2.1d-e/ otrzymano w niniejszej pracy w postaci trzech nieskończonych szeregów funkcyjnych /3.1e/,/3.2a/,/3.3a/. Skończone sumy cząstkowe szeregów /3.1e/,/3.2a/,/3.3a/ kolejno: nie spełniają ani równania biharmonicznego, ani warunków brzegowych; spełniają warunki brzegowe, nie spełniają równania biharmonicznego; spełniają równanie biharmoniczne nie spełniają warunków brzegowych. W szeregach /3.1e/,/3.2a/ oraz /3.3a/ występują współczynniki α_s^j, β_s^j określone formułą iteracyjną /3.1k/. Współczynniki te nie zależą od warunków brzegowych /2.1d-e/. Są więc dla typu zadań rozwiązywanych w tej pracy wielkościami charakterystycznymi. Wartości kilku pierwszych współczynników α_s^j i β_s^j równają się

$$\begin{gathered}\alpha_0^1=8,\ \alpha_1^1=-\frac{2}{3},\ \alpha_2^1=-\frac{13}{144},\ \beta_0^1=-1,\ \beta_1^1=-\frac{1}{12},\ \beta_2^1=-\frac{1}{288}\\ \alpha_0^2=16,\ \alpha_1^2=-\frac{16}{3},\ \alpha_2^2=-\frac{25}{72},\ \beta_0^2=-4,\ \beta_1^2=-\frac{1}{6},\ \beta_2^2=\frac{1}{288}\end{gathered} \qquad /5.1/$$

Również wielomiany $W_s^{ij}(r)$ oraz $W_n^{ij}(r,z_0)$ występujące w szeregach /3.2a/ i /3.3a/ nie zależą od warunków brzegowych /2.1d-e/. Między nimi zachodzi prosty związek

$$W_s^{ij}(r)=W_{2s+1}^{ij}(r,0) \qquad /5.2/$$

Kilka pierwszych wielomianów $W_s^{ij}(r)$ oraz $W_s^{ij}(r,z)$ wyznaczonych na podstawie /3.1k/ i /3.2b/ zestawiono w punkcie 7 pracy. Łatwo zauważyć, że warunki brzegowe /2.1d/ przyjęto,pierwszy z dokładnością do dowolnej stałej,drugi z dokładnością do dowolnej funkcji liniowej.Zadanie brzegowe sformułowane związkami /3.1a-b/,/2.1d-e/ nie ma więc jednoznacznego rozwiązania.Można pokazać,że funkcję $v_1(r,z)$ uzyskuje się z dokładnością do funkcji kwadratowej zależnej od współrzędnej r.Funkcje Q_j,reprezentujące prędkości brzegowe,zostały wprowadzone wyłącznie w celu uproszczenia zapisu uzyskanych wyników.

6.Porównanie otrzymanych wyników

Ogólne rozwiązanie równania biharmonicznego,powszechnie używane w literaturze [1],[5],[6],uzyskał Sampson w postaci sumy następujących całek Fouriera

$$v_1 = \int_0^\infty \{A(t)\cdot t\cdot I_0(rt) + B(t)[rt\, I_1(rt) + 2I_0(rt)]\}\cdot [C(t)\sin(zt) + D(t)\cos(zt)], \qquad /6.1/$$

gdzie A/t/,B/t/,C/t/,D/t/ są odpowiednio nieznanymi funkcjami,zaś I_0, I_1 zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rodzaju.Wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają postać nieskończonych szeregów funkcyjnych danych związkami /3.1e/,/3.2a/,/3.3a/.Istotna różnica między /6.1/ i /3.1e/, /3.2a/,/3.3a/ tkwi głównie w sposobie wprowadzania do /6.1/ oraz /3.1e/, /3.2a/ i /3.3a/warunków brzegowych.O ile w przypadku /6.1/ należy na warunkach brzegowych dokonać transformacji Fouriera,o tyle w przypadkach /3.1e/,/3.2a/ oraz /3.3a/ wystarczy policzyć kolejne pochodne funkcji postawionych na powierzchni walca kołowego.W zależności więc od tego,jaka operacja dokonywana na warunkach brzegowych jest prostsza,wygodniej jest w praktycznych obliczeniach stosować bądź związek /6.1/,bądź jeden ze związków /3.1e/,/3.2a/,/3.3a/.

7.Klasa ścisłych rozwiązań równań Stokesa

Ogólne,ścisłe rozwiązanie zagadnienia brzegowego /2.1/ wygodnie jest zapisać,wychodząc ze związków /3.2a/,/3.1b/,/3.1c/,w następującej postaci

$$v_i = \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{\infty} W_s^{i,j}(r)\, Q_j^{(2s+i)}(z) \quad ; \quad i=0,1,2 \qquad /7.1a/$$

Między wielomianami $W_s^{i,j}(r)$ zachodzą następujące związki

$$W_s^{2,j}(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r r\, W_s^{1,j}(r)\,dr \quad , \qquad s \geq 0 \qquad /7.1b/$$

$$W_s^{0,j}(r) = (\alpha_s^j - W_{s-1}^{1,j}(r) + \int_0^r W_{s-2}^{2,j}(r)\,dr) \quad , \qquad s \geq 0, \qquad /7.1c/$$

$$W_s^{i,j}(r) = 0 \quad , \qquad s < 0, \qquad /7.1d/$$

gdzie funkcja wejściowa $W_s^{1,j}(r)$ dana jest związkami /3.2b/,/3.1k/. Wielomiany $W_s^{i,j}(r)$ policzone przykładowo dla trzech pierwszych wartości indeksu s równają się

$$W_0^{0,1}(r)=8 \quad , \quad W_0^{0,2}(r)=16 \; ,$$
$$W_1^{0,1}(r)=-2r^2+\frac{1}{3} \quad , \quad W_1^{0,2}(r)=-4r^2-\frac{4}{3} \; , \qquad /7.2a/$$
$$W_2^{0,1}(r)=\frac{r^4}{8}-\frac{r^2}{12}-\frac{1}{144} \quad , \quad W_2^{0,2}(r)=\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{3}-\frac{13}{72} \; ,$$

$$W_0^{1,1}(r)=2r^2-1 \quad , \quad W_0^{1,2}(r)=4r^2-4 \; ,$$
$$W_1^{1,1}(r)=-\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{3}-\frac{1}{12} \quad , \quad W_1^{1,2}(r)=-\frac{r^4}{2}+\frac{2r^2}{3}-\frac{1}{6} \; , \qquad /7.2b/$$
$$W_2^{1,1}(r)=\frac{r^6}{96}-\frac{5r^4}{192}+\frac{11r^2}{576}-\frac{1}{288} \quad , \quad W_2^{1,2}(r)=\frac{r^6}{48}-\frac{r^4}{48}-\frac{r^2}{288}+\frac{1}{288} \; ,$$

$$W_0^{2,1}(r)=-\frac{1}{2}r^3+\frac{1}{2}r \quad , \quad W_0^{2,2}(r)=-r^3+2r \; ,$$
$$W_1^{2,1}(r)=\frac{r^5}{24}-\frac{r^3}{12}+\frac{r}{24} \quad , \quad W_1^{2,2}(r)=\frac{r^5}{12}-\frac{r^3}{6}+\frac{r}{12} \; , \qquad /7.2c/$$
$$W_2^{2,1}(r)=-\frac{r^7}{768}+\frac{5r^5}{1152}-\frac{11r^3}{2304}+\frac{r}{576} \quad , \quad W_2^{2,2}(r)=-\frac{r^7}{384}+\frac{r^5}{288}+\frac{r^3}{1152}-\frac{r}{576} \, .$$

Otrzymana klasa funkcji określona związkami /7.1/ oraz nierównościami /3.11i-j/ ściśle spełnia w obszarze nieskończonego walca kołowego osiowo-symetryczne równanie Stokesa /2.1a-c/,a także warunki brzegowe /2.1d-e/ Ścisłe rozwiązanie zagadnienia brzegowego /2.1/ można podać bez żadnych trudności wychodząc z szeregów /3.1e/,/3.1b-c/ oraz /3.3a/,/3.1b-c/.

8.Końcowe uwagi

Klasa ścisłych,osiowo-symetrycznych rozwiązań równań Stokesa dana wzorami /7.1/ ma kilka istotnych zalet.Po pierwsze można ją wyrazić za pomocą zamkniętego algorytmu obliczeniowego wygodnego do prowadzenia obliczeń numerycznych.Po drugie korzystanie z warunków brzegowych jest proste,polega bowiem na obliczaniu kolejnych pochodnych funkcji postawionej na powierzchni nieskończonego walca kołowego.Istotną wadą otrzymanych wyników /7.1/ są trudności w uzyskaniu informacji o dokładnym zakresie stosowalności rozwiązań /7.1/.

LITERATURA

[1] HABERMAN W.L,SAYRE,R.M,Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes,David W.Taylor Model Basin Report No 1143,U.S.Navy Dept. 1958.

[2] HAPPEL J,BRENNER H,Low Reynolds Number Hydrodynamics,Prentice Hall Englewood Cliffs,New Jersey,1965.

[3] LAMB H,Hydrodynamics, 6 th ed.London Cambr. Univ.Press,1932.

[4] LANGLOIS W,E,Slow Viscous Flow,I Macmillan Comp.New York,1964.

[6] SAMPSON R.A.On Stokes current function,Phil.Trans.Roy.Soc.A182,449, 1891.

[7] SZANIAWSKI A,ZACHARA A,Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami ,Mech.Teor.i Stos.3,16,1978.

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ОСЕ-СИММЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИИ СТОКЕСА

Р е з ю м е

Найдено точное решение уравнений Стокеса для случая бесконечного цилиндра, когда граничные условия на плоскостях ограничивающих цилиндер выражены через функции достаточно гладкие. Решения тогда получается в форме бесконечных функциональных рядов.

CLASS OF EXACT SOLUTIONS OF AXI-SYMMETRICAL STOKES EQUATIONS

S u m m a r y

Axi-symmetrical Stokes equations have been solved exactly in a domain of an infinite cylinder for the case, when boundary contidions prescribed at the surface of the cylinder are expressed by functions smooth enough. Results have been obtained in the form of infinite functional series.