ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ENERGETYKA z. 88 Nr kol. 807

Ewa TULISZKA-SZNITKO

Instytut Techniki Cieplnej i Silników Spalinowych
Politechnika Poznańska

PRZEPŁYW CZYNNIKA ŚCIŚLIWEGO WOKÓŁ WALCA[x)]

Streszczenie. W pracy podano koncepcje rozwiązania przepływu ściśliwego wokół walca. Do opisu omawianego przepływu użyto równań Eulera, równania ciągłości i równania energii.

Problem przepływu płaskiego czynnika ściśliwego przez palisadę łopatkową lub wokół pojedynczego profilu rozwiązywany jest często metodą odwzorowania konforemnego transformującego obszar o skomplikowanym kształcie na obszar o kształcie prostym. W przypadku omawianych zagadnień przepływowych /przepływ przez palisadę lub wokół pojedynczego profilu/ w wyniku transformacji konforemnej otrzymujemy koło. Z tego punktu widzenia bardzo istotnym zagadnieniem jest rozwiązanie przepływu wokół walca.

Prezentowany artykuł zawiera koncepcje rozwiązywania przepływu stacjonarnego, poddźwiękowego czynnika ściśliwego i nielepkiego wokół walca przy napływie jednorodnym w nieskończoności.

Do opisu omawianego przepływu użyto następujący układ równań:

równania Eulera w kierunku x i y

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad /1/$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad /2/$$

równanie ciągłości

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 \qquad /3/$$

równanie energii

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{P}{\varrho} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{P_o}{\varrho_o} \qquad /4/$$

---

x) Artykuł stanowi fragment rozprawy doktorskiej "Przepływ transoniczny przez palisadę płaską" wykonywanej pod kierunkiem prof. W.J.Prosnaka.

gdzie: u i v - są składowymi wektora prędkości odpowiednio w kierunku x i y,

p - ciśnienie,

ϱ - gęstość,

$\varkappa$ - wykładnik izentropy,

ϱ_0 i p_0 - gęstość i ciśnienie stanu stagnacji.

W pracy założono, że parametry przepływu czynnika ściśliwego p, ϱ, u i v są sumą odpowiednich parametrów nieściśliwych p', ϱ', u', v' oraz pewnej wartości dodatkowej p_d, ϱ_d, u_d, v_d.

$$u = u' + u_d \tag{/5/}$$

$$v = v' + v_d \tag{/6/}$$

$$p = p' + p_d \tag{/7/}$$

$$\varrho = \varrho' + \varrho_d \tag{/8/}$$

Po wprowadzeniu zależności /5/, /6/, /7/, /8/ do równań /1/, /2/, /3/, /4/ otrzymujemy:

$$(u + u_d)\frac{\partial(u + u_d)}{\partial x} + (v + v_d)\frac{\partial(u + u_d)}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho + \varrho_d}\frac{\partial(p + p_d)}{\partial x} \tag{/9/}$$

$$(u + u_d)\frac{\partial(v + v_d)}{\partial x} + (v + v_d)\frac{\partial(v + v_d)}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho + \varrho_d}\frac{\partial(p + p_d)}{\partial y} \tag{/10/}$$

$$(\varrho + \varrho_d)\frac{\partial(u + u_d)}{\partial x} + (u + u_d)\frac{\partial(\varrho + \varrho_d)}{\partial x} + (\varrho + \varrho_d)\frac{\partial(v + v_d)}{\partial y} + (v + v_d)\frac{\partial(\varrho + \varrho_d)}{\partial y} = 0 \tag{/11/}$$

$$\frac{(u + u_d)^2 + (v + v_d)^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p + p_d}{\varrho + \varrho_d} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varrho_0} \tag{/12/}$$

W powyższych wzorach pominięto dla prostoty zapisu znak prim nad parametrami nieściśliwymi. Oznaczenia te będą stosowane w dalszej części artykułu.

Uzyskany układ równań jest silnie nieliniowy. W celu zlinearyzowania przyjęto następujące uproszczenie:

$$\frac{1}{\varrho + \varrho_d} = \frac{1}{\varrho}\frac{1}{1 + \frac{\varrho_d}{\varrho}} \approx \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{\varrho_d}{\varrho}\right) \tag{/13/}$$

Związek /13/ obowiązuje, gdy stosunek ϱ_d/ϱ jest dużo mniejszy od jedności. W zakresie prędkości poddźwiękowych a nawet transonicznych warunek ten jest spełniony. Przy stosowaniu równania /13/ do równań /9/, /10/, /11/, /12/ oraz po wykorzystaniu zależności obowiązujących dla przepływu nieściśliwego układ równań przybiera postać:

$$u\frac{\partial u_d}{\partial x} + u_d\frac{\partial u}{\partial x} + u_d\frac{\partial u_d}{\partial x} + v\frac{\partial u_d}{\partial y} + v_d\frac{\partial u}{\partial y} + v_d\frac{\partial u_d}{\partial y} =$$

$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_d}{\partial x} + \frac{1}{\varrho^2}\varrho_d\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\varrho^2}\varrho_d\frac{\partial p_d}{\partial x} \qquad /14/$$

$$u\frac{\partial v_d}{\partial x} + u_d\frac{\partial v}{\partial x} + u_d\frac{\partial v_d}{\partial x} + v\frac{\partial v_d}{\partial y} + v_d\frac{\partial v_d}{\partial y} + v_d\frac{\partial v_d}{\partial y} =$$

$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_d}{\partial y} + \frac{1}{\varrho^2}\varrho_d\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\varrho^2}\varrho_d\frac{\partial p_d}{\partial y} \qquad /15/$$

$$u\frac{\partial \varrho_d}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho_d}{\partial y} + \varrho\frac{\partial u_d}{\partial x} + \varrho\frac{\partial v_d}{\partial y} = 0 \qquad /16/$$

$$u\,u_d + v\,v_d + \frac{u_d^2 + v_d^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{p_d}{\varrho} - \frac{p\,\varrho_d}{\varrho^2} - \frac{p_d\,\varrho_d}{\varrho^2}\right) = 0 \qquad /17/$$

Powyższy układ równań rozwiązywany jest metodą iteracyjną. W pierwszym przybliżeniu pominięto wielkości o rząd mniejsze, a mianowicie:

$$u_d\frac{\partial u_d}{\partial x},\quad v_d\frac{\partial u_d}{\partial y},\quad u_d\frac{\partial v_d}{\partial x},\quad v_d\frac{\partial v_d}{\partial y},\quad \frac{1}{\varrho^2}\varrho_d\frac{\partial p_d}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\varrho^2}\varrho_d\frac{\partial p_d}{\partial y},\quad \varrho_d\frac{\partial u_d}{\partial x},\quad u_d\frac{\partial \varrho_d}{\partial x},\quad \varrho_d\frac{\partial v_d}{\partial y},\quad u_d\frac{\partial \varrho_d}{\partial},$$

$$\frac{u_d^2 + v_d^2}{2},\quad \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\;\frac{p_d\,\varrho_d}{\varrho^2} \qquad /18/$$

Wyrażenia te będą uwzględnione w następnych iteracjach.

Kolejne przekształcenie układu równań /14/, /15/, /16/, /17/ polega na wyznaczeniu ϱ_d z równania energii /17/, obliczeniu pochodnych $\frac{\partial \varrho_d}{\partial x}$ i $\frac{\partial \varrho_d}{\partial y}$ oraz wprowadzeniu tych zależności do równań /14/, /15/, /16/.

$$\varrho_d = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{\varrho^2}{p}\,(u\,u_d + v\,v_d) + \frac{\varrho}{p}\,p_d \qquad /19/$$

Po wprowadzeniu uproszczeń /18/, zależności /19/ oraz po przejściu na układ współrzędnych biegunowych R, θ układ równań /14/, /15/, /16/ przybiera następującą postać:

$$a\,u_d + b\,v_d - c\,p_d + \frac{\partial u_d}{\partial R}(u\,R_x + v\,R_y) + \frac{\partial u_d}{\partial \theta}(u\,\theta_x + v\,\theta_y) +$$

$$+ \frac{\partial p_d}{\partial R}\,R_x\,\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial p_d}{\partial \theta}\,\theta_x\,\frac{1}{\varrho} = 0 \qquad /20/$$

$$e\,u_d + f\,v_d - g\,p_d + \frac{\partial v_d}{\partial R}(u\,R_x + v\,R_y) + \frac{\partial v_d}{\partial \theta}(u\,\theta_x + v\,\theta_y) +$$

$$+ \frac{\partial p_d}{\partial R} R_y \frac{1}{\varrho} + \frac{\partial p_d}{\partial \theta} \theta_y \frac{1}{\varrho} = 0 \qquad /21/$$

$$i\, u_d - l\, v_d + r\, p_d + \frac{\partial u_d}{\partial R}\left[j R_x + k R_y\right] + \frac{\partial u_d}{\partial \theta}\left[j \theta_x + k \theta_y\right] +$$

$$+ \frac{\partial v_d}{\partial R}\left[k R_x + m R_y\right] + \frac{\partial v_d}{\partial \theta}\left[k \theta_x + m \theta_y\right] + \frac{\partial p_d}{\partial R}\left[n R_x + s R_y\right] +$$

$$+ \frac{\partial p_d}{\partial \theta}\left[\theta_x n + s \theta_y\right] = 0 \qquad /22/$$

gdzie:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{u}{p}$$

$$b = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{v}{p}$$

$$e = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{u}{p}$$

$$f = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{v}{p}$$

$$c = \frac{1}{\varrho p} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad /23/$$

$$g = \frac{1}{\varrho p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$j = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\varrho^2 u^2}{p} + \varrho$$

$$m = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\varrho^2 v^2}{p} + \varrho$$

$$n = u \frac{\varrho}{p}$$

$$s = v \frac{\varrho}{p}$$

$$r = \left[- \frac{\varrho}{p^2} (v P_y + u P_x)\right]$$

$$k = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\varrho^2}{p} u v$$

$$i = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\varrho^2}{p^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} u p - u^2 \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} p - \frac{\partial p}{\partial y} u v\right)$$

$$l = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\varrho^2}{p^2} \left(u p \frac{\partial v}{\partial x} - u v \frac{\partial p}{\partial x} + v p \frac{\partial v}{\partial y} - v^2 \frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

Występujące w zależnościach /23/ wielkości u, v, p, ϱ oraz pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ są wielkościami znanymi z przepływu nieściśliwego wokół walca. Pochodne R_x, R_y, θ_x, θ_y wynikają z zamiany układu współrzędnych i wynoszą odpowiednio:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{\sin \Theta}{R} \qquad /23a/$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\cos \Theta}{R}$$

Układ równań /20/, /21/, /22/ rozwiązywany jest za pomocą różnic skończonych /centralnych/ w obszarze prostokątnym /rys. 2/ przy następujących warunkach brzegowych:

a/ $R \to \infty \quad u_d = v_d = p_d = 0$

b/ w punkcie spływu $v_d = u_d = 0$

c/ na obwodzie walca prędkość normalna do ciała równa jest zero. Warunek ten sprowadza się do następującej zależności obowiązującej na walcu:

$$\frac{u_d}{v_d} = \frac{u}{v} \qquad /24/$$

Omawiany układ równań zapisujemy w postaci równania macierzowego:

$$A \cdot X = B \qquad /25/$$

gdzie:

A - jest macierzą blokową siedmiopasmową a jej elementy są macierzami kwadratowymi 3 x 3

$$A_{ij} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}_{ij}$$

Poszczególne elementy macierzy A_{ij} są funkcjami zmiennych R i Θ.

X - wektor niewiadomych /jego elementy X_i są macierzymi prostokątnymi 3 x 1/

$$X_i = \begin{Bmatrix} u_{d\,i} \\ v_{d\,i} \\ p_{d\,i} \end{Bmatrix}$$

B - wektor o elementach B_i /B_i - macierz prostokątna 3 x 1/

Równanie /25/ rozwiązywane jest metodą eliminacji Gaussa.

Przedstawiony schemat obliczeń dotyczy pierwszego przybliżenia. Każde kolejne przybliżenie /k + 1/ wyznaczane jest z uwzględnieniem członów /18/ pominiętych w przybliżeniu pierwszym. Po uwzględnieniu tych zmian gęstość ρ_d, wyznaczana z równania energii /17/, określona jest zależnością:

$$\varrho_d^{k+1} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ \frac{\varrho^2}{p}\left(u\, u_d^{k+1} + v_d^{k+1}\ v\right) + \frac{\varrho}{p}\, p_d^{k+1} + t^k \qquad /26/$$

gdzie: $$t^k = \frac{1}{p}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ \varrho^2\left[(u_d^k)^2 + (v_d^k)^2\right] - \frac{p_d^k\ \varrho_d^k}{p} \qquad /27/$$

Parametry u_d, v_d, p_d z indeksem k (u_d^k, v_d^k , p_d^k) oznaczają wielkości ustalone w poprzedniej iteracji. Równania /20/, /21/, /22/ dla iteracji k + 1 przybierają następującą postać:

$$u_d^{k+1}\ a + v_d^{k+1}\ b - p_d^{k+1}\ c + \frac{\partial u_d}{\partial R}\left[(u + u_d)\, R_x + (v + v_d)\, R_y\right] +$$
$$+ \frac{\partial u_d^{k+1}}{\partial \theta}\left[(u + u_d^k)\, \theta_x + (v + v_d^k)\, \theta_y\right] + \frac{\partial p_d^{k+1}}{\partial R}\ R_x\ pc + \frac{\partial p_d^{k+1}}{\partial \theta}\ \theta_x\ pc = d1$$

/28/

$$u_d^{k+1}\ e + v_d^{k+1}\ f - p_d^{k+1}\ g + \frac{\partial v_d^{k+1}}{\partial R}\left[(u + u_d^k)\, R_x + (v + v_d^k)\, R_y\right] +$$
$$+ \frac{\partial v_d^{k+1}}{\partial \theta}\left[(u + u_d)\, \theta_x + (v + v_d)\, \theta_y\right] + \frac{\partial p_d^{k+1}}{\partial R}\ R_y\ pc + \frac{\partial p_d^{k+1}}{\partial \theta}\ \theta_y\ pc = d2$$

/29/

$$u_d^{k+1}\ ii + v_d^{k+1}\ ll + p_d^{k+1}\ rr + \frac{\partial u_d^{k+1}}{\partial R}\left[jj\ R_x + k2\ R_y\right] +$$
$$+ \frac{\partial u_d^{k+1}}{\partial \theta}\left[jj\ \theta_x + k2\ \theta_y\right] + \frac{\partial v_d^{k+1}}{\partial R}\left[k1\ R_x + mm\ R_y\right] +$$
$$+ \frac{\partial v_d^{k+1}}{\partial \theta}\left[k1\ \theta_x + mm\ \theta_y\right] + \frac{\partial p_d^{k+1}}{\partial R}\left[nn\ R_x + ss\ R_y\right] + \frac{\partial p_d^{k+1}}{\partial \theta}\left[nn\ \theta_x + ss\ \theta_y\right] +$$
$$+ pt^k = 0 \qquad /30/$$

gdzie:

współczynniki a, b, c, e, f, g określone są zgodnie ze wzorami /23/, natomiast pc, d1, d2, ii, ll, rr, jj, k2, k1, mm, nn, ss, pt obliczymy z następujących zależności:

$$ii = i + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\left\{u_d^k\left(\frac{\varrho^2}{p}\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varrho^2}{p^2}\frac{\partial p}{\partial x}\ u\right) + v_d^k\left(\frac{\varrho^2}{p}\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\varrho^2}{p^2}\ \frac{\partial p}{\partial y}\ u\right)\right\}$$

$$ll = l + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\left\{u_d^k\left(\frac{\varrho^2}{p}\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varrho^2}{p^2}\ \frac{\partial p}{\partial x}\ v\right) + v_d^k\left(\frac{\varrho^2}{p}\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\varrho^2}{p^2}\ \frac{\partial p}{\partial y}\ v\right)\right\}$$

$$rr = r - u_d^k\ \frac{\varrho}{p^2}\ \frac{\partial p}{\partial x} - v_d^k\ \frac{\varrho}{p^2}\ \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$jj = j + u_k^k\ \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ \frac{\varrho^2}{p}\ u + \varrho_d$$

$$mm = m + v_d^k\ \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ \frac{\varrho^2}{p}\ v + \varrho_d^k \qquad /31/$$

$$k1 = k + u_d^k\ \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ \frac{\varrho^2}{p}\ v$$

$$k2 = k + v_d^k \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \frac{\rho^2}{p} u$$

$$nn = n + u_d^k \frac{\rho}{p}$$

$$ss = s + v_d^k \frac{\rho}{p}$$

$$pt = (u + u_d^k) \frac{\partial t^k}{\partial x} + (v + v_d^k) \frac{\partial t^k}{\partial y}$$

W równaniach /31/ wielkości i, l, r, j, m, k, n, ,s, określone są równaniami /23/.

Pierwsze wyniki uzyskane z rozwiązania układu równań /28/, /29/, /30/ pozwalają mieć nadzieję, że zastosowany proces iteracyjny będzie szybkozbieżny. Należy również przypuszczać, że metoda po przeniesieniu na obszar w płaszczyźnie zespolonej oraz po uwzględnieniu zmian wynikających z odwzorowania konforemnego [1], dotyczących między innymi równań /23a/ punktu spływu, oraz wartości parametrów dla przepływu nieściśliwego, będzie mogła być zastosowana do rozwiązywania przepływu przez palisadę łopatkową lub wokół pojedynczego profilu.

LITERATURA

[1] W.J. Prosnak: "Teoria układu profilów lotniczych". WPAN 1981.

ПРОПЛЫВ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ ЦИЛИНДРА

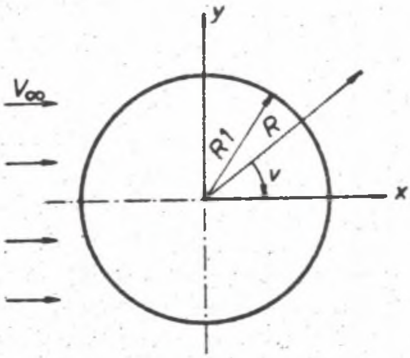
Р е з ю м е

В статьи представлено концепцию решения проплыва сжимаемой жидкости вокруг цилиндра. К описании этой проблемы употреблено уравнения Эулера, уравнение непрорывности и уравнение энергии.

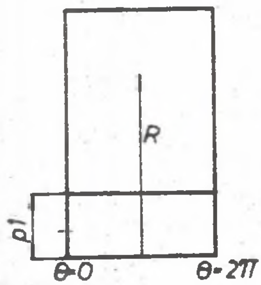
COMPRESSIBLE FLOW AROUND A CYLINDER

S u m m a r y

The paper presents the method of calculation compressible flow around a cylinder. Flow of fluid has been described by the equations of Euler, by the equation of flow continuity and by the equation of energy balance.



Rys. 1. Schemat układu współrzędnych (x,y) i (R,θ)



Rys. 2. Obszar rozwiązywania układu równań /28/,/29/,/30/ metodą różnic skończonych