

Władysław ZAPAŁA

## GENERATOR DYSKRETYCH ZAKŁÓCEN O STAŁEJ WARIANCJI I ZMIENNEJ GĘSTOŚCI WIDMOWEJ

Streszczenie. Przedstawiono teoretyczną analizę procesu stochastycznego z czasem dyskretnym, który powstaje w wyniku filtracji białego szumu przez odpowiednio dobrany filtr liniowy. Wyznaczono warunki stacjonarności procesu, jego wariancję oraz funkcję autokowariancji. Wykazano, że dla szczególnych wartości parametrów filtru wariancja procesu nie zależy od czasu dyskretnego opóźnienia lub maleje ze wzrostem tego parametru. Na podstawie równania procesu przedstawiono generator niestacjonarnych zakłóceń losowych o stałej wariancji i zmiennej gęstości widmowej.

## 1. WSTĘP

W zagadnieniach modelowania procesów stochastycznych z czasem dyskretnym ważną pozycję zajmują mieszane procesy autoregresji i średniej ruchomej (tzw. procesy ARMA) opisane równaniem:

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n})y_t = (1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_m z^{-m})e_t \quad (1)$$

gdzie:

$y_t$  - jest modelowanym zakłóceniem,

$e_t$  - ciąg nieskorelowanych zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym, wartości średniej równej zero i wariancji  $\sigma_e^2$ ,

$z^{-1}$  - operator przesunięcia wstecz,

$a_i, c_i$  - współczynniki modelu.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono proces stochastyczny z czasem dyskretnym o postaci:

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_n z^{-n} + a_{n+1} z^{-(n+1)})y_t = (1 + c_n z^{-n})e_t, \quad (2)$$

który dla pewnych wartości współczynników  $a_1, a_n, a_{n+1}, c_n$  charakteryzuje się tym, że:

a) wariancja procesu  $y_t$  jest stała i niezależna od zmian dyskretnego czasu opóźnienia  $n$ , przy czym transmitancja filtra określonego wzorem (2) odpowiada transmitancji filtra wąskopasmowego,

b) wariancja procesu  $y_t$  maleje przy wzroście dyskretnego czasu opóźnienia.

Właściwość wymieniona w punkcie (a) może być wykorzystana do modelowania niestacjonarnych zakłóceń stochastycznych o stałej w czasie wartości średniej, stałej wariancji i zmiennej gęstości widmowej.

## 2. RÓWNANIE RÓŻNICOWE PROCESU

Rozpatrzmy proces stochastyczny  $y_t$  z czasem dyskretnym opisany następującym równaniem:

$$y_t - \varphi_0 y_{t-1} - (1-p) \varphi_r^n y_{t-n} + \varphi_0(1-p) \varphi_r^n y_{t-n-1} = e_t - \varphi_r^n e_{t-n}, \quad (3)$$

gdzie:

$e_t$  - ciąg nieskorelowanych zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym wartości średniej równej zero i wariancji  $\sigma_e^2$ ,

$n$  - dyskretny czas opóźnienia,

$\varphi_0, \varphi_r, p$  - parametry procesu.

Mozna wykazać, że proces  $y_t$  jest procesem stacjonarnym, jeżeli jego parametry spełniają następujące warunki:

$$-1 < \varphi_0 < +1,$$

$$-1 < (1-p) \varphi_r^n < +1.$$

(4)

Proces opisany równaniem (3) otrzymamy np. analizując układ dyskretnego sterowania bez sygnału zewnętrznego o schemacie blokowym jak na rys.1, przy czym  $p = \frac{\Lambda_0}{\Lambda_r}$ .

Po przekształceniach równanie (3) ma postać:

$$y_t = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_n z^{-n} + \dots) e_t, \quad (5)$$

gdzie:

$z^{-1}$  - operator przesunięcia wstecz,  $z^{-1} e_t = e_{t-1}$ ,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \varphi_0, \alpha_2 = \varphi_0^2, \dots, \alpha_{n-1} = \varphi_0^{n-1},$$

$$\alpha_{n+j} = \varphi_0^{n+j} - \varphi_0^j \varphi_r^n + (1-p) \varphi_r^n \alpha_j, \text{ dla } j=0,1,2,3, \dots$$

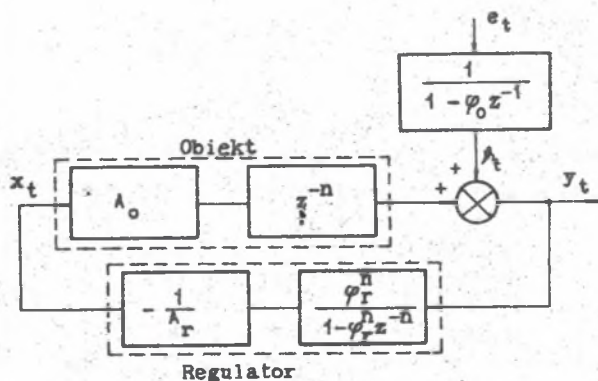
a wariancja  $\sigma_y^2$  procesu  $y_t$ :

$$\sigma_y^2 = \frac{1 - \varphi_0^{2n}}{1 - \varphi_0^2} (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots) \sigma_e^2, \quad (6)$$

gdzie:

$$b_0=1, \quad b_1 = \varphi_0^n - p \varphi_r^n, \quad b_2 = b_1 \varphi_0^n + p(1-p) \varphi_r^{2n},$$

$$b_j = (\varphi_0^n - \varphi_r^n) \varphi_0^{(j-1)n} + (1-p) \varphi_r^n b_{j-1} \quad \text{dla } j = 3,4,5 \dots$$



Rys.1. Schemat blokowy układu, którego wyjście stanowi proces stochastyczny  $y_t$ .

Fig.1. Block diagram of the system, the output of which is a stochastic process  $y_t$ .

### 3. FUNKCJA AUTOKOWARIANCJI PROCESU $y_t$ DLA SZCZEGÓLNYCH WARTOŚCI PARAMETRÓW

Dla  $p=1$  i  $\varphi_r \neq \varphi_0$  funkcja autokowariancji określona jest za pomocą wzoru:

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{1 + \varphi_0^{2n} - 2\varphi_0^n \varphi_r^n}{1 - \varphi_0^2} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k=0 \\ \frac{\varphi_0^k [1 - \varphi_0^{2(n-k)}] + (\varphi_0^n - \varphi_r^n)(\varphi_0^{n-k} - \varphi_0^k \varphi_r^n)}{1 - \varphi_0^2} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k < n \\ \frac{\varphi_0^n - \varphi_r^n}{1 - \varphi_0^2} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k=n \\ \frac{(\varphi_0^n - \varphi_r^n) \varphi_0^{k-n}}{1 - \varphi_0^2} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k > n \end{cases} \quad (7)$$

W przypadku, gdy parametry  $\varphi_r, \varphi_0$  spełniają warunek  $\varphi_r = \varphi_0 = \varphi$ , wartości funkcji autokowariancji procesu  $y_t$  można wyznaczyć ze wzoru:

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{1 - \varphi^{2n}}{(1 - \varphi^2) [1 - (1-p)^2 \varphi^{2n}]} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k=0 \\ \frac{\varphi^k [1 - \varphi^{2(n-k)}] + (1-p) \varphi^{2n-k} (1 - \varphi^{2k})}{(1 - \varphi^2) [1 - (1-p)^2 \varphi^{2n}]} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k < n \\ \frac{(1-p)^m \varphi^k (1 - \varphi^{2n})}{(1 - \varphi^2) [1 - (1-p)^2 \varphi^{2n}]} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k=mn, \\ & m=1, 2, 3, \dots \\ \frac{(1-p)^m \varphi^k [1 - \varphi^{2(n-j)}] + (1-p)^{m+1} \varphi^{m+2-j} (1 - \varphi^{2j})}{(1 - \varphi^2) [1 - (1-p)^2 \varphi^{2n}]} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k=mn+j, \\ & m=1, 2, 3, \dots \\ & j=1, 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (8)$$

Dla  $p=1$  i  $\varphi_x = \varphi_0 = \varphi$  równanie procesu stochastycznego

$$y_t = \frac{1 - \varphi^n z^{-n}}{1 - \varphi z^{-1}} \cdot e_t = \left[ 1 + \varphi z^{-1} + \varphi^2 z^{-2} + \dots + \varphi^{n-1} z^{-(n-1)} \right] e_t \quad (9)$$

opisuje błąd predykcji z wyprzedzeniem  $n$  kroków zakłócenia  $v_t$  (rys.1), a funkcja autokowariancji upraszcza się do:

$$r_k = \begin{cases} \frac{1 - \varphi^{2n}}{1 - \varphi^2} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k=0 \\ \frac{\varphi^k [1 - \varphi^{2(n-k)}]}{1 - \varphi^2} \cdot \sigma_e^2 & \text{dla } k < n \\ 0 & \text{dla } k \geq n \end{cases} \quad (10)$$

#### 4. PRZYKŁADY MODELOWANIA ZAKŁÓCEŃ PRZYPADKOWYCH

Dla  $p=2$  oraz  $\varphi_x = \varphi_0 = \varphi$  równanie procesu posiada postać:

$$y_t - \varphi y_{t-1} + \varphi^n y_{t-n} - \varphi^{n+1} y_{t-n-1} = e_t - \varphi^n e_{t-n} \quad (11)$$

Natomiast ze wzoru (8) wynika, że wariancja procesu  $y_t$

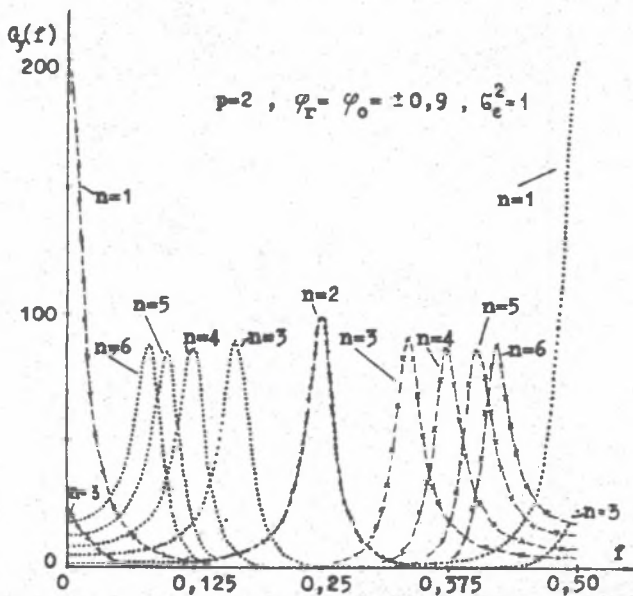
$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \varphi^2} = \sigma_v^2 \quad (12)$$

nie zależy od czasu opóźnienia i równa jest wariancji  $\sigma_v^2$  zakłócenia  $v_t$  sprowadzonego na wyjście układu (rys.1). Z drugiej strony, przyjmując proces  $y_t$  jako wynik filtracji białego szumu  $e_t$  przez filtr o transmitancji  $K_F(z^{-1})$  możemy zapisać:

$$G_y(f) = 2 \sigma_e^2 |K_F(f)|^2,$$

$$\begin{aligned}
 G_y^2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} G_y(f) df = 2 G_e^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \varphi^{2n} - 2\varphi^n \cos 2\pi n f}{(1 + \varphi^{2n} + 2\varphi^n \cos 2\pi n f)(1 + \varphi^{2n} - 2\varphi^n \cos 2\pi n f)} df = \\
 &= \frac{G_e^2}{1 - \varphi^2} .
 \end{aligned} \tag{13}$$

Z równania (13) wynika, że przy zmianach dyskretnego czasu opóźnienia  $n$  gęstość widmowa mocy ulega zmianie, ponieważ zmianom ulega kwadrat modułu transmitancji  $K_F(z^{-1})$ , natomiast wariancja procesu pozostaje stała. Przykładowe wykresy gęstości widmowej procesu  $y_t$  opisanego równaniem (11) przedstawiono na rys.2.

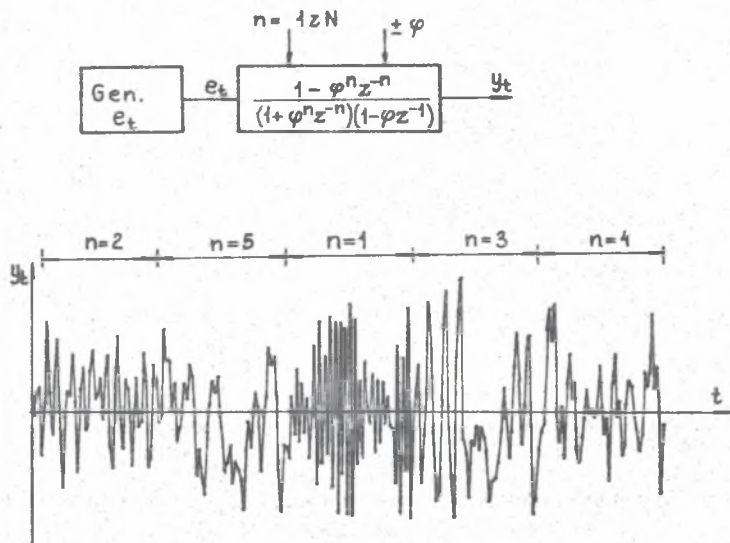


Rys.2. Gęstość widmowa procesu  $y_t$  dla różnych wartości dyskretnego czasu opóźnienia (linia przerywana - dla ujemnych wartości parametru  $\varphi$ ).

Fig.2. Spectral density of the process  $y_t$  for different discrete delay time values (broken line - for negative values of the parameter  $\varphi$ )

Przy stałej wartości parametru  $n$  równanie (11) można wykorzystać do generowania szumu wąskopasmowego. Niewielka modyfikacja, polegająca na losowym zadawaniu wartości  $n$  z zakresu liczb naturalnych od 1 do  $N$ , pozwala symulować specyficzny, niestacjonarny proces stochastyczny o stałej w czasie

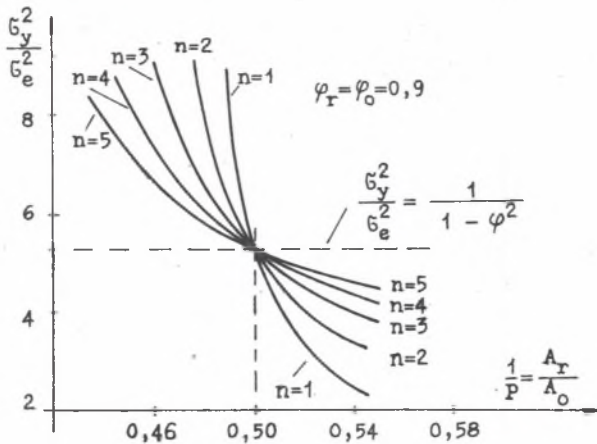
się wartości średniej, stałej wariancji, lecz zmiennej gęstości widmowej (rys.3). Przedstawiony proces może być również wykorzystany do generowania przebiegów o gęstościach widmowych ujawniających maksima dla określonych częstotliwości.



Rys.3. Przykład generatora niestacjonarnych zakłóceń o stałej wariancji i zmiennej gęstości widmowej.

Fig.3. An example of nonstationary random disturbance generator of constant variance and variable spectral density.

Należy również zwrócić uwagę, że proces  $y_t$ , określony za pomocą równania (3) dla  $\varphi_r = \varphi_0 = \varphi$  i  $p > 2$ , przy czym spełniony jest warunek (4), posiada wariancję, która maleje ze wzrostem dyskretnego czasu opóźnienia  $n$  (rys.4).



Rys.4. Zależność wariancji procesu  $y_t$  od dyskretnego czasu opóźnienia w otoczeniu punktu  $p=2$ .

Fig.4. Dependence of process variance  $y_t$  on discrete delay time in the neighborhood of point  $p=2$ .

## 5. WNIOSKI

Omówiono podstawowe własności procesu stochastycznego, który opisuje błąd na wyjściu układu dyskretnego sterowania ze sprzężeniem zwrotnym bez sygnału zewnętrznego, przy czym:

- obiekt stanowi element proporcjonalny z opóźnieniem,
- zakłócenie sprowadzone na wyjście układu opisane jest za pomocą procesu autoregresji pierwszego rzędu,
- parametry regulatora minimalnowariancyjnego różnią się od parametrów obiektu i zakłócenia.

Dla  $\varphi_r = \varphi_o = \varphi$  i  $p=2$  proces ten charakteryzuje się tym, że jego wariancja nie zależy od dyskretnego czasu opóźnienia, natomiast gęstość widmowa procesu, która zależy od tego parametru, posiada postać gęstości widmowej wąskopasmowego szumu losowego. Fakt ten może stanowić podstawę do wykorzystania równania opisującego proces do generowania dyskretnych zakłóceń losowych, których gęstość widmowa posiada maksima dla określonych częstotliwości. Zaletą takiego generatora jest jego prostota, wynikająca z braku potrzeby konstruowania szeregu filtrów środkowoprzepustkowych i ewentualnego skalowania związanego np. z warunkiem uzyskania



stałej wariancji generowanych przebiegów. Wadą generatora jest to, że maksima gęstości widmowej występują dla ściśle określonych unormowanych częstotliwości.

## LITERATURA

- [1] Box G.E.P., Jenkins G.M.: Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie. PWN, Warszawa 1983.
- [2] Mańczak K., Nahorski Z.: Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. PWT, Warszawa 1983.
- [3] Otnes R.K., Enochson L.: Analiza numeryczna szeregów czasowych. WNT, Warszawa 1978.
- [4] Phillipson P.H.: Optimum regulation of sampled-data processes. International Journal of Control, 1975, vol. 21, No. 5, pp. 785-793.
- [5] Wittenmark B.: A self-tuning predictor. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, No. 6, Dec. 1974.

ГЕНЕРАТОР ДИСКРЕТНЫХ ПОМЕХ С ПОСТОЯННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ  
И ПЕРЕМЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

## Р е з ю м е

Изложен теоретический анализ случайного процесса с дискретным временем, который возникает в результате фильтрации белого шума через подобранный соответствующим образом линейный фильтр.

Определены условия стационарности процесса, его дисперсия и функция автоковариации. Установлено, что для частных величин параметров фильтра дисперсия процесса не зависит от дискретного времени замедления или уменьшается по мере увеличения этого параметра.

На основании уравнения процесса представлен генератор нестационарных случайных помех с постоянной дисперсией и переменной спектральной плотностью.

DISCRETE DISTURBANCE GENERATOR OF CONSTANT VARIANCE  
AND VARIABLE POWER SPECTRAL DENSITY

## S u m m a r y

Theoretical analysis of the stochastic process with discrete time resulting from the white noise filtering through the properly matched line-pass filter has been presented. The stationary terms of the process, its variance and autocovariance function have been determined. It has been pointed out that the process variance for particular filter para-

meter values does not depend on discrete delay time or decreases whenever this parameter increases. Nonstationary random disturbance generator of constant variance and variable spectral density is presented on the basis of process equation.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Ewald Macha