

Bogdan DŻEGNIUK
Zygmunt NIEDOJADŁO
Jan PIEŁOK
Wiesław PIWOWARSKI

IDENTYFIKACJA CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNEJ PROCESU DEFORMACJI GÓROTWORU

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozważania dotyczące określenia parametrów modelu opisującego zjawisko deformacji górotworu na podstawie charakterystyki dynamicznej procesu. Dla modelu ciągłego (2.1) po zanalizowaniu funkcji $\Psi(c)$, korzystając z rozkładu granicznego można wyznaczyć $c(t)$. Model (2.1) nie uwzględnia czasu trwania eksploatacji, dlatego też wykorzystano model (3.2). Podstawą identyfikacji są wyniki pomiaru, gdzie wyróżnić można składową deterministyczną i czynnik losowy.

Procedurę wyznaczania parametrów oparto więc na metodzie największej wiarygodności. Wykazano, że jeśli estymatory mają rozkład normalny $N(0,0)$ wówczas algorytm można sprowadzić do metody najmniejszych kwadratów.

1. WPROWADZENIE

Istotny wpływ na rozwój badań dotyczących problematyki działania czynnika czasu w procesie deformacji wiąże się z pracami polskich uczonych, szczególnie S. Knothe'go [4]. Rezultatem dokonanych analiz procesu jest tu model określający chwilową prędkość obniżania się punktu górotworu pod wpływem eksploatacji podziemnej - opisem procesu jest tu równanie różniczkowe I rzędu.

Model opisu pod względem strukturalnym jest rozłączny (wymuszenie stacjonarne oraz funkcja czasu) - stąd identyfikacja winna obejmować obydwie części modelu. Z kolei oddzielna weryfikacja każdej funkcji eplotu jest praktycznie nie do zrealizowania, ponieważ samo zjawisko niepodzielne.

W pracy przedstawiona zostanie procedura określania parametrów równania różniczkowego I rzędu oraz zastąpienie opisu ciągłego przez opis dyskretny i weryfikacja modelu różnicowego.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Równanie opisu stanu nieustalonego procesu deformacji wg S. Knothe'go [4] posiada postać:

$$\frac{dw}{dt} = c(w^k - w) \quad (2.1)$$

gdzie:

- w - obniżenie punktu w chwili t ,
- w^k - obniżenie asymptotyczne (końcowe) danego punktu,
- c - parametr tzw. "współczynnik czasu" ($c > 0$)

z warunkiem początkowym $w(t = 0) = 0$, wówczas

$$w(t) = w^k - w^k \cdot f(t) \quad (2.2)$$

gdzie:

$f(t) = \exp(-c \cdot t)$ - funkcja czasu.

Zadanie polega na znalezieniu takiej wartości parametru "c" by spełniony został warunek:

$$\|w(t) - w^P(t)\| = \min \quad (2.3)$$

gdzie:

$w^P(t)$ - pomierzona wartość obniżenia w chwili t .

Realizacja warunku (2.3) wymaga, by funkcja $w^P(t)$ była różniczkowalna. Wiadomo, że funkcja $w^P(t)$ (wyniki pomiaru) nie spełnia warunku różniczkowości, dlatego poszukiwanie parametru "c" na podstawie kryterium (2.3) sensownie jest przeprowadzić numerycznie.

Z uwagi na konieczność ustalenia warunków granicznych warto prześledzić zachowanie się funkcji charakterystycznej dla $f(t)$ a mianowicie:

$$\Psi(c) = \frac{\exp(-c \cdot t) - 1}{c} \quad (2.4)$$

ciągłej i określonej dla $c \in (0, \infty)$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\exp(-ct) - 1}{c} = -t$$

Funkcja $\Psi(c)$ ma następujące własności:

a) $\Psi(c) < 0$, $c > 0$; $\Psi(c) = -t$, $c = 0$

$$b) \lim_{c \rightarrow \infty} \Psi(c) = \emptyset$$

$$c) \frac{d\Psi}{dc} > \emptyset$$

Warunek (2.3) należy rozszerzyć dla zbioru "n" punktów pomiarowych, co jest właściwym zagadnieniem dla sformułowanego problemu:

$$\|W - W^p\| = \min$$

gdzie

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

$$W^p = \{w_1^p, w_2^p, \dots, w_m^p\} \quad (2.5)$$

lub

$$\left\| \sum_{i=1}^m (w_i^k - w_i^k \cdot e^{-c \tau_i} - w_i^p) \right\| = \min_c$$

τ_i - kolejne chwile czasu trwania zjawiska,

$i = \{1, 2, \dots, m\}$ - zbiór punktów obserwacyjnych.

Warunek (2.5) można zrealizować korzystając z zasady najmniejszych kwadratów - rozwiązując odpowiednio zbudowany układ równań liniowych [1, 7]. Jednak ze względów rachunkowych wygodniej jest tu skorzystać z metody kolejnych przybliżeń [1].

3. MODEL DYSKRETNY

Można zauważyć, że w równaniu (2.1) nie uwzględnia się, jako argumentu, czasu trwania eksploatacji " t_e ". Wynika z tego, że czas $t_e \rightarrow \emptyset$, co w zasadzie jest niedopuszczalnym uproszczeniem. Jednym z możliwych dostosowań związku (2.2) - włączenie do zbioru argumentów czasu " t_e " - jest na podstawie [6] zależność (3.1)

$$\begin{aligned} w(t_1) &= w_1^k [1 - \exp(-c\Delta t)] \\ w(t_2) &= w_1^k [1 - \exp(-2c\Delta t)] = w_2^k [1 - \exp(-c\Delta t)] \\ &\vdots \\ w(t_n) &= w_1^k [1 - \exp(-nc\Delta t)] + w_2^k [1 - \exp(-(n-1)c\Delta t)] + \dots + \\ &\quad w_n^k [1 - \exp(-c\Delta t)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

W zapisie sigmoidnym zależność (3.1) można wyrazić następująco:

$$w(t_n) = \sum_{i=1}^n w_i^k [1 - \exp[-(n-i+1)c\Delta t]] \quad (3.2)$$

gdzie:

Δt - przyrost czasu trwania zjawiska

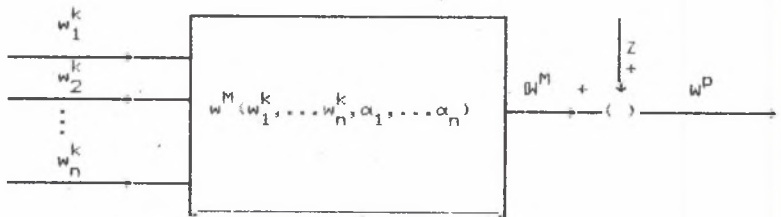
$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$

$i = \{1, 2, \dots, n\}$ - kolejne dyskretne chwile czasu.

Problem ponownie dotyczy identyfikacji modelu (3.2) na podstawie wartości sygnałów wejściowych $\{w_n^k\}$ oraz sygnału wyjściowego w^p . Ponieważ model (3.1) lub (3.2) uwzględnia jedynie wielkości deterministyczne, w rzeczywistości zaś na proces działają czynniki zwane zakłóceniami, dlatego celem porównania wielkości "w" i "w^p" do opisu wprowadzono zakłócenie "z", co schematycznie ilustruje rys. 1.

Proces deformacji obserwowany jest wyłącznie w dyskretnych chwilach czasu n. Działają tu zakłócenia przypadkowe z_1 ($i = 1, 2, 3, \dots$). Wyjście w^p zależy od wszystkich poprzednich wejść w_1^k przedstawionych za pomocą wektora czasowego $W_n^k = \{w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k\}$, przy czym przez wektor czasowy W_n^k rozumiemy wektor o wzrastającej liczbie składowych wraz z czasem dyskretnym n.

Algorytm identyfikacji parametrów ma dostęp w chwili n do wszystkich wartości wejściowych oraz do wszystkich poprzednich wartości wyjścia.



Rys. 1. Schemat blokowy procesu

Fig. 1. Block schematic diagram of the process

$$\begin{bmatrix} w_{11}^k, w_{12}^k, \dots, w_{1n}^k, w_1^p \\ w_{21}^k, w_{22}^k, \dots, w_{2n}^k, w_2^p \\ \vdots \\ w_{n1}^k, w_{n2}^k, \dots, w_{nn}^k, w_n^p \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Na podstawie (3.2) mamy:

$$w_n^M = f(w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \exp(-c_1 \cdot \Delta t) \\ \alpha_2 &= \exp(-2c_2 \cdot \Delta t) \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \exp(-n \cdot c_n \cdot \Delta t) \end{aligned} \quad (1)$$

Zgodnie z rys. 1 wielkość zmierzona w^P zależy od wielkości $\{w_1^k\}$ oraz występuje tu jedno zakłócenie addytywne w postaci zmiennej losowej "z", stąd na podstawie [2] otrzymamy:

$$w_1^P = w_1^M + z_1 = w^M(w_1^k, \alpha) + z_1 \quad (3.4)$$

Wyniki pomiaru zjawiska deformacji wskazują, że zakłócenia z są stacjonarne, tzn. nie zależą do chwili czasowej. W dalszych rozważaniach zakłada się, że zakłócenia mają wartość oczekiwaną $E(z) = 0$; stałą wariancję δ_z^2 oraz, że są wzajemnie niezależne.

$$E(z_i) = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

$$E(z_i z_j) = \begin{cases} \delta_z^2 & \text{dla } i=j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

Założenie stałości wariancji zmiennej losowej $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ jest w praktyce z reguły spełnione, bowiem pomiary są tu jednakowo dokładne. Ponadto kolejne serie pomiarów wykonywane są w dużych odstępach czasu - tym samym korelacje między zakłóceniami mogą być pomijalne i stąd zależności (3.5) i (3.6).

Problem identyfikacji sprowadza się do wyznaczenia estymatorów $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ nieznanymi wielkośćmi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ na podstawie wyników (3.3). Skorzystano tu z metody największej wiarygodności [3, 5].

Niech $f(w^P | w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k, \alpha)$ oznacza łączną gęstość prawdopodobieństwa dla próby $(w_1^P, w_2^P, \dots, w_n^P)$. Przy danych wartościach $w^P, w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k$ funkcja f staje się funkcją tylko parametrów α znana jako funkcja wiarygodności dla próby:

$$L(\alpha) = f(w^P | w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k, \alpha) \quad (3.7)$$

Przy estymacji metodą największej wiarygodności za ocenę estymatora $\hat{\alpha}$ nieznanymi parametrów α przyjmuje się tę wartość $\hat{\alpha}$, która maksymalizuje funkcję wiarygodności $L(\alpha)$ na zbiorze dopuszczalnych wartości α . Należy więc ustalić kryterium doboru estymatorów optymalnych. Wygodnie jest tu przyjąć kryterium oparte na różnicy pomiędzy wielkością w^P i w^M w poszczególnych chwilach obserwacji 1 ($i = 1, 2, \dots, n$).

Jeżeli dane są wartości $w^P, w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k$, można wyznaczyć estymator $e^T = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ zakłóceń $z^T = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. W tym celu równanie (3.4) zapiszmy następująco:

$$z = w^P - w^M = w^P - w^M(w^k, \alpha) \quad (3.8)$$

$$z_n = w_n^P - w_n^M = w_n^P - w_n^M(w_n^k, \alpha) \quad (3.9)$$

Zgodnie z założeniami (3.5) i (3.6) o zakłóceniach, wektor e przedstawia próbę $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(\phi, \delta^2)$, gdzie δ^2 jest wariancją "e".

Każda wartość e_i , $i = 1, 2, \dots, n$ przy zadanych w^P, w^k jest jednoznacznie wyznaczona przez estymator $\hat{\alpha}$ parametrów α oraz warunki początkowe równania. W dalszych rozważaniach założono zerowe warunki początkowe.

Na podstawie (3.9) mamy następującą zależność macierzową między wektorami w^P i e :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^P \\ w_2^P \\ \vdots \\ w_n^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \phi & \phi & \cdot & \cdot \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \phi & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdot & \alpha_1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ \vdots \\ w_n^k \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Z zależności (3.10) wynika, że dla zadanych wartości $\hat{\alpha}, w_1^k, w_2^k, \dots$, wektor "e" stanowi jednoznaczny obraz wektora w^P przy nieosobliwym przekształceniu liniowym (3.10). Istnieje więc następujące przekształcenie:

$$J(w_1^P, w_2^P, \dots, w_n^P) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial w_1^P} & \frac{\partial e_1}{\partial w_2^P} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial w_n^P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e_n}{\partial w_1^P} & \frac{\partial e_n}{\partial w_2^P} & \dots & \frac{\partial e_n}{\partial w_n^P} \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

gdzie

$J(w_1^P, \dots)$ - jakobian.

Na podstawie (3.11) wolno wnioskować, że funkcja wiarygodności dla próby $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ stanowi również poszukiwaną funkcję wiarygodności dla próby $\{w_1^p, w_2^p, \dots, w_n^p\}$.

Należy więc wyznaczyć takie wartości $\hat{\alpha}$ i $\hat{\sigma}$ aby otrzymać największą wartość funkcji wiarygodności $L(\cdot)$ określonej wg [3] następująco:

$$L(w_1^p, w_2^p, \dots, w_n^p, \hat{\alpha}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \hat{\sigma}} \exp \left[-\frac{e_n^2(w_1^p, w_2^p, \dots, w_n^p, \hat{\alpha})}{2\hat{\sigma}^2} \right] \quad (3.12)$$

Wyznaczenie optymalnego wektora parametrów α odbywa się według znanych reguł:

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \prod_{i=1}^n f(e_n | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha_1} = 0$$

stąd otrzymujemy układ równań:

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha_1} = \prod_{i=1}^n f(e_n | \alpha_1, \dots) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.14)$$

Rozwiązanie układu równań (3.14) jest uciążliwe, wygodnie więc jest posłużyć się tu znanym podstawieniem logarytmicznym - wówczas na podstawie [3, 5] zależność (3.14) można zapisać:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \sum_{i=1}^n f(e_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3.15)$$

Z kolei na podstawie (3.10) mamy:

$$e_1 = w_1^p - w^M(w_1^k; \alpha) \quad (3.16)$$

wówczas po przekształceniu układ równań (3.15) przyjmie postać:

$$\frac{\alpha}{\partial \alpha_1} \sum_{i=1}^n [w_1^p - w^M(w_1^k; \alpha)]^2 \quad (3.17)$$

Jeżeli próba estymatorów "e" posiada rozkład normalny, to metoda największej wiarygodności sprowadza się do metody najmniejszych kwadratów, co potwierdza związek (3.17).

Dla innych rozkładów prawdopodobieństwa próby "e" można stosować zasadę najmniejszej sumy kwadratów, przy czym należy ustalić normę pomiędzy zbiorami W^M i W^P .

Rozwiązanie układu równań algebraicznych (3.17) - pod względem formalnym - nie powinno stanowić problemu. Należy jednak uwzględnić tu fakt, że dany układ równań otrzymuje się w wyniku przekształceń matematycznych, zaś zarówno macierz współczynników, jak i wektor wyrazów wolnych, uzyskuje się pośrednio na podstawie pomiaru. Jest to w zasadzie układ równań obserwacyjnych, dlatego macierz współczynników może być słabo uwarunkowana. Algorytmy rozwiązywania układu równań z macierzą dodatnio określoną dostępne są w wielu publikacjach. Dla rozwiązania układu równań (3.17) celowym jest wykorzystanie algorytmu Cholesky'ego.

Metoda rozwiązywania układu równań opiera się na tzw. Cholesky'ego, że istnieje jednoznaczny rozkład dowolnej rzeczywistej, dodatnio określonej macierzy na iloczyn dwóch macierzy rzeczywistych: dowolnej trójkątnej B i transponowanej do niej B^T . Ponadto algorytm Cholesky'ego pozwala określić wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

oraz optymalizuje ilość operacji arytmetycznych.

Na podstawie $\text{cond}(A)$ można interpretować wyniki obliczeń numerycznych. Generalnie algorytm Cholesky'ego pozwala uzyskać wynik rozwiązania z zadaną dokładnością korzystając z procedury iteracyjnej.

Jeżeli wartości parametrów α_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ są jednakowo dokładne wówczas można ustalić, czy estymatory są nieobciążone, a więc posiadają małą wariancję. Z kolei mała wariancja gwarantuje mały rozrzut parametru $\hat{\alpha}_i$ i α_i . W efekcie możliwe jest zastąpienie związku (I) poprzez związek (II)

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \exp(-c^* \Delta t) \\ \alpha_2^* &= \exp(-2c^* \Delta t) \\ &\vdots \\ \alpha_n^* &= \exp(-nc^* \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{II})$$

przy spełnieniu kryterium (3.18):

$$S_R = \sum_{i=1}^n (w_1^P - w_1^{*M})^2 = \min \quad (3.18)$$

wówczas model (3.2) pozwala prognozować opis charakterystyki dynamicznej procesu z określoną dokładnością. W przeciwnym razie dla celów prognozy (wg 3.2) należy ustalić $c(t)$.

4. PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że identyfikacja parametrów modelu (3.2) w oparciu o największą wiarygodność estymatorów (e_n, α_1) może być wprowadzona do metody najmniejszych kwadratów. Musi być jednak spełniony warunek, że próba $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ niezależnych zmiennych losowych ma rozkład normalny $N(\bar{\mu}, \delta^2)$. Jeżeli rozkład tych zmiennych nie spełnia warunków $N(\bar{\mu}, \delta^2)$ obliczenia należy poprzedzić testem dokładnościowym. Ponadto warunek (3.18) pozwala zastąpić rozkład parametru $c(t)$ jednym parametrem c^* . Istotnym jest tu aby kolejne realizacje parametru c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) otrzymane na podstawie układu równań (3.15) były określone jednakowo dokładnie. Odpowiednią metodą rozwiązania równań (3.15) jest algorytm Cholesky'ego.

LITERATURA

- [1] Demidowicz B.P., Maron I.A., Szuwałowa E.J.: Metody numeryczne. Część I i II. PWN, Warszawa 1965.
- [2] Dżagniuk B., Piwowareki W.: Liniowy model matematyczny jako forma opisu obniżen w stanie nieustalonym. Prace Komisji Górniczo-Geologicznej PAN, Geodezja 28, Kraków 1980.
- [3] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PAN, Warszawa 1967.
- [4] Knothe S.: Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa t. I, z. 1, Warszawa 1953.
- [5] Nalimow W.M., Czernowa N.A.: Statystyczne metody planowania doświadczeń ekstremalnych. WNT, Warszawa 1967.
- [6] Pielok J.: Przebieg osiadania powierzchni w czasie przy komorowo-filarowej eksploatacji złóż soli. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja 93, Kraków 1985.
- [7] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1971.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА СДВИЖЕНИИ
ГОРНЫХ ПОРОД

Резюме

В работе представляются замечания по определении параметров моделей процесса сдвижений горных пород на основе результатов измерения. Предлагаются две модели процесса - непрерывная (2.1) и дискретная (3.2). Для непрерывной модели изучается функция $\Psi(c)$, по которой методом последовательных приближений определяется $c(t)$. Базой определения дискретной модели (3.2) являются тоже результаты измерений, в которых различаются детерминированной и случайной элементы. Процедура определения параметров основана на метод максимума вероятности. Доказывается, что если статистическими оценками

являются $N(\phi, \delta)$, тогда для идентификации параметра c можно применить метод наименьших квадратов.

DYNAMIC CHARACTERISTICS IDENTIFICATION OF THE ROCKMASS DEFORMATION PROCESS

S u m m a r y

The paper presents a discussion pertaining to identification of parameters of a rockmass deformation model, on the ground of survey results. Two models were assumed - continuous (2.1) and discrete (3.2). For the continuous model a function $\Psi(c)$ was investigated and next the parameter $c(t)$ was determined in an iterative process.

The discrete model (3.2) was formulated also on the ground of the survey results, which were decomposed into the deterministic and stochastic parts. The parameters were determined by a maximum veracity method. It was proved, that in case of estimators distributed $N(\beta, \delta)$, the parameter c can be determined by a least squares method.