ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: AUTOMATYKA z. 138 Nr kol. 1581

Witold BRANDYS, Zdzisław DUDA
Politechnika Śląska

STEROWANIE HIERARCHICZNE W ZŁOŻONYM SYSTEMIE STATYCZNYM

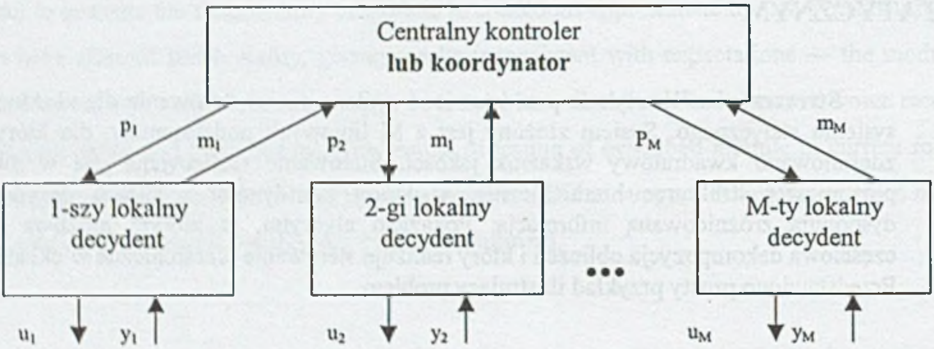
Streszczenie. W artykule przedstawiono syntezę prawa sterowania dla złożonego systemu statycznego. System złożony jest z M liniowych podsystemów, dla których zdefiniowano kwadratowy wskaźnik jakości. Sterowanie realizowane jest w dwu-poziomowej strukturze hierarchicznej, w której koordynator i lokalni decydenci dysponują zróżnicowaną informacją. Pokazano algorytm, w którym możliwa jest częściowa dekompozycja obliczeń i który realizuje sterowanie hierarchiczne w układzie. Przedstawiono prosty przykład ilustrujący problem.

HIERARCHICAL CONTROL IN LARGE SCALE STATIC SYSTEM

Summary. In the paper a synthesis of control law for a large scale stochastic system is presented. The large scale system composed of M linear static subsystems with an iteraction and quadratic performance index are considered. A two level hierarchical control structure is assumed, in which a coordinator and local controllers have access to different information. A suboptimal algorithm, in which it is possible to partially decompose calculations and to realize decentralized control, is proposed. A simple example is presented.

1. Wstęp

W pracy rozpatrywany jest problem sterowania złożonym systemem statycznym w warunkach losowych, w którym decydenci dysponują zróżnicowaną informacją, na podstawie której podejmują decyzje o sterowaniu. Cały system złożony jest z podsystemów statycznych, dla których zdefiniowano kwadratowy wskaźnik jakości, który chcemy minimalizować. Jakość sterowania zależy tu od dostępnej informacji i od struktury sterowania. Dla struktury jednopoziomowej centralny kontroler generuje sterowanie opierając się na pełnej informacji otrzymywanej ze wszystkich podsystemów. Jednakże w systemach złożonych proces przekazywania informacji do centralnego kontrolera może być trudny. Rozwiązaniem może być decentralizacja informacji i struktury sterowania. Problem taki jest skomplikowany w przypadku tzw. struktury nieklasycznej tj. gdy lokalni decydenci dysponują niekompletną, różną informacją. W niniejszej pracy zagadnienie to rozpatrywane jest w strukturze hierarchicznej, dwupoziomowej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym.



Rys. 1. Struktura przedstawionego systemu
Fig. 1. Structure of the proposed system

Koordynator, dysponując zagregowaną informacją od poszczególnych podsystemów, określa i przesyła na poziom niższy wytyczne dla lokalnych decydentów. Lokalny decydent podejmuje decyzję na podstawie informacji ze swojego podsystemu oraz wytycznej koordynatora. W pracy przedstawiono algorytm, który pozwala na częściową dekompozycję obliczeń i który realizuje zdecentralizowane sterowanie systemem. Podobne zagadnienia zostały sformułowane i rozwiązane m.in. w pracach [6], [7], [8] i [4] oraz [3]. Problemy związane z dekompozycją obliczeń omawiane są między innymi w pracach [10], [11], [5] oraz [9]. Znany jest fakt, że zadania, w których poszczególni decydenci dysponują zróżnicowaną informacją pomiarową, mogą prowadzić do trudności w opracowaniu algorytmu sterowania. Zagadnienia te omawiane są m.in. w pracach [1] oraz [2].

2. Model systemu

Badany układ złożony jest ze statycznych podsystemów o modelu:

$$x_i = B_{ii}u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} A_{ij}x_j + w_i \qquad i = 1, 2, \ldots M \tag{1}$$

model pomiaru:

$$\mathbf{y}_i = C_i\mathbf{w}_i + \mathbf{e}_i \tag{2}$$

gdzie: x_i – wektor wyjść, u_i – wektor sterowań, $\mathbf{y}_i$ – wektor pomiaru, $\mathbf{e}_i$ – wektor błędu, $\mathbf{w}_i$ - wektor zakłóceń.

Zakładamy, że $\mathbf{w}_i$ oraz $\mathbf{e}_i$ są zmiennymi losowymi o znanym rozkładzie.

Wskaźnik jakości całego systemu ma postać:

$$I = E\left[\sum_{i=1}^{M}\left(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}Q_i\mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}H_i\mathbf{u}_i\right)_{\mathbf{u}_i = a_i(\mathbf{z}_i)}\right] \tag{3}$$

gdzie: E oznacza wartość oczekiwaną, $\mathbf{x}_i$ jest zmienną losową o realizacji opisanej w (1), $a_i(\mathbf{z}_i)$ jest prawem sterowania dla i-tego podsystemu, $\mathbf{z}_i$ reprezentuje dostępną informację.

Należy dobrać takie prawo sterowania $\mathbf{u}_i = a_i(\mathbf{z}_i)$, $i = 1,2,\ldots M$, dla którego wskaźnik jakości (3) przyjmuje minimalną wartość z uwzględnieniem ograniczeń (1) z realizacjami $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{w}_i$.

$$\mathbf{x}_i = B_{ii}\mathbf{u}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} A_{ij}\mathbf{x}_j + \mathbf{w}_i \tag{4}$$

3. Sformułowanie problemu

Załóżmy, że decyzje podejmowane są w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym.

Rozpatrywana dwupoziomowa struktura systemu sterowania jest uzasadniona wtedy, gdy system jest duży (duża liczba podsystemów) i przesyłanie do jednego centralnego decydenta informacji o zapotrzebowaniach wszystkich podsystemów jest trudne do zrealizowania.

Załóżmy, że i-ty lokalny decydent otrzymuje od swojego lokalnego systemu wektor pomiaru y_i, który jest agregowany do postaci:

$$m_i = D_i y_i \tag{5}$$

gdzie m_i jest wektorem niższego wymiaru niż y_i; D_i jest odpowiednią macierzą.

Koordynator zbiera zagregowane pomiary m_i od lokalnych decydentów i przesyła do nich wartości zmiennych koordynacyjnych p_i. I-ty lokalny decydent przesyła decyzje u_i do swojego podsystemu.

Dopuszczalnymi prawami sterowania koordynatora i i-tego lokalnego decydenta są odpowiednio funkcje $\mathbf{p}_i = b_i(\mathbf{m})$ oraz $\mathbf{u}_i = a_i[\mathbf{y}_i, b_i(\mathbf{m})]$, $i = 1,2,...,M$. Dla realizacji zmiennych losowych $\mathbf{m}$ oraz $\mathbf{y}_i$, przyjmują one wartości p_i oraz u_i.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie praw sterowania lokalnych decydentów $\mathbf{u}_i = a_i^o[\mathbf{y}_i, b_i^o(\mathbf{m})]$ i koordynatora $\mathbf{p}_i = b_i^o(\mathbf{m})$, dla których wskaźnik jakości (3) przyjmuje minimalną wartość.

4. Rozwiązanie problemu

Oznaczmy:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} A_{ij} \mathbf{x}_j \tag{6}$$

Otrzymujemy wskaźnik jakości w postaci:

$$I = E\left\{ \sum_{i=1}^{M} \left[\mathbf{u}_i^T V_i \mathbf{u}_i + 2(\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i)^T Q_i B_{ii} \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i^T Q_i \mathbf{v}_i + 2\mathbf{v}_i^T Q_i \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_i^T Q_i \mathbf{w}_i \right] \right\} \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{u}_i = a_i[\mathbf{y}_i, b_i(\mathbf{m})]$, $V_i = B_{ii}^T Q_i B_{ii} + H_i$

Szukamy optymalnego prawa sterowania $\mathbf{u}_i = a_i^o[\mathbf{y}_i, b_i^o(\mathbf{m})]$ oraz $\mathbf{p}_i = b_i^o(\mathbf{m})$, które minimalizuje wskaźnik jakości.

4.1. Synteza lokalnych praw sterowania

Przyjmijmy następujący opis i-tego podsystemu:

$$\mathbf{x}_i^* = B_{ii} \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i^* + \mathbf{w}_i \tag{8}$$

gdzie:

$$\mathrm{v}_i^* = E_{|m}[(\mathrm{v}_i)_{\mathrm{u}_j = a_j(\mathrm{y}_j, b_j(\mathrm{m})), j \neq i}] \tag{9}$$

Realizacja zmiennej losowej v_i^* oznaczamy przez v_i^*. Przyjmuje ona formę:

$$v_i^* = E_{|m}[(\mathrm{v}_i)_{\mathrm{u}_j = a_j(\mathrm{y}_j, p_j), j \neq i}] \tag{10}$$

gdzie $E_{|m}$ oznacza wartość średnią zmiennej losowej dla danego m.

Wartość v_i^* jest najlepszą estymatą wzajemnego oddziaływania, opartą na informacji koordynatora.

Optymalne prawo sterowania może być znalezione poprzez minimalizację wyrażenia:

$$\bar{I}^* = \min_{p,\mathrm{u}} E_{|m}\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[\mathrm{u}_i^T V_i \mathrm{u}_i + 2(v_i^* + \mathrm{w}_i)^T Q_i B_{ii} \mathrm{u}_i + v_i^{*T} Q_i v_i^* + 2 v_i^{*T} Q_i \mathrm{w}_i + \mathrm{w}_i^T Q_i \mathrm{w}_i\right]\right\} \tag{11}$$

Korzystając z metody mnożników Lagrange'a możemy uwzględnić ograniczenie (10) w wyrażeniu (11) i po kilku przekształceniach otrzymamy optymalne prawo sterowania:

$$u_i^o = V_i^{-1}\left[\sum_{j \neq i} B_{ii}^T A_{ji}^T l_j - B_{ii}^T Q_i (\hat{w}_i + v_i^*)\right] \tag{12}$$

gdzie $l = [l_1^T \; l_2^T \; \ldots \; l_M^T]^T$, v_i^* są traktowane jako parametry, a $\hat{w}_i = E_{|m,y_i} \mathrm{w}_i = E_{|y_i} \mathrm{w}_i$, co wynika z własności zmiennych losowych w_i oraz e_i.

Oznaczając:

$$p_i = E_{|m}\left\{V_i^{-1}\left[\sum_{j \neq i} B_{ii}^T A_{ji}^T \mathrm{l}_j - B_{ii}^T Q_i (\hat{\mathrm{w}}_i + \mathrm{v}_i^*)\right]\right\} \tag{13}$$

i wykonując operację uśredniania dla danego m otrzymujemy:

$$p_i = V_i^{-1}\left[\sum_{j \neq i} B_{ii}^T A_{ji}^T l_j - B_{ii}^T Q_i (\overline{w}_i + v_i^*)\right] \tag{14}$$

gdzie $\overline{w}_i = E_{|m} \mathrm{w}_i = E_{|m_i} \mathrm{w}_i$. Z powyższego wynika, że:

$$u_i^o = p_i - V_i^{-1} B_{ii}^T Q_i (\hat{w}_i + \overline{w}_i) \tag{15}$$

i jest to realizacja sterowania dla i-tego lokalnego decydenta dla danego p_i otrzymanego od koordynatora oraz danego y_i koniecznego do wyznaczenia estymat $\hat{w}_i$ oraz $\overline{w}_i$.

4.2. Synteza praw sterowania dla koordynatora

Oznaczmy:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1{}^T \mathbf{x}_2{}^T \ldots \mathbf{x}_M{}^T]^T, \mathbf{u}^o = [\mathbf{u}_1{}^{oT} \mathbf{u}_2{}^{oT} \ldots \mathbf{u}_M{}^{oT}]^T,$$

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1{}^T \mathbf{p}_2{}^T \ldots \mathbf{p}_M{}^T]^T, \mathbf{w}^* = [\mathbf{w}_1{}^T \mathbf{w}_2{}^T \ldots \mathbf{w}_M{}^T]^T,$$

$$Q_d = diag[Q_1\, Q_2 \ldots Q_M], H_d = diag[H_1\, H_2 \ldots H_M],$$

$$V_d^{-1} = diag[V_1^{-1}\, V_2^{-1} \ldots V_M^{-1}], B_d = diag[B_{11}\, B_{22} \ldots B_{MM}],$$

$$B^* = 1 - \begin{bmatrix} 0_1 & A_{12} & \ldots & A_{1M} \\ A_{21} & 0_2 & \ldots & A_{2M} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{M1} & \ldots & \ldots & 0_M \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\mathbf{x} = B\mathbf{u}^o + \mathbf{w} \tag{16}$$

$$I_2 = E\left[\left(\mathbf{x}^T Q_d \mathbf{x} + \mathbf{u}^{oT} H_d \mathbf{u}^o\right)\right] \tag{17}$$

$$\mathbf{u}^o = \mathbf{p} - V_d^{-1} B_d^T Q_d (\hat{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}}) \tag{18}$$

gdzie: $B = (B^*)^{-1} B_d$, $\mathbf{w} = (B^*)^{-1}\mathbf{w}^*$

Wstawiając (18) i (16) do (17) otrzymujemy:

$$I_2 = E\left[\left(\mathbf{p}^T V \mathbf{p} + 2\mathbf{p}^T B^T Q_d \overline{\mathbf{w}}\right)_{\mathbf{p}=b(\mathbf{m})}\right] + s \tag{19}$$

gdzie: $V = H_d + B^T Q_d B_i$

$$s = E\left[(\hat{\mathrm{w}} - \overline{\mathrm{w}})^T Q_d B_d V_d^{-1} V V_d^{-1} B_d^T Q_d (\hat{\mathrm{w}} - \overline{\mathrm{w}}) + \mathrm{w}^{\mathrm{T}} Q_d \mathrm{w} - 2(\hat{\mathrm{w}} - \overline{\mathrm{w}})^T Q_d B_d V_d^{-1} B_d^T Q_d \mathrm{w}\right] \tag{20}$$

Problem koordynatora polega na wyznaczeniu optymalnych praw sterowania $b^o(\mathrm{m})$, które minimalizują wskaźnik jakości zapisany w postaci:

$$I_2 = E\{E_{|\mathrm{m}}[(\mathrm{p}^{\mathrm{T}} V \mathrm{p} + 2\mathrm{p}^{\mathrm{T}} B^T Q_d \overline{\mathrm{w}})_{\mathrm{p}=b(\mathrm{m})}]\} + s \tag{21}$$

Jest to równoważne (dla danego m) minimalizacji wyrażenia:

$$S = p^T V p + 2 p^T B^T Q_d \overline{w} \tag{22}$$

względem zmiennej. W wyniku otrzymujemy:

$$p^o = -V^{-1} B^T Q_d \overline{w} = -V^{-1} B^T Q_d (B^*)^{-1} \overline{w} \tag{23}$$

Wartość p_i^o jest realizacją sterowania wyznaczoną przez koordynatora i przesłaną do i-tego lokalnego decydenta.

Wstawiając wyrażenie (23) do (19) otrzymujemy wartość wskaźnika jakości (3) wynikającego z wyznaczonych sterowań optymalnych u_i^o lokalnych decydentów oraz sterowania koordynatora p^o realizowanych w dwupoziomowej strukturze sterowania.

$$I_2^o = s - E(\overline{\mathrm{w}}^{\mathrm{T}} Q_d B V^{-1} B^T Q_d \overline{\mathrm{w}}) \tag{24}$$

5. Przykład

Rozważmy prosty system złożony z dwóch podsystemów opisanych równaniami:

$\mathrm{x}_1 = B_{11}\mathrm{u}_1 + A_{12}\mathrm{x}_2 + \mathrm{w}_1$ $\quad \mathrm{y}_1 = C_1\mathrm{w}_1 + \mathrm{e}_1 \quad \mathrm{m}_1 = D_I \mathrm{y}_1$

$\mathrm{x}_2 = B_{22}\mathrm{u}_2 + A_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{w}_2$ $\quad \mathrm{y}_2 = C_2\mathrm{w}_2 + \mathrm{e}_2$

dla których:

$B_{11}^{\mathrm{T}}=[2 \;\; 1]$, $B_{22}^{\mathrm{T}}=[3 \;\; 1]$, $D_I=[1 \;\; 1]$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ A

zatem zakładamy, że żadna informacja nie dociera do koordynatora z drugiego podsystemu.

Zakłócenia w_1, w_2, e_1, e_2 mają rozkład normalny opisany przez:

$E w_1 = [1\ 2]^T$, $E w_2 = [1\ 1]^T$, $E e_1 = [1\ 1]^T$, $E e_2 = [1\ 0]^T$,

$$Pw_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ Pw_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ Pe_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ Pe_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie: P oznacza macierz kowariancji.

Wskaźnik jakości ma postać:

$$I = E\left[\sum_{i=1}^{2}\left(x_i^T Q_i x_i + u_i^T H_i u_i\right)\right]$$

gdzie:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ H_1 = [1],\ Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ H_2 = [2]$$

Optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów mają postać: $u_i^o = p_i + K_i(\hat{w}_i + \overline{w}_i)$

gdzie: $K_1 = [-0.5\ 0.5]$, $K_2 = [-0.2593\ \ -0.1481]$.

Optymalne prawo sterowania dla koordynatora $p = K\overline{w}$, gdzie:

$$K = \begin{bmatrix} -0.2727 & 0.2727 & -0.0303 & -0.2121 \\ 0.1515 & -0.1515 & -0.2424 & -0.0303 \end{bmatrix}$$

Estymaty $\hat{w}_i$, i = 1,2 mogą być wyznaczone ze standardowego równania:

$$\hat{w}_i = E w_i + P_{w_i y_i} P_{y_i y_i}^{-1} (y_i - E y_i)$$

gdzie:

$$P_{w_1 y_1} = E(w_1 - E w_1)(y_1 - E y_1)^T,\ P_{y_1 y_1} = E(y_1 - E y_1)(y_1 - E y_1)^T$$

$$\hat{w}_1 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} y_1 \qquad \hat{w}_2 = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} y_2$$

Estymaty: $\overline{w}_i = E w_1 + P_{w_1 m_1} P_{m_1 m_1}^{-1} (m_1 - E m_1)$ oraz $\overline{w}_2 = E w_2$

$$\overline{w}_1 = \begin{bmatrix} -1.14 \\ 0.57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.29 \end{bmatrix} m_1,\ E w_2 = [1\ 1]^T$$

Wskaźnik jakości:

$I_2^o = 14{,}8018$

6. Podsumowanie

Artykuł opisuje syntezę prawa sterowania dla systemu statycznego złożonego z wielu liniowych podsystemów. Dla każdego z podsystemów zdefiniowano pewien kwadratowy wskaźnik jakości, który podlega minimalizacji. Zaproponowano sterowanie w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym. Założono, że koordynator dysponuje wyłącznie informacją w formie zagregowanej, zmniejszoną w stosunku do tej, którą dysponują lokalni decydenci. Algorytm, w którym możliwa jest częściowa dekompozycja obliczeń, realizuje optymalne sterowanie hierarchiczne w układzie. Został on zilustrowany prostym przykładem.

Niniejsza praca finansowana była z funduszu badań własnych BW-428/Rau1/02 t.7.

LITERATURA

1. Aoki M.: On decentralized linear stochastic control problems with qadratic cost, IEEE Trans. Aut. Control 18, 1973.
2. Chong C.Y., Athans M.: On the stochastic control of linear systems with different information sets, IEEE Trans. Aut. Control 16, 1971.
3. Duda Z., Brandys W.: Decentralized hierarchical stochastic control in a large scale static system., 15th IFAC World Congres, Barcelona 2002.
4. Duda Z., Gessing R.: Two-level stochastic control with periodic coordination for a resource allocation problem, Int. J. Systems Sci. 23, 1992.
5. Findeisen W., Bailey F.N., Brdys M., Malinowski K., Tatjewski P., Wozniak A.: Control and Coordination in Hierarchical Systems, John Wiley & Sons, New York 1980.
6. Gessing R.: Two level hierarchical control for linear quadratic problem related to a static system, Int. J. Control 46, 1987.
7. Gessing R., Duda Z.: Decentralized, stochastic control for static lq problem, Int. J. System Sci. 21, 1990.

8. Gessing R., Duda Z.: Price coordination for a resource allocation problem in a large-scale system., Int. J. System Sci. 26, 1995.
9. Ho Y.C.: Team decision theory and information structures, Proc. IEEE 68, 1980.
10. Lasdon L.S.: Optimization Theory for Large Systems, The Macmillan Company, London 1970.
11. Mesarovic M.D., Macko D., Takahara Y.: Theory of Hierarchical, Multilevel Systems, Academic Press, New York 1970.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Józef KORBICZ

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 grudnia 2002 r.

Abstract

In the paper synthesis of control laws to the stochastic system composed of coupled static subsystems is presented. Designed strategy is realized in a two level structure. The local controllers have decentralized information and decentralized measurements. It is shown that local control laws are linear functions of disturbance estimates and can be realized in completely decentralized way. The coordinator has got aggregated information from local controllers and determines suggested control for local subsystems. The control law is a linear function of disturbance estimate. As a result, amount of information transmitted in the system and transformed by decision makers can be decreased.