

Zbigniew STAROSOLSKI
Politechnika Śląska

ADAPTACYJNA PROCEDURA KONSTRUKCJI PRZEDZIAŁAMI LINIOWEJ FUNKCJI LAPUNOWA

Streszczenie. W tej pracy zajmujemy się zastosowaniem przedziałami liniowej funkcji Lapunowa do analizy stabilności nieliniowych układów dynamicznych. Przedstawiono rezultaty otrzymane za pomocą dwóch typów triangulacji służących do definiowania przedziałami liniowej funkcji Lapunowa. Możliwym zakresem zastosowania tej klasy funkcji jest określanie absolutnej niestabilności liniowych układów z niepewnością. Przedstawiono przykład, w którym warunki otrzymane przez przedziałami liniową monotoniczną funkcję Lapunowa opartą na siatce polarnej są gorsze od tych otrzymanych na podstawie przedziałami liniowej monotonicznej funkcji Lapunowa opartej na siatce adaptacyjnej.

PIECEWISE LINEAR LYAPUNOV FUNCTIONS CONSTRUCTED ON ADAPTIVE TRIANGULATION GRID

Summary. In the paper a study of application of piecewise linear Lyapunov (PLL) functions is presented. PLL is defined by triangulation of the state space, to the problem of estimating stability region of uncertain non-linear systems. We compare stability regions of non-linear time-varying system obtained by two methods using piecewise linear Lyapunov function defined on polar grid and adaptive grid.

1. Wstęp

Oszacowanie obszaru stabilnych warunków początkowych dla układów nieliniowych, a tym bardziej układów nieliniowych niestacjonarnych, nie jest rzeczą prostą. W teorii stosuje się twierdzenia typu La'Salla [7], do zagadnień obliczeniowych teorii sterowania i teorii systemów stosuje się funkcję Lapunowa zdefiniowaną poprzez aproksymację przedziałową [1-18]. Prace [1,5,9,10] zawierały określone rezultaty wraz z dowodami absolutnej stabilności układów liniowych z niepewnością z wykorzystaniem istnienia wspólnej wielościennej funkcji Lapunowa. Te prace zawierały twierdzenia, które pozwalały na ustanowienie warunków

wystarczających i koniecznych absolutnej stabilności określonych typów układów z niepewnością. Warunki stabilności były wyrażone przez układ nierówności liniowych [9,10] lub przez zbieżność wielościennej zbiorów [1,5]. Efektywną metodę rozwiązywania warunków algebraicznych typu [9,10] oparto na zastosowaniu programowania liniowego, i opisano w [11,12].

Więcej klas funkcji aproksymujących nie tylko wielościenne rozważano w [6,14,17,18]. W [17,18] przedziałami liniowej kwadratowej funkcji Lapunowa użyto do badania stabilności układów liniowych z przełączeniami. Wykazano numerycznie, iż zagadnienie analizy stabilności można sprowadzić do analizy układu nierówności liniowych. W [6,14] analizowano stabilność układów nieliniowych z niepewnością poprzez przedziałami liniową aproksymację afiniczną dynamiki, zaproponowano przedziałami liniową funkcję Lapunowa. Dowiedziono, że parametry przedziałami liniowej aproksymacji mogą być określone przez odpowiednie sformułowanie zadania programowania liniowego.

Artykuł ten przedstawia zastosowania przedziałami liniowych funkcji Lapunowa w analizie stabilności nieliniowych układów dynamicznych z niepewnością. Przedstawiono przykład dla równania van der Pola w przypadku gdy współczynnik α zmienia się w granicach α_{min} do α_{max} . Przykład ten posłuży do porównania wyników otrzymanych na podstawie zastosowania polarnej siatki triangulacji oraz nowego typu siatki adaptacyjnej

Warunki otrzymane przez przedziałami liniową monotoniczną funkcję Lapunowa opartą na adaptacyjnej siatce triangulacji są mocniejsze niż te otrzymane na podstawie funkcji Lapunowa opartej na polarnej siatce triangulacji oraz macierzowych nierównościach liniowych.

2. Aproksymacja afiniczna i przedziałami liniowe funkcje Lapunowa

W tej części zostanie przedstawiony przegląd teorii aproksymacji nieliniowych układów dynamicznych funkcją przedziałami liniową, i zastosowania jej jako przedziałami liniową funkcję Lapunowa. Sam pomysł aproksymacji odcinkowo liniowej znany jest od dawna [8]. W pracach: [6] i [14] autorzy otrzymali podobne wyniki. W pracy [14] przedstawiono podejście do zagadnienia oparte na przyjętej arbitralnie triangulacji przestrzeni stanu oraz funkcji sprawdzającej przynależność do określonych komórek. Ta metoda zawiera procedurę adaptacji z dopasowaniem pozycji punktów siatki do kształtu wektora pola opisującego własności układu dynamicznego. Idea aproksymacji afinicznej nieliniowych

układów dynamicznych i przedziałami liniowej parametrycznej funkcji Lapunowa w przestrzeni stanów podzielonej na rozdzielne obszary, nazwane komórkami. Rozkład ten jest określany jako podział prosty lub triangulacja przestrzeni stanów. Każda komórka triangulacji ma unikalny identyfikator m . Każda komórka w triangulacji jest określona poprzez swoje krawędzie. Liczba krawędzi każdej komórki wynosi $n+1$, gdzie n jest to rząd analizowanego układu dynamicznego. Punkty przestrzeni stanów wspólne dla różnych krawędzi komórek triangulacji nazywamy węzłami. Są one określone poprzez indeks k . Zbiór wszystkich krawędzi podziału jest nazywany siatką triangulacji.

Triangulacja jest zdefiniowana, jeżeli zostały określone wszystkie współrzędne węzłów i krawędzie podziału komórek. Współrzędne węzła o indeksie k są zapisane w wektorze kolumnowym x_k : Wszystkie K - węzłów triangulacji zebrano w macierzy X :

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_K] \quad (1)$$

Funkcja $\kappa(m)$ określa przynależność pomiędzy węzłami a komórkami:

$$\kappa(m) = \{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}\} \quad (2)$$

Jest to lista zawierająca $n+1$ indeksów k_i węzłów, które należą do krawędzi komórki o numerze m .

Przedstawiony algorytm triangulacji został zastosowany do aproksymacji dynamiki nieliniowego układu

$$\dot{x} = f(x) \quad (3)$$

gdzie $x \in R^n$, oraz $f(\cdot)$ jest lokalnie ciągłą funkcją lipschitzowską, $R^n \rightarrow R^n$.

Założono że punkt równowagi dla (3) jest w $x=0$ i węzeł o numerze l triangulacji (1)-(2) jest w punkcie równowagi, to znaczy, $x_l=0$. W każdej komórce modelu m równanie (3) jest zastąpione przez przedziałami liniową afiniczną aproksymację postaci:

$$\dot{x} = a_m + A_m x \quad (4)$$

Wektor przesunięcia a_m i macierz stanu A_m mają odpowiednio n i n^2 elementów. Przez ustawienie wartości (4) na $n+1$ krawędzi komórki m równej wektorowi $f(x)$ otrzymano układ n i n^2 równań liniowych zapisany jako:

$$a_m + A_m x = f(x_k), \quad k \in \kappa(m) \quad (5)$$

Można dowieść, że jeżeli triangulacja jest niezdegenerowana, to powyższy układ jest zawsze nieosobliwy. Rozwiązując układ (5) otrzymujemy przedziałami liniową aproksymację układu nieliniowego (3). Przedziałami liniowa aproksymacja (4) jest także lipschitzowskim układem. Dla wszystkich krawędzi komórki o numerze m_i , które zawierają punkt równowagi $x=0$, wektor przesunięcia jest równy zero: $a_m=0$, $m=m_i$.

Funkcja Lapunowa po triangulacji jest definiowana przez listę jej wartości w węzłach siatki, następnie liniowo interpolowana wewnątrz każdej z komórki. Określamy wartość w węźle i przez v_i , więc funkcja Lapunowa jest całkowicie zdefiniowana przez wektor V :

$$V^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_i \quad \dots \quad v_k] \quad (6)$$

Wartości funkcji Lapunowa w punkcie x należącym do komórki m są określane przez:

$$V(x) = [V^T]_{\kappa(m)} \beta, \quad (7)$$

gdzie $[V^T]_{\kappa(m)}$, opisuje $n+1$ elementowy wektor wierszowy skonstruowany przez pobranie z wektora V^T elementów określonych przez indeks zwracany przez funkcję κ , wektor $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}] \in R^{n+1}$, $\beta_i \in [0, 1]$, zawiera współrzędne barycentryczne punktu x w komórce o numerze m . Innymi słowy, β_i jest rozwiązaniem układu równań liniowych zapisanego jako:

$$x = X(m)\beta, \quad (8)$$

oraz

$$1^T \beta = 1 \quad (9)$$

gdzie 1 wektor kolumnowy o wszystkich elementach równych 1 oraz

$$X(m) = [X]_{\kappa(m)} \quad (10)$$

gdzie X jest to wektor zawierający współrzędne węzłów triangulacji - zdefiniowane w (1), zapis $[X]_{\kappa(m)}$ jest równorzędnym z $[V^T]_{\kappa(m)}$ w równaniu (7).

Analiza stabilności lub niestabilności obejmuje obliczanie pochodnej funkcji Lapunowa wzdłuż rozwiązania przedziałami liniowego afinicznego układu (4). Ponieważ

przedziałami liniowa funkcja Lapunowa jest ciągła, lecz nie jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie, należy uzupełnić teorię Lapunowa, zamieniając zwykłą pochodną na prawą, górną pochodną Diniego wzdłuż trajektorii [19,20]. Prawa, górna pochodna Diniego funkcji $V(x)$ wzdłuż (4) liczona w punkcie x , który leży wewnątrz komórki m , zapisujemy jako $D_m^+(x)$ zgodnie z [14]:

$$D_m^+(x) = [V^T]_{\kappa(m)} \bar{X}^{-1}(m) \begin{bmatrix} a_m + A_m x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Jak wynika z równania (11), pochodna ma postać liniową ze względu na x . W granicach pomiędzy węzłem a komórką x_k funkcja $D_m^+(x)$ nie jest ciągła. Spełnienie nierówności (12) zapewnia o ujemnej określoności $D_m^+(x)$.

$$D_m^+(x) < 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad k \in \kappa(m), \quad k \neq 1. \quad (12)$$

Warunek $k \neq 1$ eliminuje obliczanie pochodnej w punkcie równowagi. Warunki (12) ujemnej określoności można zapisać jako:

$$\gamma^T(m, k, x_k) V < 0 \quad (13)$$

gdzie K - wymiar wektora $\gamma^T(m, k, x_k)$ zawierającego tylko niezerowe elementy dla indeksów o numerach $k \in \kappa(m)$. Wynika stąd, że jest nie więcej niż $n+1$ niezerowych elementów wektora $\gamma^T(m, k, x_k)$. Składając wszystkie wektory $\gamma^T(m, k, x_k)$ jako wiersze macierzy C można zapewnić ujemną określoność poprzez warunek:

$$CV < 0 \quad (14)$$

Warunki na dodatnią określoność funkcji $V(x)$ są zapisane jako:

$$v_k > 0, \quad k \neq 1, \quad v_1 = 0. \quad (15)$$

Podsumowując, analiza stabilności/niestabilności układu typu (4) za pomocą przedziałami liniowej funkcji Lapunowa może zostać zapisana jako problem otrzymania rozwiązania układu nierówności (14)-(15) drogą numerycznych obliczeń, jak przedstawiono dalszej części pracy.

3. Definicja stabilności/niestabilności

Oznaczamy jako G zbiór określony przez logiczną sumę wszystkich komórek $1, 2, \dots, M$. Zakładamy, że punkt równowagi $x_i=0$ leży wewnątrz G . Określając stabilność w sensie Lapunowa dla przypadku przedziałami liniowego układu afinicznego (4) i przedziałami ciągłą funkcję Lapunowa (7) określamy warunki stabilności/niestabilności jako zbiór liniowych nierówności dotyczących wektora V [14].

Twierdzenie 1. Jeżeli istnieje wektor V taki, że spełnia (14) i (15), to punkt równowagi $x_i=0$ układu afinicznego przedziałami liniowego (4) jest asymptotycznie stabilny. Największa poziomiczna funkcji $V(x)$ zawierająca się w G jest obszarem asymptotycznej stabilności $x_i=0$.

Twierdzenie 2. Jeżeli istnieje wektor V oraz $v_i=0$ taki, że układ nierówności (14) jest spełniony i V ma jedynie ujemne wartości v_k dla indeksów k należących do komórki m , który także zawiera punkt równowagi $x_i=0$, to punkt $x_i=0$ jest niestabilnym punktem równowagi układu (4).

4. Warunki stabilności w sensie programowania liniowego

Układ liniowych nierówności (14)-(15) można rozwiązać stosując algorytm programowania liniowego. Należy dodać do każdej nierówności skalarną liczbę z . Algorytm programowania liniowego nie pozwala na rozwiązywanie zadań z nierównościami, w związku z tym rozwiązujemy problem programowania liniowego, odpowiadający nierównościami (14)-(15), sformułowany następująco:

$$\min\{-z\} \quad (16)$$

oraz

$$\begin{cases} CV + 1z \leq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

z założeniami

$$V \geq 0, \quad v_1 = 0. \quad (18)$$

gdzie 1 wektor kolumnowy o wszystkich elementach równych 1 .

Rozwianie zadania (16)-(18) dostarcza nam informacji, czy rozwiązanie układu nierówności (14)-(15) jest dopuszczalne. Jeżeli rozwiązaniem optymalnym jest $z_{opt} = 1$, oznacza to, iż układ (14)-(15) jest wykonalny. Jeżeli rozwiązanie optymalne otrzymujemy dla

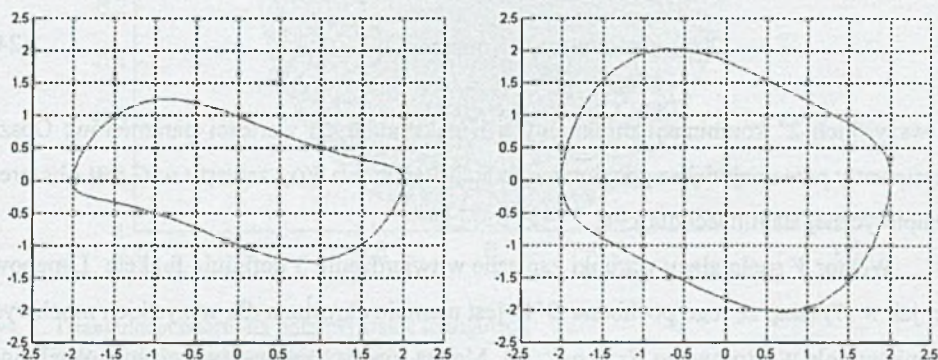
$z_{opt} = 0$, to oznacza to, iż rozwiązanie układu (14)-(15) jest niedopuszczalne. Z twierdzenia 1 wynika, iż wykonalność układu (14)-(15) dowodzi stabilności asymptotycznej układu przedziałami afinicznego (4).

5. Układy z zmiennymi parametrami

W trakcie badań nad przedziałami liniową funkcją Lapunowa opartą na siatkach triangulacji (prostokątnej, polarnej, adaptacyjnej) rozważano różnego typu układy, jednak do zaprezentowania wyników opracowanej metody wybrano jedno z najczęściej rozpatrywanych równań w literaturze opisujących nieliniowy układ dynamiczny - równanie van der Pola.

$$\ddot{x} + \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + \alpha x = 0 \quad (19)$$

W powyższym równaniu ε jest to dekrement tłumienia (przyjęto $\varepsilon=0.5$), natomiast parametr α odpowiadający za "szerokość" obszaru asymptotycznej stabilności zmienia się w granicach $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$. Dla wartości skrajnych α obszar stabilności asymptotycznej dla układu (19) przedstawia rysunek 1, lewy (węższy) dla $\alpha_{\min} = 0.2$ prawy (szerszy) dla $\alpha_{\max} = 0.8$.



Rys. 1. Rzeczywisty obszar stabilności dla układów narożnych: lewy dla $\alpha_{\min} = 0.2$, prawy dla $\alpha_{\max} = 0.8$

Fig. 1. Stability regions for narrow systems: left for $\alpha_{\min} = 0.2$, right for $\alpha_{\max} = 0.8$

Warunki stabilności/niestabilności (14)-(15) można rozszerzyć dla przypadku, w którym wektor pola $f(x)$ w (3) zależy od zmiennej wartości parametrów p_1, p_2, \dots, p_s , co prowadzi do modyfikacji układu nierówności (3) w następujący sposób:

$$\dot{x} = f(x, p_1, p_2, \dots, p_s) \quad (20)$$

Zakładamy, iż wartości parametrów mieszczą się w przedziale zdefiniowanym następująco:

$$p_{i\min} \leq p_i \leq p_{i\max} \quad (21)$$

wektor pola (20) spełnia:

$$f(x, p_1, p_2, \dots, p_s) \in \text{conv}\{f(x, p_1(\min/\max), \dots, p_s(\min/\max))\} \quad (22)$$

gdzie zapis (22) oznacza powłokę wypukłą zawierającą wszystkie 2^s kombinacji minimalnych i maksymalnych wartości parametrów. Oznaczmy przez

$$C[p_1(\min/\max), \dots, p_s(\min/\max)] \quad (23)$$

macierz stałych wartości występującą w (14), obliczoną dla przyjętych kombinacji wartości minimalnych i maksymalnych parametrów. Wówczas twierdzenie o stabilności układu (20) można zapisać następująco:

Twierdzenie 3. Punkt równowagi $x=x_l=0$ przedziałami linowej afinicznej aproksymacji układu (20) jest stabilny asymptotycznie, jeżeli wektor V spełniający warunki (15) oraz

$$C[p_1(\min/\max), \dots, p_s(\min/\max)]V < 0 \quad (24)$$

dla wszystkich 2^s kombinacji minimalnych i maksymalnych wartości parametrów. Obszar obejmowany przez największą poziomice funkcji Lapunowa $V(x)$ zawarty w G jest obszarem asymptotycznej stabilności dla $x=0$.

Wektor V spełniający warunki zapisane w twierdzeniu 3 definiuje funkcję Lapunowa $V(x)$ jak w (7) taką, że jego pochodna D^+V jest ujemnie określona dla wszystkich możliwych kierunków pola wektorowego $f(x, p_1, p_2, \dots, p_s)$. Można również zapisać twierdzenie określające warunki analogicznie do twierdzenia 2, słuszne dla układu o zmiennych wartościach parametrów jak (20).

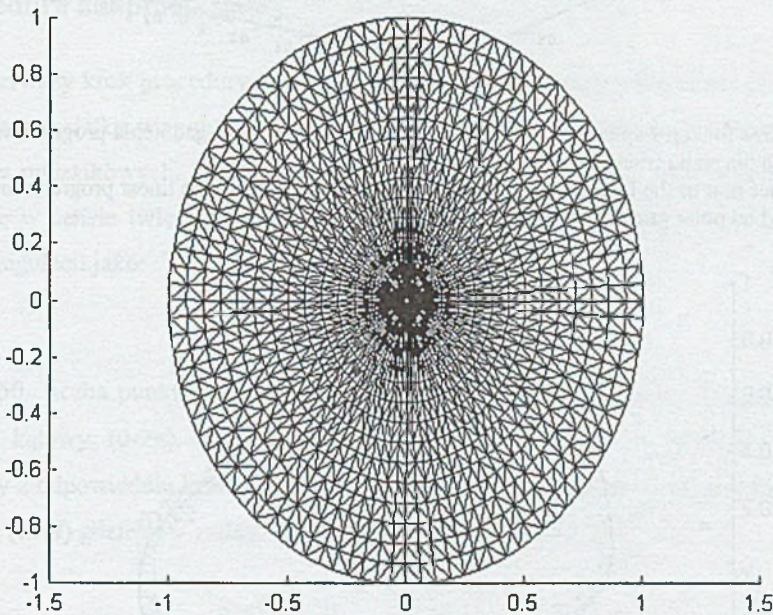
Jak w przykładzie z równaniem van der Pola (21), zapiszmy układ we współrzędnych stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon(1-x_1^2)x_2 - \alpha x_1 \end{aligned} \quad (25)$$

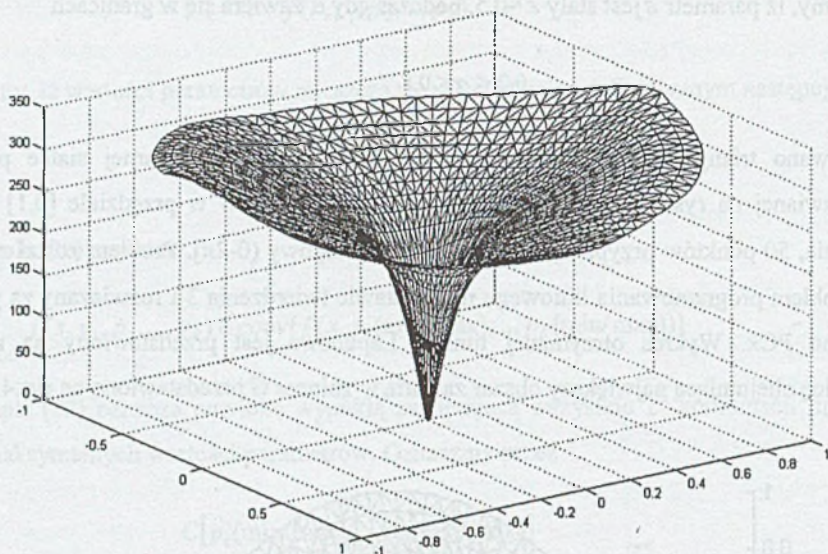
zakładamy, iż parametr ε jest stały $\varepsilon=0.5$, podczas gdy α zawiera się w granicach

$$0.2 < \alpha < 0.8 \quad (26)$$

Zastosowano triangulację przestrzenni stanów x_1-x_2 opartą na polarnej siatce punktów przedstawianej na rysunku 2. Siatka o wymiarach 15 punktów w przedziale $[0,1]$ wzdłuż promienia, 50 punktów przypadających na przedział kątowy $(0-2\pi]$. Problem został zapisany jako problem programowania liniowego na podstawie twierdzenia 3 i rozwiązany za pomocą programu PCx. Wykres otrzymanej funkcji Lapunowa jest przedstawiony na rys.3, a poziomice obejmującą największy obszar zawartą w zbiorze G przedstawiono na rys.4.

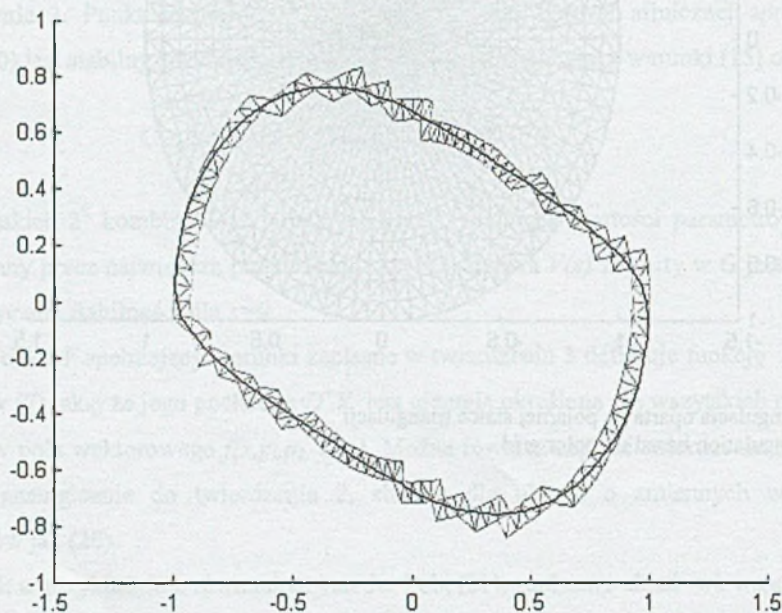


Rys. 2. Triangulacja oparta na polarnej siatce triangulacji
Fig. 2. Triangulation based on polar grid



Rys. 3. Wykres funkcji Lapunowa powstały w wyniku rozwiązania zagadnienia programowania liniowego dla siatki triangulacji polarnej

Fig. 3. Surface plot of the Lyapunov function computed as solution to the linear programming problem based on polar grid triangulation



Rys. 4. Poziomica funkcji Lapunowa

Fig. 4. Level curve of the obtained Lyapunov function

6. Siatka triangulacji adaptacyjnej

Wyniki pracy [14] przedstawiają silną zależność pomiędzy wyborem siatki triangulacji a otrzymanym obszarem stabilności asymptotycznej. W związku z tym wydaje się słusznym wybór jak najlepszej siatki triangulacji. Utworzono procedurę adaptacji siatki triangulacji dla problemu zapisanego w postaci typu (25). Wyniki otrzymane są lepsze niż przy zastosowaniu podejścia [14]. Rozwiązanie problemu programowania liniowego zapisanego jako (16-18) otrzymano z większą dokładnością (10^{-08}). Potwierdza to celowość podejścia doboru adaptacyjnego siatki triangulacji.

7. Procedura adaptacji siatki

Pierwszy krok procedury jest identyczny z wcześniejszym podejściem (1-25), należy zaproponować siatkę triangulacji polarnej, która znajduje się wewnątrz obszaru stabilnych warunków początkowych. Następnie należy rozwiązać (16-18) oraz otrzymać maksymalną poziomice w sensie twierdzenia 3. Mając daną maksymalną poziomice zdefiniowaną nad siatką triangulacji jako:

$$g = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_K] \quad (27)$$

gdzie $K=50$ liczba punktów poziomicy, co odpowiada liczbie punktów przypadających na przedział kątowy $(0-2\pi)$. Każdy element macierzy g odpowiada punktowi przecięcia poziomicy z odpowiednią krawędzią komórki (rysunek 4). Wybieramy wektor skalujący w o wymiarze $(1 \times M)$ gdzie M - zadana liczba podziałów promienia r:

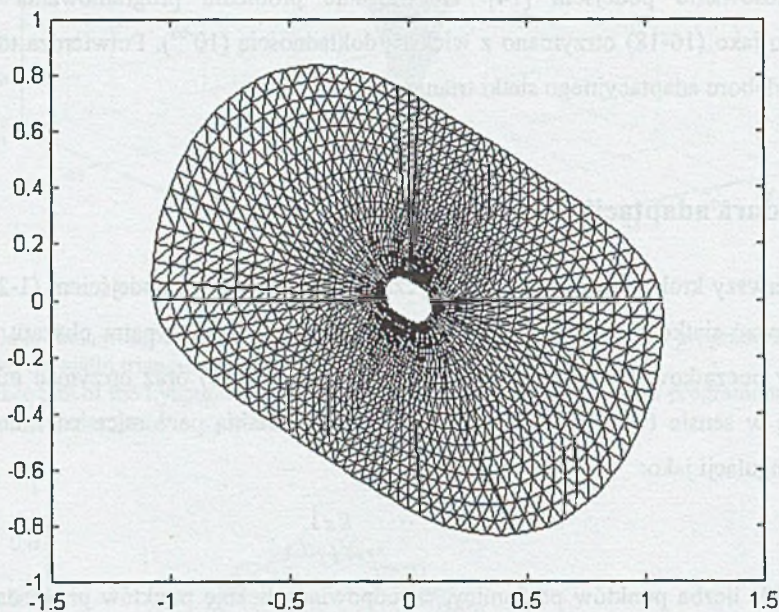
$$w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_M] \quad (28)$$

Nowe współrzędne punktów triangulacji są wpisane w macierzy postaci macierzy (1):

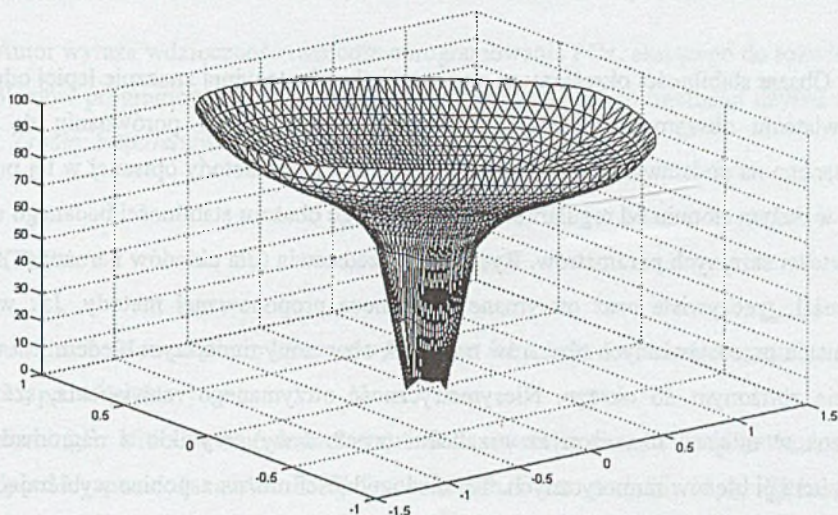
$$G = g * E_w$$

gdzie $E_w = [E_{w_1} \quad E_{w_2} \quad \dots \quad E_{w_M}]$, $E_{w_i} = \begin{bmatrix} w_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & & w_i \end{bmatrix}$ (29)

Obliczona macierz G zawiera nowe współrzędne punktów siatki, na jej podstawie jest utworzona triangulacja przedstawiona na rysunku 5. Macierze E_{w_i} mają wymiar $(K \times K)$ każda. Mając dane macierz (29) powtarzamy procedurę iteracyjnie jak w (1) do (24) otrzymując (27). Wynik otrzymanej funkcji Lapunowa na podstawie siatki adaptacyjnej przedstawia rysunek 6.



Rys. 5. Triangulacja oparta na adaptacyjnej siatce
Fig. 5. Triangulation based on adaptiv grid

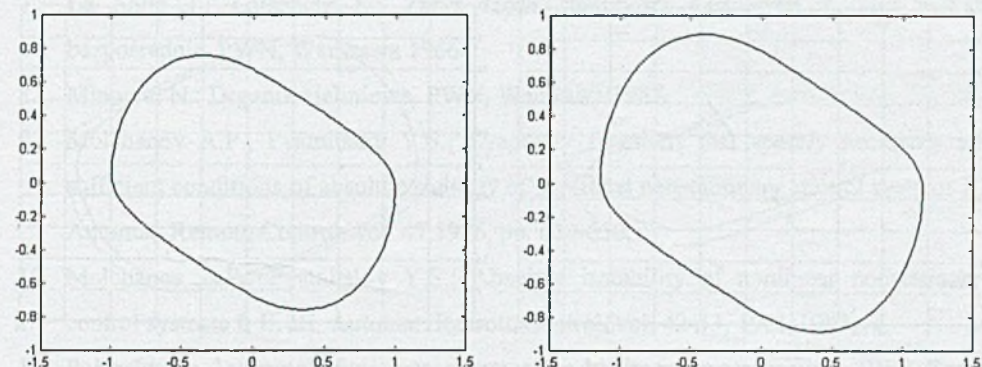


Rys. 6. Wykres funkcji Lapunowa powstały w wyniku rozwiązania zagadnienia programowania liniowego dla triangulacji opartej na adaptacyjnej siatce

Fig. 6. Surface plot of the Lyapunov function computed as solution to the linear programming problem based on adaptiv grid triangulation

Wielkość siatki triangulacji zależy od wektora skalującego w (28), który mnożymy w każdym kroku procedury przez przyjęty odgórnie parametr $p_w = 1.1$.

Postępując zgodnie z opisanym algorytmem, otrzymano następujące wyniki zamieszczone na rys. 7, po lewej stronie obszar stabilności asymptotycznej dla siatki polarnej po prawej obszar stabilności otrzymany dla nowego typu siatki.



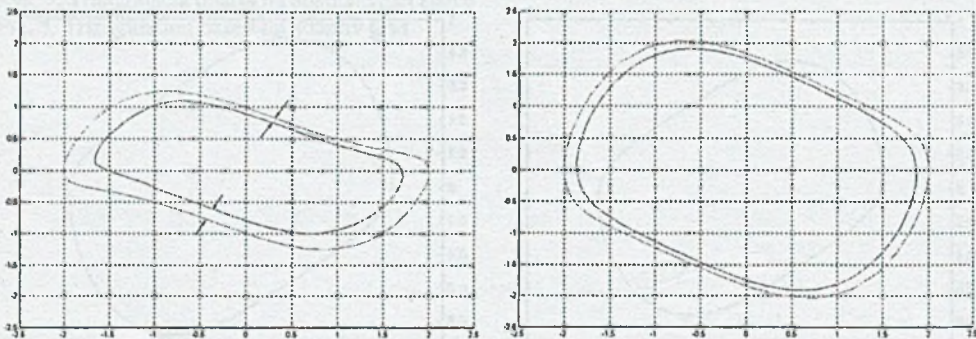
Rys. 7. Porównanie: rysunek z lewej - poziomicą funkcji Lapunowa otrzymanej na podstawie siatki polarnej, rysunek z prawej - poziomicą funkcji Lapunowa na podstawie algorytmu adaptacyjnego

Fig. 7. Results comparison: Left - level curve of the obtained Lyapunov function based on polar grid, right - level curve of the obtained Lyapunov function based on the adaptiv grid

8. Dokładność metody

Obszar stabilności określony za pomocą siatki adaptacyjnej znacznie lepiej odpowiada rzeczywistemu obszarowi stabilności badanego układu (19) w porównaniu do wyniku otrzymanego na podstawie siatki triangulacji polarnej. Błąd metody opisaney w tej publikacji zależy w dużym stopniu od regularności rzeczywistego obszaru stabilności badanego układów dla wartości skrajnych parametrów. Rysunek 8 przedstawia (dla układów narożnych) obszary stabilności: rzeczywiste oraz otrzymane za pomocą proponowanej metody. Jak wynika z porównania przedstawionych obszarów na rys. 8, obarczony mniejszym błędem jest obszar o kształcie zbliżonym do okręgu. Niesymetryczność otrzymanego rozwiązania, szczególnie widoczna w miejscu oznaczonym strzałkami (rys.8. lewy), wynika z nagromadzenia w trakcie iteracji błędów numerycznych. Tej niedogodności można zapobiec wybierając gęstszą początkową siatkę triangulacji. Jednak zagęszczenie siatki startowej wiąże się z zwielokrotnieniem czasu obliczeń. Lepszym rozwiązaniem tego typu problemu jest zastosowanie bardziej złożonego algorytmu adaptacji siatki, nie wiążącego się ze wzrostem czasu obliczeń, którego wyniki zastaną opublikowane w przyszłości.

Wyniki otrzymane za pomocą przedstawionej metodologii są dość zadowolające i wskazują, iż adaptacyjny podział przestrzeni stanów zastosowany do odcinkami liniowej funkcji Lapunowa pozwala na dokładniejsze określenie obszaru stabilności nieliniowych układów dynamicznych ze zmieniającymi parametrami niż wcześniejsze rozwiązania.



Rys. 8. Błąd metody dla układów narożnych: rysunek lewy dla $\alpha_{min} = 0.2$. Krzywa obejmująca większe pole przedstawia rzeczywisty obszar stabilności, krzywa wewnętrzna to obszar otrzymany na podstawie prezentowanej metody rysunek prawy analogicznie dla $\alpha_{max} = 0.8$

Fig. 8. Stability regions for narrow systems: left for $\alpha_{min} = 0.2$, Outer cruve shows the stability region, inner cruve is for presented method, right figure analogues for $\alpha_{max} = 0.8$

Podziękowania

Autor wyraża wdzięczność twórcom oprogramowania PCx, służącego do rozwiązywania problemów programowania liniowego, za opublikowanie go do ogólnego użytku w sieci Internet. Źródło: <http://www.mcs.anl.gov/otc/Tools/PCx/Windows/>

LITERATURA

1. Blanchini F.: Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. *Automatica*, vol. 31, 1995, pp. 451-461.
2. Blanchini F.: Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 39, no. 2, 1994, pp.428-433.
3. Blanchini F., Miani S.: On the transient estimate for linear systems with time-varying uncertain parameters. *IEEE Trans. Circuits. Syst.*, vol. 43, no. 7, 1996, pp. 592-596.
4. Blanchini F., Miani S.: A new class of universal Lyapunov Functions for the Control of Uncertain Linear Systems, *Proc. CDC, Kobe 1996*.
5. Brayton, Tang: Stability of dynamical systems, a constructive approach, *IEEE Trans. Circuits Systems*, vol.26, 1979, pp. 224-234.
6. Julián P., Guivant J., Desages A.: A parametrization of piecewise linear Lyapunov functions via linear programming. *Int. J. Control*, 72 (7/8), 1999, 702-715.
7. La Salle J., Lafschetz S.: *Zarys teorii stabilności Lapunowa I jego metody bezpośrednio*. PWN, Warszawa 1966.
8. Minorski N.: *Drgania nieliniowe*. PWN, Warszawa 1967.
9. Molchanov A.P., Pyatnitskiy Y.S.: Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear nonstationary control systems III. *Automat. Remote Control*. vol. 47,1986, pp. 620-630.
10. Molchanov A.P., Pyatnitskiy Y.S.: Absolute instability of nonlinear nonstationary control systems I, II, III. *Automat. Remote Control*. vol. 42-43, 1981-1982.
11. Polanski A.: Lyapunov functions construction by linear programming. *IEEE Trans. Autom. Contr.* vol. 42, no. 7, 1997, pp. 1113-1116.
12. Polanski A.: On absolute stability analysis by polyhedral Lyapunov functions, *Automatica*. vol. 36, 2000, pp. 573-578.

13. Polanski A.: On infinity norms as Lyapunov functions for linear systems. IEEE Trans. on Automatic Control. vol. 40 (7), 1995, pp. 1270-1274.
14. Polanski A., Groen M.: Stability analysis by piecewise affine approximations and piecewise linear Lyapunov functions. Proceedings of IASTED MIC Conference, Innsbruck 2000.
15. Vassilaki M., Bitsoris G.: Constrained regulation of linear continuous - time dynamical systems., Syst. Contr. Lett., vol. 13, 1989, pp. 247-252.
16. Tarbouriech S., Burgat C.: Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties. IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 39, no. 2, 1994, pp. 401-405.
17. Johansson M., Rantzer A.: Computation of Piecewise Quadratic Functions for Hybrid Systems. IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 43, no. 4, 1998, pp. 555-560.
18. Pettersson S., Lennartson S.: An LMI Approach for Stability Analysis. Proc. ECC, Brussels 1997.
19. Yoshizawa T.: Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo, The Math. Soc. Of Japan, 1966.
20. Rouche N., Habets P., Laloy M.: Stability theory by Lyapunov's direct method. Springer Heidelberg 1977.

Praca wykonana w ramach grantu KBN 4T11A01223.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Wojciech MITKOWSKI

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 stycznia 2002 r.

Abstract

Estimating the stability region for nonlinear systems and especially for nonstationary nonlinear systems is not simple. For the computational problems of the control theory and of the theory of the systems the computation problems the Lyapunov function defined by range approximation is used. This paper presents applications of piecewise linear Lyapunov functions in the stability analysis of the nonlinear dynamical systems with uncertainty. An example is demonstrated for the Van der Pole equation in a special case when parameter α is

in range $[\alpha_{min} \ \alpha_{max}]$. Above example is used for comparing results obtained with polar triangulation grid and with a new adaptive one. The form of triangulation grid and matching it to investigated nonlinear system is fundamental for obtaining proper stability region of the state space. The proposed adaptive method gives stability region more exact then ordinary quadratic Lyapunov function, the region is also better then region obtained using pieewise linear Lyapunov function based on polar triangulation grid without adaptive procedure. Simulation results proved the quality of the proposed method. Presented method could be successfully adopted for investigating other nonlinear parametr varying dynamical systems.