ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: AUTOMATYKA z. 138 Nr kol. 1581

Adam WORYNA
Politechnika Śląska

ODWZOROWANIA OKREŚLONE ZA POMOCĄ AUTOMATÓW MEALY'EGO ZMIENNYCH W CZASIE

Streszczenie. Spośród wielu artykułów dotyczących automatów przetwornikowych większość opisuje automaty, których struktura wewnętrzna jest taka sama we wszystkich momentach dyskretnej skali czasu, lub też automaty zmienne w czasie o ustalonym alfabecie. Obszerny opis tego typu automatów zawiera monografia [12]. W poniższej pracy uogólniono pojęcie automatu zmiennego w czasie dopuszczając możliwość zmiany samego alfabetu w kolejnych taktach pracy automatu; zdefiniowano i opisano funkcje generowane przez takie automaty. W szczególności opisano funkcje generowane przez dwa najważniejsze rodzaje automatów zmiennych w czasie - automaty okresowe i automaty permutacyjne.

ON THE TRANSFORMATIONS GIVEN BY THE MEALY TIME VARYING AUTOMATA

Summary. From among many articles concerning the automata as transducers most of them describe direct automata which have the same structure in all the moments of the discrete time scale or the time varying automata with a fixed alphabet. The extensive presentation of the knowledge on the mentioned above automata includes a monograph [12]. The given work generalizes the idea of time varying automata allowing for a possibility of change of the alphabet itself in the consecutive tacts of the automaton's work; the transformations generated by these automata are defined and described. In particular the transformations generated by two of the most important time varying automata are described namely periodic automata as well as permutation automata.

1. Definicja i podstawowe pojęcia

Przedstawimy najpierw podstawowe pojęcia związane z klasą automatów zmiennych w czasie nad zmiennym alfabetem. Niech $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. **Zmiennym alfabetem** X nazywamy nieskończony ciąg $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, przy czym X_t są niepustymi skończonymi zbiorami, których elementy nazywamy **literami**. **Słowem** nad alfabetem X

nazywamy każdy skończony ciąg $x_0x_1..x_n$ liter, w którym $x_t \in X_t$ dla $t=0,1,...,n$. Symbolem ε oznaczamy **słowo puste.**

Przez X^* oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem X. Przez $X^{(t)}$ oznaczamy zbiór wszystkich słów t-literowych nad alfabetem X, np. $X^{(0)} = \{\varepsilon\}$, $X^{(1)} = X_0$ itd. Przez ${}^{(t)}X$ oznaczamy zbiór wszystkich skończonych ciągów, w których i-ty wyraz należy do zbioru X_{t+i-1} $(i = 1,2,3,...)$, np. ${}^{(0)}X = X^*$.

Liczbę liter w każdym ciągu $w \in {}^{(t)}X$ $(t = 0,1,2,...)$ nazywamy **długością** tego ciągu i oznaczamy przez $|w|$. Jeżeli $t \in \mathbb{N}_0$, $w \in {}^{(t)}X$ oraz $v \in {}^{(|w|+t)}X$, to przez wv oznaczamy ciąg powstały przez wypisanie kolejno wyrazów ciągów w i v. Oczywiście $wv \in {}^{(t)}X$ oraz $|wv| = |w| + |v|$. Mówimy, że słowo $w \in X^*$ jest **prefiksem** słowa $u \in X^*$, jeżeli $u = wv$ dla pewnego $v \in {}^{(|w|)}X$. Piszemy wtedy również $v = u - w$.

Definicja 1.1

Automatem zmiennym w czasie nazywamy piątkę $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$, w której: $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ jest nieskończonym ciągiem niepustych zbiorów, zwanych **zbiorami stanów** automatu A; $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ i $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ są zmiennymi alfabetami zwanymi odpowiednio **alfabetem wejściowym** i **alfabetem wyjściowym**; $\varphi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ jest nieskończonym ciągiem funkcji zwanych **funkcjami przejść** automatu A, przy czym $\varphi_t : S_t \times X_t \to S_{t+1}$ dla $t \in \mathbb{N}_0$; $\psi = (\psi_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ jest nieskończonym ciągiem funkcji zwanych **funkcjami wyjść** automatu A, przy czym $\psi_t : S_t \times X_t \to X_t$ dla $t \in \mathbb{N}_0$.

Z powyższego opisu wynika, że w chwili czasu t automat A jest określony jako automat ustalony $A_t = (S_t, X_t, Y_t, \varphi_t, \psi_t)$, który znajdując się w pewnym stanie $s \in S_t$ i wczytując na wejściu literę $x \in X_t$ wypisuje na wyjściu literę $\psi_t(s,x) \in Y_t$ i przechodzi w kolejnej jednostce czasu $t+1$ do stanu $\varphi_t(s,x) \in S_{t+1}$ zmieniając równocześnie swoją strukturę - przekształcając się w automat ustalony $A_{t+1} = (S_{t+1}, X_{t+1}, Y_{t+1}, \varphi_{t+1}, \psi_{t+1})$.

Przykład 1.1

Niech $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ będzie automatem zmiennym w czasie, w którym $S_t = 2\mathbb{N}_0 + 1$ dla $t \in 2\mathbb{N}_0$ oraz $S_t = 2\mathbb{N}_0$ dla $t \in 2\mathbb{N}_0 + 1$; $X_t = Y_t = \{0,2,4\}$ dla $t \in 2\mathbb{N}_0$ oraz $X_t = Y_t = \{1,3,5\}$ dla $t \in 2\mathbb{N}_0 + 1$; $\varphi_t(s,x) = s \cdot t + x$ oraz $\psi_t(s,x) = (s \cdot t + x)_6$, dla $t \in \mathbb{N}_0$, $s \in S_t$, $x \in X_t$, gdzie $(n)_m$ oznacza resztę z dzielenia n przez m. Łatwo sprawdzamy, że funkcje φ_t są postaci: $\varphi_t : S_t \times X_t \to S_{t+1}$, a funkcje

ψ_t postaci: $\psi_t : S_t \times X_t \to Y_t$. W automacie A alfabety: wejściowy X i wyjściowy Y są takie same. Oprócz słowa pustego, do zbioru słów $X^* = Y^*$ należą wszystkie skończone ciągi cyfr ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5\}$, w których na przemian występują cyfry parzyste i nieparzyste, a pierwsza litera jest cyfrą parzystą, np. 0, 2341010, 012345 są słowami. Zgodnie z określeniem funkcji przejść i funkcji wyjść mamy:

$$\varphi_4(9,0) = 36 \in S_5\,,\ \varphi_5(2,1) = 11 \in S_6\,,\ \ \psi_4(9,0) = 0 \in X_4\,,\ \psi_5(2,1) = 5 \in X_5\,.$$

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki automatów zmiennych w czasie (por. [12], s. 248). Niech $A = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ będzie automatem zmiennym w czasie. Jeżeli $X_0 = X_1 = X_2 = \ldots$ oraz $Y_0 = Y_1 = Y_2 = \ldots$, to A redukuje się do automatu, zwanego **automatem zmiennym w czasie z ustalonym alfabetem**. Jeżeli tyko jeden z alfabetów jest ustalony, to A nazywamy **automatem zmiennym w czasie z ustalonym alfabetem** odpowiednio **wejściowym** lub **wyjściowym**. Jeżeli liczności zbiorów S_t są wspólnie ograniczone, to A nazywamy **automatem zmiennym w czasie z ograniczonym zbiorem stanów**. Jeżeli $S_0 = S_1 = S_2 = \ldots$, to A nazywamy **automatem zmiennym w czasie z ustalonym zbiorem stanów**. Jeżeli A jest automatem zmiennym w czasie z ustalonym alfabetem wejściowym i ponadto $S_0 = S_1 = S_2 = \ldots$ oraz $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots$, to A nazywamy **automatem zmiennym w czasie z ustaloną funkcją przejść**. Jeżeli A jest automatem zmiennym w czasie z ustalonym alfabetem i ponadto $S_0 = S_1 = S_2 = \ldots$ oraz $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \ldots$, to A nazywamy **automatem zmiennym w czasie z ustaloną funkcją wyjść**. Automat zmienny w czasie z ustaloną funkcją przejść i ustaloną funkcją wyjść redukuje się do zwykłego automatu, zwanego **automatem ustalonym**.

Jeżeli $A = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ jest automatem zmiennym w czasie oraz istnieją liczby całkowite $\tau \geq 0$ oraz $T \geq 0$ takie, że dla dowolnego $t \geq \tau$: $S_{t+T} = S_t$, $X_{t+T} = X_t$, $\varphi_{t+T} = \varphi_t$, $\psi_{t+T} = \psi_t$, to A nazywamy **automatem okresowym**. Najmniejsze liczby całkowite τ oraz T spełniające powyższy warunek nazywamy - odpowiednio - **czasem przejścia** oraz **okresem automatu** A. Automat okresowy o czasie przejścia τ oraz okresie T nazywamy również automatem (τ, T)-okresowym. Jeżeli $\tau = 0$, to automat okresowy jest nazywany **automatem ściśle okresowym**.

Przykład 1.2

Niech $A = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ będzie automatem zmiennym w czasie, w którym zbiory stanów S_t, alfabet wejściowy X, alfabet wyjściowy Y oraz funkcje wyjść są określone tak jak w automacie z przykładu 1.1, natomiast funkcje przejść są określone wzorem:

$\varphi_t(s,x) = s + x + (t+1)_2$ dla $t \in \mathbb{N}_0$, $s \in S_t$, $x \in X_t$. Łatwo sprawdzamy, że $\varphi_t : S_t \times X_t \to S_{t+1}$. Zauważmy teraz, że dla $\tau = 0$ i $T = 6$ mamy: $S_{t+T} = S_t$, $X_{t+T} = X_t$, $\varphi_{t+T} = \varphi_t$, $\psi_{t+T} = \psi_t$ dla dowolnego $t \geq \tau$. Ponadto liczba $T = 6$ jest najmniejszą liczbą o tej własności. Zatem A jest automatem $(0,6)$-okresowym i jest to automat ściśle okresowy.

2. Funkcje automatowe. Równoważność automatów

Dla zmiennego w czasie automatu $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ wprowadza się **rozszerzone funkcje przejść** $\overline{\varphi}_t : S_0 \times X^{(t)} \to S_t$ w następujący sposób:

a) $\overline{\varphi}_0(s,\varepsilon) = s$ dla $s \in S_0$,

b) $\overline{\varphi}_t(s,wx) = \varphi_{t-1}(\overline{\varphi}_{t-1}(s,w),x)$ dla dowolnych $t \in \mathbb{N}$, $s \in S_0$, $x \in X_{t-1}$, $w \in X^{(t-1)}$.

Przykład 2.1

Dla automatu z przykładu 1.1 wyznaczmy $\overline{\varphi}_4(1,4301)$. Dostajemy kolejno:

$$\varphi_0(1,4) = 4 \in S_1,\ \varphi_1(\varphi_0(1,4),3) = \varphi_1(4,3) = 7 \in S_2,$$

$$\varphi_2(\varphi_1(4,3),0) = \varphi_2(7,0) = 14 \in S_3,\ \varphi_3(\varphi_2(7,0),1) = \varphi_3(14,1) = 43 \in S_4.$$

Zatem: $\overline{\varphi}_4(1,4301) = 43 \in S_4$.

Wprowadza się również **rozszerzoną funkcję wyjść** $\overline{\psi} : S_0 \times X^* \to Y^*$ w następujący sposób:

a) $\overline{\psi}(s,\varepsilon) = \varepsilon$,

b) $\overline{\psi}(s,wx) = \overline{\psi}(s,w)\psi_{|w|}(\overline{\varphi}_{|w|}(s,w),x)$ dla dowolnych $s \in S_0$, $w \in X^*$, $x \in X_{|w|}$.

Z określenia funkcji $\overline{\psi}$ mamy: $\overline{\psi}(s,u) = \psi_0(s_0,x_0)\psi_1(s_1,x_1)...\psi_n(s_n,x_n)$ dla dowolnego słowa $u = x_0x_1...x_n \in X^*$, przy czym: $s_0 = s$, $s_i = \varphi_{i-1}(s_{i-1},x_{i-1})$ dla $i = 1,2,...,n$.

Zmienny w czasie automat $A_{s_0} = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ z wyróżnionym **stanem początkowym** $s_0 \in S_0$ nazywamy **automatem inicjalnym**. Każdy stan s automatu A_{s_0}, dla którego istnieje słowo $w \in X^*$ takie, że $\overline{\varphi}_{|w|}(s_0,w) = s$ nazywamy **stanem osiągalnym** tego automatu. Jeżeli każdy stan automatu A_{s_0} jest stanem osiągalnym, to automat taki nazywamy **automatem osiągalnym**.

Przykład 2.2

Jeżeli w automacie A z przykładu 1.1 wyróżnimy stan $1 \in S_0$, to otrzymamy automat inicjalny A_1. Zbiór stanów osiągalnych automatu A_1 jest sumą zbiorów $A_t = \{\overline{\varphi}_t(1,w) : w \in X^{(t)}\}$, $t = 0,1,2,\ldots$ Mamy np. $A_0 = \{1\}$, $A_1 = \{0,2,4\}$, $A_2 = \{1,3,5,7,9\}$. Można pokazać, że dla $t > 1$ zachodzi:

$$s \in A_t \Leftrightarrow s \in S_t \wedge (t-1)! \sum_{i=0}^{[t/2]-1} \frac{1}{(2i+1)!} \leq s \leq (t-1)! \left(\sum_{i=0}^{[t/2]-1} \frac{1}{(2i+1)!} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{i!} \right)$$

Z powyższej równoważności wynika, że automat A_1 ma wiele stanów, które nie są stanami osiągalnymi, np. stan 24 nie należy do żadnego ze zbiorów A_t i można sprawdzić, że jest to „najmniejszy" stan o tej własności. Automat A_1 nie jest zatem automatem osiągalnym.

Definicja 2.1

Niech $A_{s_0} = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ będzie automatem inicjalnym. Funkcję $f : X^* \to Y^*$ nazywamy **funkcją generowaną przez automat** A_{s_0} jeżeli $f(w) = \overline{\psi}(s_0,w)$ dla każdego $w \in X^*$. Funkcję $f : X^* \to Y^*$ nazywamy **funkcją automatową**, jeżeli f jest generowana przez pewien automat inicjalny o alfabecie wejściowym X i alfabecie wyjściowym Y. Żeby zaznaczyć, że funkcja f jest generowana przez automat inicjalny A_s, piszemy również f_s^A.

Jeżeli funkcja f jest generowana przez automat A_{s_0}, to automat ten nie musi być automatem osiągalnym. Zauważmy jednak, że f jest generowana również przez automat osiągalny A'_{s_0} powstały z automatu A_{s_0} przez usunięcie wszystkich stanów, które nie są stanami osiągalnymi.

Przykład 2.3

Niech A_1 będzie automatem inicjalnym z przykładu 2.2. Policzmy $f_1^A(4301)$:

$$f_1^A(4301) = \overline{\psi}(1,4301) = \psi_0(1,4)\psi_1(4,3)\psi_2(7,0)\psi_3(14,1) = 4121.$$

Definicja 2.2

Zmienne w czasie automaty $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ i $A' = (S',X,Y,\varphi',\psi')$ nazywamy **automatami równoważnymi**, jeżeli:

$$\{f_s^A : s \in S_0\} = \{f_s^{A'} : s \in S'_0\}.$$

Równoważność automatów A i A' będziemy zapisywać następująco: $A \sim A'$.

Badając własności jakiegoś automatu A często wygodniej jest rozpatrywać inny automat A' równoważny automatowi A i w pewnym sensie prostszy od niego.

Twierdzenie 2.1

Każdy automat zmienny w czasie jest równoważny pewnemu automatowi zmiennemu w czasie z ustalonym zbiorem stanów.

Dowód

Niech $A = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ będzie automatem zmiennym w czasie; Q - dowolnym zbiorem mocy $\max\{| S_t |: t \in \mathbb{N}_0\}$; funkcje $h_t : Q \to S_t$ - surjekcjami. Niech $A' = (S', X, Y, \varphi', \psi')$ będzie dowolnym automatem zmiennym w czasie, dla którego: $S'_t = Q$, $h_{t+1}(\varphi'_t(q,x)) = \varphi_t(h_t(q),x)$, $\psi'_t(q,x) = \psi_t(h_t(q),x)$ dla dowolnych $t \in \mathbb{N}_0$, $q \in Q$, $x \in X_t$. Dla każdego stanu $q \in Q$ oraz słowa $u = x_0 x_1 .. x_n \in X^*$ mamy:

$$f_q^{A'}(u) = \psi'_0(q_0, x_0)\psi'_1(q_1, x_1)...\psi'_n(q_n, x_n),$$

gdzie $q_0 = q$, $q_i = \varphi'_{i-1}(q_{i-1}, x_{i-1})$, $i = 1,2,...,n$. Dla funkcji $f_{h_0(q)}^{A}(u)$ mamy:

$$f_{h_0(q)}^{A}(u) = \psi_0(s_0, x_0)\psi_1(s_1, x_1)...\psi_n(s_n, x_n),$$

gdzie: $s_0 = h_0(q)$, $s_i = \varphi_{i-1}(s_{i-1}, x_{i-1})$, $i = 1,2,...,n$. Indukcyjnie łatwo można pokazać, że $h_i(q_i) = s_i$ dla $i = 1,2,...,n$. Stąd:

$$\psi'_i(q_i, x_i) = \psi'_i(\varphi'_{i-1}(q_{i-1}, x_{i-1}), x_i) = \psi_i(h_i(\varphi'_{i-1}(q_{i-1}, x_{i-1})), x_i) =$$
$$= \psi_i(\varphi_{i-1}(h_{i-1}(q_{i-1}), x_{i-1}), x_i) = \psi_i(\varphi_{i-1}(s_{i-1}, x_{i-1}), x_i) = \psi_i(s_i, x_i)$$

dla $i = 1,2,...,n$, czyli $f_q^{A'}(u) = f_{h_0(q)}^{A}(u)$ a ponieważ funkcja h_0 jest surjekcją, dostajemy równoważność $A \sim A'$.

Z powyższego dowodu wynika również, że jeżeli A jest automatem zmiennym w czasie z ograniczonym zbiorem stanów, to istnieje równoważny mu automat A' zmienny w czasie z ustalonym zbiorem stanów, w którym zbiór ten jest skończony.

Przykład 2.4

Skonstruujemy zmienny w czasie automat $A' = \{S', X, Y, \varphi', \psi'\}$ z ustalonym zbiorem stanów S' równoważny automatowi A z przykładu 1.1. Przyjmujemy $S'_0 = S'_1 = S'_2 = ... = \mathbb{N}_0$. Dla $t = 0,1,2,...$ określamy funkcje $h_t : \mathbb{N}_0 \to S_t$ wzorami $h_t(n) = 2n + 1 - (t)_2$. Łatwo sprawdzić, że funkcje h_t są surjekcjami. Z równości $h_{t+1}(\varphi'_t(n,x)) = \varphi_t(h_t(n),x)$ otrzymujemy:

$$\varphi'_t(n,x) = \begin{cases} tn + \dfrac{x+t}{2}, & t \in 2\mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}_0,\ x \in X_t \\ tn + \dfrac{x-1}{2}, & t \in 2\mathbb{N}_0 + 1,\ n \in \mathbb{N}_0,\ x \in X_t \end{cases};$$

Z równości $\psi_t^{'}(n,x) = \psi_t(h_t(n),x)$ mamy: $\psi_t^{'}(n,x) = (t \cdot (2n+1-(t)_2)+x)_6$ dla $t \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in X_t$.

Definicja 2.3

Zmienny w czasie automat $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ nazywamy automatem **regularnym** (por. [12], str. 254), jeżeli spełnione są następujące warunki:

a) $S_n \cap S_m = \varnothing$ albo $S_n = S_m$,

b) $S_n = S_m \Rightarrow X_n = X_m$, $\varphi_n = \varphi_m$, $\psi_n = \psi_m$.

dla dowolnych $n,m \in \mathbb{N}_0$.

Twierdzenie 2.2

Jeżeli $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ jest automatem regularnym oraz $S_n \cap S_m \neq \varnothing$ dla pewnych $n,m \in \mathbb{N}_0$, to: $S_{n+t} = S_{m+t}$, $X_{n+t} = X_{m+t}$ $\varphi_{n+t} = \varphi_{m+t}$, $\psi_{n+t} = \psi_{m+t}$ dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$.

Dowód

Wynika bezpośrednio z definicji automatu regularnego.

Twierdzenie 2.3

Każdy automat zmienny w czasie jest równoważny pewnemu regularnemu automatowi zmiennemu w czasie.

Dowód

Niech $A = (S,X,Y,\varphi,\psi)$ będzie automatem zmiennym w czasie. Wtedy zmienny w czasie automat $A' = (S',X,Y,\varphi',\psi')$, w którym:

$$S_t^{'} = \{(s,t) : s \in S_t\},\ \varphi_t^{'}((s,t),x) = (\varphi_t(s,x),t+1),\ \psi_t^{'}((s,t),x) = \psi_t(s,x)$$

dla dowolnych $t \in \mathbb{N}_0$, $x \in X_t$ jest automatem regularnym równoważnym automatowi A. Regularność automatu A' wynika z oczywistej równoważności $S_n^{'} \cap S_m^{'} \neq \varnothing \Leftrightarrow n = m$. Ponadto dla dowolnego stanu $s \in S_0$ oraz słowa $u = x_0x_1...x_n \in X^*$, i - tą literą ($i = 1,2,...,|u|$) słowa $f_s^A(u)$ jest $\psi_{i-1}(s_{i-1},x_{i-1})$, gdzie: $s_0 = s$, $s_i = \varphi_{i-1}(s_{i-1},x_{i-1})$, $i = 1,2,...,n$ Natomiast i-tą literą słowa $f_{(s,0)}^{A'}(u)$ jest $\psi_{i-1}^{'}(s_{i-1}^{'},x_{i-1})$, gdzie: $s_0^{'} = (s,0)$, $s_i^{'} = \varphi_{i-1}^{'}(s_{i-1}^{'},x_{i-1})$, $i = 1,2,...,n$. Z określenia funkcji $\varphi_i^{'}$ łatwo indukcyjnie można pokazać, że $s_i^{'} = (s_i,i)$ dla $i = 1,2,...,n$. Stąd:

$$\psi_{i-1}^{'}(s_{i-1}^{'},x_{i-1}) = \psi_{i-1}^{'}((s_{i-1},i-1),x_{i-1}) = \psi_{i-1}(s_{i-1},x_{i-1}) \text{ dla } i = 1,2,...,n.$$

Zatem $f_{(s,0)}^{A'}(u) = f_s^A(u)$ i w konsekwencji funkcje $f_s^A(u)$ i $f_{(s,0)}^{A'}(u)$ są równe. Z dowolności wyboru stanu s wynika równoważność $A \sim A'$.

Wniosek 2.1

Każdy automat (τ, T)-okresowy jest równoważny pewnemu regularnemu automatowi (τ, T)-okresowemu.

Dowód

Niech $A = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ będzie automatem (τ, T)-okresowym. Automat $A' = (S', X, Y, \varphi', \psi')$, w którym: $S'_t = \{(s, t') : s \in S_t\}$, $\varphi'_t((s, t'), x) = (\varphi_t(s, x), (t+1)')$, $\psi'_t((s, t'), x) = \psi_t(s, x)$ dla dowolnych $t \in \mathbb{N}_0$, $x \in X_t$, przy czym:

$$t' = \begin{cases} t - \tau & \text{dla } t < \tau \\ \text{reszta z dzielenia } t \text{ przez } T & \text{dla } t \geq \tau \end{cases}$$

jest regularnym automatem (τ, T)-okresowym, równoważnym automatowi A.

3. Funkcje zachowujące początki i długości słów

W zbiorze słów nad ustalonym alfabetem określamy dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$ relację $\sim_k$:

$$v \sim_k w \Leftrightarrow \text{słowa } v \text{ i } w \text{ mają wspólny prefiks długości } k.$$

Niech X i Y będą zmiennymi alfabetami. Od tego momentu zakładamy, że wszystkie rozpatrywane funkcje są postaci $f : X^* \to Y^*$ (chyba że zaznaczono inaczej).

Definicja 3.1

Mówimy, że funkcja f **zachowuje początki słów**, jeżeli f jest zgodna z relacją $\sim_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$.

Definicja 3.2

Mówimy, że funkcja f **zachowuje długości słów**, jeżeli dla każdego $w \in X^*$ zachodzi: $| f(w) | = | w |$

Lemat 3.1

Jeżeli funkcja f zachowuje początki i długości słów oraz u jest prefiksem długości k słowa v, to $f(u)$ jest prefiksem długości k słowa $f(v)$.

Dowód

Ponieważ $u \sim_k v$, to $f(u) \sim_k f(v)$ i z równości $| f(u) | = | u | = k$ mamy tezę.

Przykład 3.1

- o funkcja identycznościowa Id_{X^*} na zbiorze słów zmiennego alfabetu X zachowuje początki i długości słów;
- o dla $i = 0,1,2,\ldots$ niech $\sigma_i : X_i \to Y_i$ będzie dowolną funkcją ze zbioru X_i liter zmiennego alfabetu X w zbiór Y_i liter zmiennego alfabetu Y. Funkcja $f : X^* \to Y^*$ określona wzorem:
$$f(u) = \sigma_0(x_0)\sigma_1(x_1)\ldots\sigma_n(x_n) \text{ dla } u = x_0x_1\ldots x_n \in X^*,$$
zachowuje początki i długości słów;
- o funkcja stała nie zachowuje ani początków słów, ani długości słów.

Twierdzenie 3.2

Funkcja f jest automatowa wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje początki i długości słów.

Dowód

Jeżeli f jest funkcją automatową generowaną przez automat $A_s = (S, X, Y, \varphi, \psi)$, to dla dowolnego słowa $u = x_0x_1\ldots x_n \in X^*$ mamy:
$$f(u) = \overline{\psi}(s,u) = \psi_0(s_0,x_0)\psi_1(s_1,x_1)\ldots\psi_n(s_n,x_n),$$
czyli $|f(u)| = |\overline{\psi}(s,u)| = n+1 = |u|$. Ponadto jeżeli w jest wspólnym prefiksem długości k słów u i v, to $\overline{\psi}(s,w)$ jest wspólnym prefiksem długości k słów $f(u)$ i $f(v)$.

Jeżeli f zachowuje początki i długości słów, to automat $A_\varepsilon = (S, X, Y, \varphi, \psi)$, w którym $S_t = X^{(t)}$, $\varphi_t(w,x) = wx$, $\psi_t(w,x) = f(wx) - f(w)$ dla dowolnych $t \in \mathbb{N}_0$, $x \in X_t$, $w \in X^{(t)}$, generuje funkcję f. Rzeczywiście, niech $u = x_0x_1\ldots x_n \in X^*$ oraz $f(u) = y_0y_1\ldots y_n \in Y^*$. Wówczas:
$$\overline{\psi}(\varepsilon,u) = \psi_0(\varepsilon,x_0)\psi_1(x_0,x_1)\psi_2(x_0x_1,x_2)\psi_3(x_0x_1x_2,x_3)\ldots\psi_n(x_0x_1\ldots x_{n-1},x_n) =$$
$$= (f(x_0) - f(\varepsilon))(f(x_0x_1) - f(x_0))(f(x_0x_1x_2) - f(x_0x_1))\ldots(f(x_0x_1\ldots x_n), -f(x_0x_1\ldots x_{n-1})) =$$
$$= (y_0 - \varepsilon)(y_0y_1 - y_0)(y_0y_1y_2 - y_0y_1)\ldots(y_0y_1\ldots y_n - y_0y_1\ldots y_{n-1}) = y_0y_1\ldots y_n = f(u),$$
czyli $f(u) = \overline{\psi}(\varepsilon,u)$.

4. Reszty funkcji a automaty okresowe

Definicja 4.1

Niech f będzie funkcją automatową. Możemy wówczas dla każdego słowa $w \in X^*$ określić funkcję $f_w : {}^{(|w|)}X \to {}^{(|w|)}Y$ za pomocą równości $f(wu) = f(w)f_w(u)$. Funkcję f_w nazywamy **resztą funkcji** f na słowie w.

Lemat 4.1

Jeżeli $w \in X^*$, $v \in {}^{(|w|)}X$ *oraz* $u \in {}^{(|wv|)}X$, *to* $f_w(v)f_{wv}(u) = f_w(vu)$.

Dowód

Dla reszty f_w mamy $f(wvu) = f(w)f_w(vu)$, zaś dla reszty f_{wv} mamy: $f(wvu) = f(wv)f_{wv}(u)$. Stąd $f(wv)f_{wv}(u) = f(w)f_w(vu)$ ale $f(wv) = f(w)f_w(v)$, czyli $f(w)f_w(v)f_{wv}(u) = f(w)f_w(vu)$ i ostatecznie $f_w(v)f_{wv}(u) = f_w(vu)$.

Lemat 4.2

Jeżeli $f_w = f_{w'}$, *to* ${}^{(|w|)}X = {}^{(|w'|)}X$ *oraz* $f_{wv} = f_{w'v}$ *dla każdego* $v \in {}^{(|w|)}X$.

Dowód

Z równości funkcji f_w i $f_{w'}$ wynika równość ich dziedzin. Ponadto z lematu 4.1 mamy:

$$f_w(v)f_{wv}(u) = f_w(vu) = f_{w'}(vu) = f_{w'}(v)f_{w'v}(u) = f_w(v)f_{w'v}(u),$$

czyli $f_{wv}(u) = f_{w'v}(u)$.

Twierdzenie 4.3

Jeżeli f *jest funkcją automatową o skończonym zbiorze reszt* $R_f = \{f_w : w \in X^*\}$, *to* f *jest funkcją generowaną przez automat okresowy.*

Dowód

Niech f będzie funkcją automatową, której zbiór reszt R_f jest skończony oraz niech $A_{f_\varepsilon} = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ będzie automatem zmiennym w czasie, w którym:

$$S_t = \{f_w : | w |= t\},\ \varphi_t(f_w, x) = f_{wx},\ \psi_t(f_w, x) = f_w(x)$$

dla dowolnych $t \in \mathbb{N}_0$, $x \in X_t$. Niech $u = x_0x_1...x_n \in X^*$ będzie dowolnym słowem oraz $f(u) = y_0y_1...y_n \in Y^*$. Wówczas:

$$\overline{\psi}(f_\varepsilon, u) = \psi_0(f_\varepsilon, x_0)\psi_1(f_{x_0}, x_1)\psi_2(f_{x_0x_1}, x_2)...\psi_n(f_{x_0x_1...x_{n-1}}, x_n) =$$
$$= f_\varepsilon(x_0)f_{x_0}(x_1)f_{x_0x_1}(x_2)...f_{x_0x_1...x_{n-1}}(x_n) = y_0y_1...y_n = f(u),$$

czyli funkcja f jest generowana przez automat A_{f_ε}. Co więcej, automat A_{f_ε} jest okresowy. Rzeczywiście, wszystkie zbiory S_t są podzbiorami zbioru R_f. Ponieważ R_f jest skończony, więc wszystkich jego podzbiorów jest skończenie wiele i od pewnego miejsca zbiory S_t będą się powtarzać. Niech $\tau' \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego istnieje wskaźnik $\tau < \tau'$ taki, że $S_{\tau'} = S_\tau$. Dziedziną każdej funkcji ze zbioru $S_{\tau'}$ jest ${}^{(\tau')}X$, a dziedziną każdej funkcji ze zbioru S_τ jest ${}^{(\tau)}X$. Z równości ${}^{(\tau')}X = {}^{(\tau)}X$ dostajemy ciąg równości $X_{\tau'+t} = X_{\tau+t}$ dla $t = 0,1,2,\ldots$ .Wybierzmy dowolną liczbę $t \in \mathbb{N}_0$ oraz resztę $f_w \in S_{\tau'+t}$. Niech w' będzie prefiksem długości τ' słowa w, czyli $w = w'v$ dla pewnego ciągu $v \in {}^{(\tau')}X = {}^{(\tau)}X$ o długości t. Zatem $f_{w'} \in S_{\tau'} = S_\tau$, czyli $f_{w'} = f_{w''}$ dla pewnego słowa w'' długości τ. Na podstawie lematu 4.2 otrzymujemy: $f_w = f_{w'v} = f_{w''v} \in S_{\tau+t}$, czyli $S_{\tau'+t} \subseteq S_{\tau+t}$. Analogicznie pokazujemy, że $S_{\tau+t} \subseteq S_{\tau'+t}$. Zatem $S_{\tau'+t} = S_{\tau+t}$ dla $t = 0,1,2,\ldots$. Przyjmując $T = \tau' - \tau$ dostajemy: $X_{T+t} = X_t$, $S_{T+t} = S_t$ dla $t \geq \tau$. Bezpośrednio z określenia funkcji φ_t i ψ_t mamy teraz: $\varphi_{T+t} = \varphi_t$, $\psi_{T+t} = \psi_t$ dla $t \geq \tau$, czyli automat A_{f_ε} jest okresowy.

Poniższy przykład pokazuje, że twierdzenie odwrotne na ogół nie zachodzi.

Przykład 4.1

Niech f będzie funkcją automatową generowaną przez $(0,1)$-okresowy automat $A_{s_0} = (S, X, Y, \varphi, \psi)$, w którym dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$ mamy: $S_t = \mathbb{N}$, $s_0 = 1$, $X_t = Y_t = \{0,1\}$, $\varphi_t(n,0) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $\psi_t(n,0) = 1$, jeżeli n jest naturalną potęgą dwójki oraz $\psi_t(n,0) = 0$ - w przeciwnym przypadku. Wówczas jeżeli w i w' są słowami zbudowanymi z samych zer o długościach będących naturalnymi potęgami dwójki, przy czym $|w| < |w'|$, to ostatnią literą w ciągu $f_w(w)$ jest 1, natomiast ciąg $f_{w'}(w)$ składa się z samych zer, czyli $f_w \neq f_{w'}$. Stąd wynika, że wszystkie reszty postaci $f_{00}, f_{0000}, \ldots, f_{\underbrace{00\ldots00}_{2^t}}, \ldots$ są parami różne i w konsekwencji $|R_f| = \infty$.

Żeby funkcja f generowana przez automat okresowy A_{s_0} miała skończony zbiór reszt wystarczy założyć, że dla pewnego $t \geq \tau$ zbiór stanów S_t jest skończony.

Twierdzenie 4.4

Niech f będzie funkcją generowaną przez automat okresowy $A_{s_0} = (S, X, Y, \varphi, \psi)$ o czasie przejścia τ i okresie T. Spośród zbiorów S_t $(t \geq \tau)$ o minimalnej liczbie stanów niech S_{t_0} będzie zbiorem o najmniejszym wskaźniku t_0. Wówczas każdy element zbioru reszt R_f jest resztą funkcji f na pewnym słowie o długości nie większej niż $t_0 + T \cdot | S_{t_0} | - 1$.

Dowód. Niech $w = x_0 x_1 ... x_{n-1}$ będzie słowem długości $n > t_0 + T \cdot | S_{t_0} | - 1$. Niech $(s_i)_{i \in \{0,1,...,n\}}$ będzie ciągiem stanów takim, że: $s_i = \varphi_{i-1}(s_{i-1}, x_{i-1})$, $i = 1,2,...,n$. Dla $j = 0,1,...,\left\lfloor \frac{n - t_0}{T} \right\rfloor$ stany $s_{t_0 + j \cdot T}$ należą do zbioru S_{t_0}. Stanów tych jest $\left\lfloor \frac{n - t_0}{T} \right\rfloor + 1 \geq | S_{t_0} | + 1$. Stąd $s_{i_0} = s_{j_0}$ dla pewnych wskaźników i_0, j_0 takich, że $i_0 < j_0$ oraz $T | j_0 - i_0$. Wówczas ciąg $w' = x_0 ... x_{i_0} x_{j_0 + 1} ... x_{n-1}$ jest słowem o długości mniejszej od słowa w oraz $f_w = f_{w'}$.

Podanego w twierdzeniu 4.4 oszacowania długości słów nie można poprawić. Można bowiem w taki sposób dobrać funkcje przejść i funkcje wyjść automatu A_{s_0}, aby dla pewnego słowa $w = x_0 x_1 ... x_{n-1}$ o długości $n = t_0 + T \cdot | S_{t_0} | - 1$, w ciągu $(s_i)_{i \in \{0,1,...,n\}}$ określonym tak jak w dowodzie, nie było powtórzeń oraz funkcja $x \mapsto \psi_{t_0 - 1}(s_n, x)$ była wyznaczona jednoznacznie przez stan $s_n \in S_{t_0 - 1}$. Wówczas reszta f_w jest wyznaczona jednoznacznie przez słowo w.

Twierdzenia 4.3 i 4.4 wykazują pewne podobieństwo między okresowymi automatami zmiennymi w czasie a automatami ustalonymi o skończonym zbiorze stanów. W pracy [13] pokazano, że dla tej drugiej klasy automatów twierdzenie analogiczne do twierdzenia 4.3 zachodzi w obie strony.

5. Automaty permutacyjne

Definicja 5.1

Zmienny w czasie automat $A = (S, X, X, \varphi, \psi)$ nazywamy automatem **permutacyjnym**, jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$ oraz stanu $s \in S_t$ funkcja $\sigma_{t,s} : X_t \to X_t$ określona wzorem $\sigma_{t,s}(x) = \psi_t(s, x)$ jest permutacją zbioru X_t.

W zbiorze słów X^* dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$ określamy relację $\approx_k$:

$$v \approx_k w \Leftrightarrow v \sim_k w \wedge \neg(v \sim_{k+1} w).$$

Twierdzenie 5.1

Funkcja $f : X^* \to X^*$ jest generowana przez automat permutacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje długości słów i jest zgodna z relacją $\approx_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$.

Dowód

Jeżeli funkcja f jest generowana przez automat permutacyjny $A = (S, X, X, \varphi, \psi)$, to f, jako funkcja automatowa, zachowuje długości słów. Dla $k \in \mathbb{N}_0$ relacja $v \approx_k w$ oznacza, że najdłuższym wspólnym prefiksem słów v i w jest pewne słowo u o długości k, ale wówczas najdłuższym wspólnym prefiksem słów $f(v)$ i $f(w)$ jest $\overline{\psi}(s_0, u)$. Wystarczy teraz zauważyć, że $|\overline{\psi}(s_0, u)| = |u|$.

Załóżmy, że funkcja f zachowuje długości słów i jest zgodna z relacją $\approx_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$. Z określenia $\approx_k$ oraz twierdzenia 3.2 wynika, że funkcja ta jest generowana przez pewien automat osiągalny $A_{s_0} = (S, X, X, \varphi, \psi)$. Gdyby A_{s_0} nie był automatem permutacyjnym, to dla pewnego $t \in \mathbb{N}_0$, stanu $s \in S_t$, różnych liter $x, x' \in X_t$ oraz litery $x'' \in X_t$ mielibyśmy $\psi_t(s, x) = \psi_t(s, x') = x''$. Ale wówczas $f(wx) = f(wx') = \overline{\psi}(s_0, w)x''$ dla dowolnego słowa w takiego, że $\overline{\varphi}_{|w|}(s_0, w) = s$. Funkcja f nie byłaby wówczas zgodna z relacją $\approx_{|w|+1}$.

Wniosek 5.1

Funkcja automatowa $f : X^* \to X^*$ jest generowana przez automat permutacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją.

Przykład 5.1

W automacie A z przykładu 1.1 alfabety: wejściowy X i wyjściowy Y są takie same. Co więcej, A jest automatem permutacyjnym. Rzeczywiście, dla dowolnego $t \in \mathbb{N}_0$, stanu $s \in S_t$ i liter $x, x' \in X_t$, równość $\sigma_{t,s}(x) = \sigma_{t,s}(x')$ jest równoważna równości $(s \cdot t + x)_6 = (s \cdot t + x')_6$, a ponieważ $x, x' \in \{0,1,2,3,4,5\}$, więc $x = x'$. Z twierdzenia 5.1 i wniosku 5.1 wynika teraz, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$ funkcja f_1^A jest zgodna z relacją $\approx_k$ i bijektywnie odwzorowuje zbiór słów X^* na siebie.

Charakteryzację odwzorowań automatowych w powyższych terminach dla automatów ustalonych zaproponował G. N. Raney w pracy [13]. Celem niniejszej pracy było uogólnienie pojęcia automatu zmiennego w czasie dopuszczając możliwość zmiany alfabetu w kolejnych taktach pracy automatu. Zdefiniowano funkcje automatowe odpowiadające tym automatom. Wprowadzono pojęcie równoważności automatów, za pomocą którego porównywano różne modele automatów zmiennych w czasie i wyodrębniono automaty o prostszej strukturze. Pokazano, że każdy automat zmienny w czasie jest równoważny automatowi zmiennemu w czasie z ustalonym zbiorem stanów, jak również pewnemu regularnemu automatowi zmiennemu w czasie. Funkcje automatowe scharakteryzowano jako funkcje zachowujące pewne relacje na zbiorze słów ustalonego zmiennego alfabetu. Posługując się pojęciem reszty funkcji na danym słowie scharakteryzowano funkcje generowane przez okresowe automaty zmienne w czasie. Podkreślono podobieństwo miedzy tymi automatami, a automatami, ustalonymi o skończonym zbiorze stanów. Zdefiniowano klasę permutacyjnych automatów zmiennych w czasie i opisano funkcje generowane przez te automaty.

LITERATURA

1. B. H. Barnes: On the automorphism group of periodic automata. Information and Control, 20 (1973), 125-134.
2. F. Velea: On the sequential relations computed by sequential machines with time-variant structure. An. Sti. Unov. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. Ia Mat. (N. S.), 20 (1974), 173-180.
3. A. Gill: Time varying sequential machines. Journal of the Franklin Institute, 276 (1963), 519-539.
4. A. Gill, J. R. Flexer: Periodic decomposition of sequential machines. Journal of the Association for Computing Machinery, 14 (1967), 666-676.
5. R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchansky: Automata, Dynamical Systems and Groups. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 231, 2000, pp. 128-203.
6. V. I. Sushchansky: Groups of Automatic Permutations. Institute of mathematics Silesian Technical University, Gliwice 1997.
7. J. W. Grzymała-Busse: On the automorphisms of infinite time varying automata. Buletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences math., astr. et phys. 18 (1970), 261-266.
8. J. W. Grzymała-Busse: Podautomaty automatów skończonych związane ze zmianą czasu pracy. Rozprawy nr 46, Politechnika Poznańska, Poznań 1972.
9. P. Harpe: Topics in Geometric Group Theory. The University of Chicago Press, Ltd., London 2000.

10. Z. Miądowicz: Automaty zmienne w czasie i transformacje automatów skończonych. Rozprawy nr 131, Politechnika Poznańska, Poznań 1981.

11. Z. Miądowicz: Time varying automata. A survey. ICS PAS REports, 491, Warszawa 1982.

12. B. Mikołajczak: Algebraiczna i strukturalna teoria automatów. PWN, Warszawa-Łódź 1985.

13. G. N. Raney: Sequential Functions. Journal Assoc. Comput. Math., v. 5 (1958), N2, 177-180.

14. D. A. Simovici: Decomposition of time varying automata. Ann. Sti. Univ. Iasi, Sec. Ia, 22 (1976), 243-248.

15. P. H. Starke: On the sequential relations of time variant automata. Proc. Symp. and Summer School MFCS, 1973.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jerzy KLAMKA

Wpłynęło do Redakcji dnia 04 lipca 2002 r.

Abstract

In the work [13] G. N. Raney presented the description of automaton functions in above mentioned terms for direct automata. The aim of this paper was generalization of the concept of time varying automaton allowing for a possibility of change of the alphabet in the consecutive tacts of the automaton's work. The automatic functions corresponding with these automata were defined. The concept of the equivalence of automata was introduced by means of which different types of time varying automata were compared and automata with simpler structure were singled out. It was shown that every time varying automaton is equivalent to some time varying automon with the fixed set of state as well as equivalent to some regular time varying automaton. The automatic functions were described as a class of functions preserving certain relations on the set of words in the given varying alphabet. Using the concept of the function remainder on the given word the functions generated by periodic time varying automata were described. Some similarity between these automata and direct automata with the finite set of state was emphasized. The class of permutation time varying automata was defined and the functions generated by these automata were described.