ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: ELEKTRYKA z. 171 Nr kol. 1466

Stanisław APANASEWICZ
Katedra Elektrodynamiki i Układów Elektromaszynowych
Politechniki Rzeszowskiej

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W NIESKOŃCZONEJ LINII DŁUGIEJ

Streszczenie. W pracy przedstawione są rozwiązania równań Maxwella dla pola elektromagnetycznego spowodowanego przez przepływ prądu w nieskończonej linii długiej. Uwzględnia się prądy przesunięcia Maxwella.

ON SOME PROPERTIES OF ELECTROMAGNETIC FIELD DISTRIBUTION IN LONG ELECTRIC LINES

Summary. The paper presents the solutions of Maxwell equations for the electromagnetic field caused by flow of a current in a long electric line. Maxwell displacement currents are taken into account.

1. OGÓLNY OPIS POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

1.1. Założenie

W artykule rozpatruje się pole elektromagnetyczne wywołane przez sinusoidalnie zmienny prąd w pojedynczej linii długiej. Przyjmuje się następujące założenia:

- przekrój przewodu jest cienki (teoretycznie nieskończenie cienki) na tyle, by można było tworzyć superpozycję pól w przypadku kilku przewodów;
- prąd i w linii ma charakter falowy:

$$i = i_0 e^{j(\omega t + \lambda z)} \tag{1}$$

gdzie: i_0 – amplituda prądu,

ω - pulsacje,

λ – liczba falowa.

Przewód pokrywa się z osią „z" w walcowym układzie współrzędnych.

Przy założeniu (1) mogą istnieć tylko składowa obwodowa pola magnetycznego H oraz składowe promieniowa E_1 i osiowa E_3 natężenia pola elektrycznego. W tym przypadku H, E_1, E_3 – amplitudy zespolone tych pól.

1.2. Rozwiązania równań Maxwella

Przy poczynionych założeniach rozkład pola jest osiowo–symetryczny pola; zgodnie z założeniem funkcje H, E_1, E_3 zależą tylko od promienia r we współrzędnych walcowych. Na podstawie równań Maxwella otrzymuje się między nimi następujące zależności:

$$-\lambda H = \omega\varepsilon_0 E_1, \tag{2}$$

$$H' + \frac{1}{r}H = j\omega\varepsilon_0 E_3, \tag{3}$$

$$j\lambda E_1 - E'_3 = -j\omega\mu_0 H. \tag{4}$$

Można wprowadzić funkcję $\xi = \xi(r)$ o własnościach:

$$H = \xi', \quad E_1 = -\frac{\lambda}{\omega\varepsilon_0}\xi', \quad E_3 = \frac{j\delta^2}{\omega\varepsilon_0}\xi, \tag{5}$$

$$\xi'' + \frac{1}{r}\xi' + \delta^2\xi = 0, \quad \delta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2 \geq 0, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}. \tag{6}$$

Do obliczania prądów wirowych w ciałach metalowych znajdujących się w pobliżu linii prądowej zakłada się przeważnie $\lambda = 0$. Wtedy powinno być albo $\varepsilon_0 = 0$, albo $E_1 = 0$, co wynika z równania (2). Pierwsze założenie jest fizycznie niepoprawne; zatem należy przyjąć drugie. W zagadnieniach przepięciowych pole elektryczne poprzeczne do przewodów z prądem rozpatruje się jako pole elektrostatyczne, niezależnie od składowej E_3. Jeśli jednak $\lambda = 0$ i $E_1 \neq 0$, to wtedy powinno być $E_1 = \frac{E_0}{r}$, $E_0 = \text{const}$, co wynika z równania $\operatorname{div}\bar{E} = 0$. Z prawa Gaussa wynika, że powinno być $E_1 = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$, gdzie σ – gęstość ładunku elektrycznego na powierzchni przewodu. Kłóci się to z założeniem $\varepsilon_0 = 0$. Zatem jeśli $\lambda = 0$, to są dwie możliwości:

a) $\lambda = 0$, $\varepsilon_0 = 0 \equiv c = \infty$, $\delta = 0$.

Wtedy:

$$H = \frac{i_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}, \quad \xi = \frac{i_0}{2\pi} ln \frac{r}{R}, \tag{7}$$

$$E_1 = 0, \quad E_3 = \frac{j\omega\mu_0 i_0}{2\pi} ln \frac{r}{R}, \tag{8}$$

gdzie R – promień przewodu wiodącego prąd.

b/ $\lambda = 0, \varepsilon_0 \neq 0, \delta = \frac{\omega}{c}.$

Wtedy: $\xi = C_{**}\left[J_0(\delta R)Y_0(\delta r) - Y_0(\delta R)J_0(\delta r)\right],$ (9)

$$C_{**} = \frac{i_0}{2\pi\delta R\left[Y_1(\delta R)J_0(\delta R) - Y_0(\delta R)J_1(\delta R)\right]},$$

gdzie:

J_0, J_1, Y_0, Y_1 – funkcje Bessela.

Przy wyprowadzaniu wzorów (7)–(9) przyjęto założenie zerowania się E_3 na powierzchni przewodu oraz wykorzystano prawo Ampera. Składowe pola wylicza się ze wzorów (5). W przypadku gdy wymaga się spełnienia warunku promieniowania w nieskończoności, to rozwiązanie równania (6) otrzymuje się w postaci:

$$\xi = C_*\left[Y_0(\delta r) - jJ_0(\delta r)\right], \quad \delta = \lambda \equiv \lambda = \frac{\omega}{\sqrt{2}\,c}, \tag{10}$$

$$C_* = \frac{i_0}{2\pi\delta R} \cdot \frac{1}{Y_1(\delta R) - jJ_1(\delta R)}.$$

1.3. Rozkład pola przy niskich częstotliwościach

Jeśli częstotliwość prądu jest nieduża, to w bliskim otoczeniu przewodu można przyjmować $\delta r << 1$ i funkcje Bessela zastępuje się funkcjami elementarnymi. Wtedy okazuje się, że we wszystkich przypadkach pole magnetyczne opisuje wzór (7) (pominięto tu żmudne przekształcenia i podano wyniki końcowe). Natomiast sprawa z polem elektrycznym przedstawia się inaczej. Jeśli $\lambda = 0$, to $E_1 = 0$ i składowa E_3 odpowiadająca funkcji ξ przedstawionej we wzorze (9) zmierza do wartości opisanej we wzorze (8).

W przypadku rozwiązania (10) odpowiednie graniczne funkcje ($\delta r << 1$) mają postać:

$$E_3 = \frac{j\omega\mu_0 i_0}{4\pi} ln\lambda r, \quad E_1 = -\frac{i_0}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{r}, \tag{11}$$

gdzie:

$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ – opór falowy.

W przypadku rozwiązania odpowiadającego fali prostej $\left(\delta = 0 \equiv \lambda = \frac{\omega}{c}\right)$ dla małych częstotliwości otrzymuje się:

$$E_3 = 0, \quad E_1 = -\frac{i_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{r}, \quad H = \frac{i_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}. \tag{12}$$

1.4. Pole wytwarzane przez prądy w linii dwuprzewodowej

Przy rozważaniu linii dwuprzewodowej zamiast rozwiązania równania (6) tworzy się rozwiązanie ogólniejsze:

$$\xi_* = \xi(r_1) - \xi(r_2) \tag{13}$$

gdzie:

r_1 i r_2 – odległość punktu, w którym oblicza się pole, od odpowiednich przewodów z prądem.

W przypadku wzoru (13) występuje rozkład dwuwymiarowy i celowe jest tu stosowanie współrzędnych kartezjańskich (x y, z).

2. WNIOSKI

a) Nie można rozpatrywać oddzielnie składowych pola elektrycznego poprzecznych do przewodów od składowej wzdłużnej (E_3); są one powiązane poprzez jedną funkcję ξ (wzory (5), (6)).
b) Uwzględnianie prądów przesunięcia Maxwella prowadzi do całkiem różnych rozkładów pola elektrycznego nawet przy niskich częstotliwościach w porównaniu z przypadkiem,

gdy pomija się (wzory (7),(8),(11),(12)). Pole magnetyczne ulega zmianie dopiero przy bardzo dużych częstotliwościach.

c) Autor niniejszej pracy badał prądy wirowe w masywnej ściance równoległej do przewodów [1]. Okazało się, że przy niskich częstotliwościach rozkład pola elektromagnetycznego w ściance jest jednakowy dla wszystkich tu zaprezentowanych przypadków. A więc np. w przypadkach gdy $E_3 \neq 0$, $E_1 = 0$ (wzory (7),(8)) i gdy $E_3 = 0$, $E_1 \neq 0$ (wzory (12)).

O efekcie decyduje więc rozkład składowej stycznej (do powierzchni ściany) pola magnetycznego.

Warto dodatkowo zwrócić uwagę na fakt, że rozwiązanie (7), (8), aczkolwiek przydatne przy obliczaniu prądów wirowych, ma jednak inne wady. W linii dwuprzewodowej przy rozwiązaniu (7), (8) pomija się:

- transport energii w kierunku przepływu prądu;
- napięcie między przewodami;
- istnienie ładunku elektrycznego na powierzchni przewodów.

LITERATURA

1. Apanasewicz S.: An investigation of the influence of the displacement currents on the electromagnetic field distribution at a metallic body surface. Compel, No 2, James&James 2000.

Recenzent: Dr hab. inż. Aleksander Żywiec
Prof. Politechniki Śląskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 20 kwietnia 2000 r.

Abstract

In this paper the electromagnetic field distribution caused by the flow of a current in long electric lines is presented. It is assumed that the electric current has the form given by the by the equation(1). The following two cases are considered:

a) $\lambda=0$ (displacement current is neglected),

b) $\lambda\neq0$ (displacement current is taken into account).

Basing on the performed analysis one can draw the general conclusiens

a) All components of electromagnetic field can be expressed by one function of ξ (eq. 5).

b) The electric field distributions in two cases ($\lambda=0$, $\lambda\neq0$) are entirely different from each other even for a low frequency (eq. 11, 12). However, the magnetic field distributions are different only for a high frequency,

c) The eddy currents distributions in a metallic wall placed in a neighbourhood of the electric line are not different in two cases ($\lambda=0$, $\lambda\neq0$) for a low frequency.