ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985
Seria: ENERGETYKA z. 90 Nr kol. 855

Stefan WIŚNIEWSKI
Instytut Techniki Cieplnej i Chłodnictwa
Politechniki Łódzkiej

RÓWNANIE PRZENOSZENIA PROMIENIOWANIA

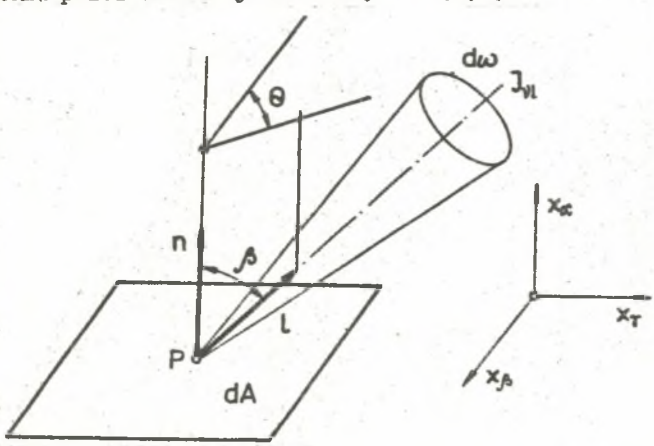
Streszczenie. Omówiono równanie przenoszenia promieniowania termicznego w pełnej postaci dla ośrodka emitującego, pochłaniającego oraz rozpraszającego promieniowanie. Podano różne postacie uproszczonego równania przenoszenia promieniowania.

Promieniowanie termiczne można rozpatrywać jako zbiór kwantów energii promieniowania zwanych fotonami. Każdy foton ma określoną częstotliwość drgań ν, a więc i długości fali λ, które są związane ze sobą prędkością rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w rozpatrywanym ośrodku

$$c = \nu\lambda . \qquad (1)$$

Energia przenoszona przez foton wynosi $h\nu$, gdzie h jest stałą Plancka.

Równanie przenoszenia monochromatycznego promieniowania jest równaniem bilansu liczby fotonów o częstotliwościach zawartych między ν a $\nu + d\nu$ w ośrodku pochłaniającym, rozpraszającym i emitującym promieniowanie. Bilans liczby fotonów sprowadza się do postaci odpowiadającej określonemu kierunkowi wyznaczonemu przez wektor jednostkowy $l\alpha$ (rys.1).



Rys. 1. Układ współrzędnych przy rozpatrywaniu równania przenoszenia promieniowania

Gęstość fotonów n w danym punkcie ośrodka jest wyrażona przez liczbę fotonów w jednostce objętości. Część f tych fotonów, czyli liczba nf, ma częstotliwości zawarte w przedziale od ν do $\nu + d\nu$. W obrębie elementarnego kąta bryłowego porusza się nf $d\omega$ takich fotonów. Gęstość fotonów o częstotliwości ν może być obliczona przez całkowanie tego wyrażenia dla wszystkich kierunków, tj. dla kąta bryłowego 4π lub z intensywności promieniowania $I_{\nu l}$ z punktu P w kierunku l_α, jako

$$n_\nu = \int\limits_{4\pi} nf \; d\omega = \frac{1}{c} \int\limits_{4\pi} \frac{I_{\nu l}(P, l_\alpha)}{h\nu} \, d\omega . \tag{2}$$

Intensywność promieniowania monochromatycznego o częstotliwości ν z punktu P w kierunku l_α wynosi

$$I_{\nu l}(P, l_\alpha) = ch\nu \; nf = \frac{d\dot{E}_\nu}{dA \; \cos\beta \; d\omega \; d\nu} \tag{3}$$

gdzie: $d\dot{E}_\nu$ - strumień emisji promieniowania monochromatycznego wychodzący z punktu P elementu powierzchni dA wewnątrz kąta bryłowego $d\omega$, β - - kąt między normalną do powierzchni dA a kierunkiem rozpatrywania promieniowania.

Ponieważ istnieje ścisły związek między liczbą fotonów, intensywnością promieniowania oraz energią promieniowania można równanie przenoszenia promieniowania rozpatrywać jako równanie bilansu monochromatycznej intensywności lub równanie bilansu energii promieniowania.

Zmiana intensywności promieniowania monochromatycznego $I_{\nu l}$ w kierunku l_α określona jest przez pochodną substancjalną

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial t} + l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial x} \approx l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial x_\alpha} . \tag{4}$$

W większości zagadnień praktycznych można pominąć pierwszy człon pochodnej substancjalnej w stosunku do pozostałych.

Rozpatrywana zmiana intensywności promieniowania spowodowana jest emisją ośrodka o gęstości

$$\rho j_\nu = \frac{d\dot{E}_\nu}{dV \; d\omega \; d\nu} \tag{5}$$

absorpcją ośrodka o gęstości

$$\rho k_\nu I_{\nu l} = - \frac{dI_{\nu lab}}{dl} , \tag{6}$$

stratami intensywności w wyniku rozpraszania promieniowania

$$\rho \tau_\nu I_{\nu l} = - \frac{dI'_{\nu lr}}{dl} , \tag{7}$$

przyrostem intensywności promieniowania na skutek rozpraszania

$$\frac{1}{4\pi}\tau_\nu\int_{4\pi} p_\nu(\beta)\, I_{\nu l}\, d\omega = \frac{dI''_{\nu lr}}{dl}\,, \tag{8}$$

W powyższych zależnościach występują: ρ - gęstość substancji ośrodka, j_ν - masowy współczynnik emisji monochromatycznej, V - objętość, k_ν - masowy współczynnik absorpcji monochromatycznej, τ_ν - masowy współczynnik rozpraszania, p_ν - funkcja rozkładu promieniowania rozproszonego (dla rozpraszania izotropowego $p_\nu = 1$). Objętościowy współczynnik absorpcji monochromatycznej ρk_ν jest równy względnej zmianie intensywności promieniowania na skutek absorpcji na jednostkę długości drogi promieni. Objętościowy współczynnik rozpraszania $\rho\tau_\nu$ jest równy względnej zmianie intensywności promieniowania na skutek rozpraszania na jednostkę drogi promieni.

Zgodnie z powyższymi zależnościami równanie przenoszenia promieniowania ma postać

$$l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial x_\alpha} = \rho\,[\,j_\nu - (k_\nu + \tau_\nu)\, I_{\nu l}] + \frac{1}{4\pi}\tau_\nu \int_{4\pi} p_\nu(\beta) I_{\nu l}\, d\omega\,. \tag{9}$$

W przypadku gdy występuje lokalna równowaga termodynamiczna i słuszne jest prawo Kirchhoffa

$$j_\nu = k_\nu I^0_\nu = k_\nu B_\nu(T)\,, \tag{10}$$

gdzie wprowadzono intensywność promieniowania równowagowego (izotropowego) określoną przez funkcję Plancka B

$$I^0_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\,, \tag{11}$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna.

W powyższych warunkach otrzymuje się równanie przenoszenia promieniowania w postaci

$$l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial x_\alpha} = \rho\,[k_\nu B_\nu - \beta_\nu I_{\nu l}] + \frac{1}{4\pi}\tau_\nu\int_{4\pi} p_\nu(\beta)\, I_{\nu l} d\omega\,, \tag{12}$$

gdzie wprowadzono współczynnik osłabienia promieniowania

$$\beta_\nu = k_\nu + \tau_\nu\,. \tag{13}$$

Szczególne przypadki:

a) Ośrodek szary ($k_\nu = k$, $\beta_\nu = \beta$, $\tau_\nu = \tau$, $p_\nu = p$). Całkowanie równania (12) w zakresie wszystkich częstotliwości daje

$$l_\alpha \frac{\partial I_l}{\partial x_\alpha} = \rho\left(\frac{6T^4}{\pi}k - \beta I_l\right) + \frac{1}{4\pi}\tau\int_{4\pi} p I_l\, d\omega\,, \tag{14}$$

gdzie wprowadzono panchromatyczną intensywność promieniowania

$$I_l = \int_0^\infty I_{\nu l} \, d\nu \tag{15}$$

oraz intensywność promieniowania ciała doskonale czarnego

$$I^o = B = \int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \frac{1}{\pi} \sigma T^4 . \tag{16}$$

Wielkość σ jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego.

b) Ośrodek nie rozpraszający promieniowania ($\tau_\nu = 0$)

$$l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial x_\alpha} = k_\nu (B_\nu - I_{\nu l}) . \tag{17}$$

c) Ośrodek przezroczysty ($k_\nu = 0$, $\tau_\nu = 0$)

$$l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{x_\alpha} = 0. \tag{18}$$

Intensywność promieniowania w ośrodku przezroczystym pozostaje stała.

Powyższe rozumowania nie uwzględniały faktu, że emisja oraz absorpcja fotonów związane są z przejściem elektronu w cząsteczce lub atomie na sąsiedni poziom energetyczny. Teorię promieniowania gazu w lokalnej równowadze termodynamicznej podał Einstein. Zgodnie z tą teorią należy posługiwać się efektywnym objętościowym współczynnikiem pochłaniania

$$a_\nu = \rho k_\nu [1 - \exp (\frac{h\nu}{kT})] . \tag{19}$$

Ponieważ w praktyce wyznacza się eksperymentalnie współczynnik a_ν, więc przy założeniu lokalnej równowagi termodynamicznej i braku rozpraszania promieniowania stosuje się równanie przenoszenia promieniowania w postaci

$$l_\alpha \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial x_\alpha} = a_\nu (B_\nu - I_{\nu l}). \tag{20}$$

W powyższych rozumowaniach przyjęto, że współczynnik załamania promieni w ośrodku wynosi 1. Jeżeli jest on równy n, to należy B_ν pomnożyć przez n^2.

Równanie przenoszenia intensywności promieniowania musi być zgodne z równaniem bilansu energii promieniowania.

Każdy foton przenosi energię $h\nu$, zatem gęstość energii promieniowania monochromatycznego wynosi

$$u_{r\nu} = \int_{4\pi} h\nu \, nf \, d\omega = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_{\nu l} \, d\omega \tag{21}$$

a gęstość energii promieniowania panchromatycznego jest równa

$$u_r = \int_0^\infty u_{r\nu} \, d\nu = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{4\pi} I_{\nu l} \, d\omega \, d\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_l \, d\omega , \tag{22}$$

Gęstość energii promieniowania równowagowego wynosi

$$u_r^o = \frac{4\pi}{c}\int_0^{\infty} B_\nu \, d\nu = \frac{4\pi}{c} B = \frac{4\sigma}{c}\left(T_r^o\right)^4 , \qquad (23)$$

gdzie T_r^o jest temperaturą promieniowania równowagowego.

Strumień fotonów o częstotliwości ν, wychodzących z jednostki objętości i zawartych w elementarnym kącie bryłowym $d\omega$ jest określony zależnością

$$c l_\alpha \, nf \; d\omega \, d\nu = \frac{I_{\nu l} \, l_\alpha}{h\nu} \, d\omega \, d\nu , \qquad (24)$$

czemu odpowiada strumień energii fotonów $I_{\nu l} l_\alpha \, d\omega \, d\nu$ oraz gęstość strumienia energii promieniowania

$$q_{r\alpha} = \int_0^{\infty}\int_{4\pi} I_{\nu l} \, l_\alpha \, d\omega \, d\nu = \int_{4\pi} I_l l_\alpha \, d\omega . \qquad (25)$$

Dla promieniowania równowagowego $\nabla \cdot \vec{q}_r^{\,o} = l_\alpha \, q_{r\alpha}^o = 0$, gdyż promieniowanie jest przenoszone we wszystkich kierunkach jednakowo.

Z równania bilansu energii promieniowania wynika, że gęstość energii promieniowania zmienia się w czasie na skutek występowania strumienia energii promieniowania przez powierzchnię otaczającą rozpatrywaną objętość oraz w wyniku istnienia różnicy między strumieniem energii emitowanej oraz absorbowanej w jednostce objętości

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = - l_\alpha \, q_{r\alpha} - \Delta \dot{u}_r . \qquad (26)$$

W dalszych rozumowaniach przyjmiemy, że współrzędna r jest skierowana przeciwnie do kierunku rozchodzenia się promieniowania, a wtedy równanie przenoszenia promieniowania ma postać

$$\frac{\partial I_l}{\partial r} = a_\nu \left(I_{\nu l} - B_\nu\right) . \qquad (27)$$

Różnica między energią promieniowania absorbowaną i emitowaną w jednostce czasu wynosi

$$\Delta \dot{u}_r = \int_0^{\infty}\int_{4\pi} \frac{\partial I_{\nu l}}{\partial r} \, d\omega \, d\nu = \int_0^{\infty} a_\nu \left(\int_{4\pi} I_{\nu l} \, d\omega - 4\pi B_\nu\right) d\nu =$$

$$= \int_0^{\infty} a_\nu \int_{4\pi} I_{\nu l} \, d\omega \, d\nu - 4\sigma \, a_P T^4 , \qquad (28)$$

gdzie wprowadzono objętościowy średni współczynnik pochłaniania Plancka

$$a_P = \frac{\int_0^\infty a_\nu B_\nu \, d\nu}{\int_0^\infty B_\nu \, d\nu} = \frac{1}{B}\int_0^\infty a_\nu B_\nu \, d\nu = \frac{\pi}{\sigma T^4}\int_0^\infty a_\nu B_\nu \, d\nu \,. \tag{29}$$

Do rozumowań dotyczących wymiany ciepła przez promieniowanie dogodne jest wprowadzić pojęcie grubości optycznej ośrodka

$$\tau_\nu = \int_0^r a_\nu \, dr, \qquad \tau = \int_0^\infty \tau_\nu \, d\nu. \tag{30}$$

Dla ośrodka optycznie cienkiego, gdy $B_\nu \gg I_{\nu 1}$ oraz $\tau \ll 1$ jest

$$\nabla \cdot \vec{q}_r = l_\alpha \, q_{r\alpha} = 4 a_P \sigma T^4 \,. \tag{31}$$

Dla ośrodka optycznie grubego, gdy $\tau_\nu \gg 1$, gęstość strumienia energii promieniowania jest równa

$$q_{r\alpha} = - \frac{16 \sigma T^3}{3 a_R} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}, \tag{32}$$

gdzie wprowadzono objętościowy średni współczynnik pochłaniania Rosselanda

$$a_R = \frac{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{a_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} = \frac{4 \sigma T^3}{\pi \int_0^\infty \frac{1}{a_\nu} \frac{dB}{dT} d\nu} \,. \tag{33}$$

dla gazu szarego współczynnik pochłaniania nie zależy od częstotliwości $a_P = a_R = a$ oraz równanie przenoszenia promieniowania ma postać

$$\frac{\partial I_1}{\partial r} = a \left(I_1 - \frac{\sigma}{\pi} T^4 \right). \tag{34}$$

Dywergencja gęstości strumienia promieniowania jest równa

$$\nabla \cdot \vec{q}_r = l_\alpha \, q_{r\alpha} = - \int_{4\pi} \frac{\partial I_1}{\partial r} \, d\omega = - a \left(\int_{4\pi} I_1 \, d\omega - 4 \sigma T^4 \right) =$$

$$= - 4 a \sigma \left(T_r^4 - T^4 \right), \tag{35}$$

gdzie oprócz temperatury substancji T wprowadzono temperaturę promieniowania

$$T_r = \left(\frac{1}{4\sigma} \int_{4\pi} I_1 d\omega \right)^{\frac{1}{4}} . \quad (36)$$

Całkowanie równania (27), przy założeniu, że efektywny monochromatyczny współczynnik pochłaniania nie zależy od współrzędnej r oraz, że w miejscu $r = r_s$ znajduje się powierzchnia ciała doskonale czarnego, daje intensywność promieniowania monochromatycznego w punkcie $r = 0$ w postaci

$$I_{\nu 1}(0) = I_{\nu 1}(r_s) \exp(-a_\nu r_s) + a_\nu \int_0^{r_s} B_\nu(r) \exp(-a_\nu r)\, dr, \quad (37)$$

W szczególnym przypadku, gdy można pominąć emisję spontaniczną gazu, drugi człon równania (37), otrzymuje się

$$I_{\nu 1}(0) = I_{\nu 1}(r_s) \exp(-a_\nu r_s) , \quad (38)$$

czyli równanie wyrażające prawo Bouguera - Lamberta.

LITERATURA

[1] Siegel R., Howell J.R.: Thermal Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, New York 1972.

[2] Özisik M.N.: Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection, J.Wiley, New York 1973.

[3] Wiśniewski S.: Wymiana ciepła, PWN, Warszawa 1979.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕДАЧИ РАДИАЦИИ

Резюме

В работе выведена полная форма уравнения передачи теплового излучения для среды эммитирующей, рассеивающей и поглащающей излучение. Дан анализ разных упрощённых форм етого уравнения. Представлены упрощённые уравнения для среды поглащающей излучение, для среды не рассеивающей и для прозрачной среды. Рассмотрено также уравнение баланса энергии излучения и приведено его к виду удобному для технических целей. Указано, что частным случаем общего уравнения передачи радиации есть формула, известна как закон Бугера - Ламберта.

RADIATION HEAT TRANSFER EQUATION

S u m m a r y

A complete form of a radiation heat transfer equation has been derived for an emitting, absorbing and scattering medium. Various simplified forms of this eqaution have been analysed. Simplified equations for different enclosures i.e. diffusive grey absorbing, no scattering and diathermic has been presented. The balance equation of radiant energy has been discussed and it has been reduced to a form which is suitable for engineering applications. The radiation heat transfer equation sometimes is reduced to Bouguer - Lambert formulae, what has been shown.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1985 r.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Edward Kostowski