ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985
Seria: ENERGETYKA z. 90 Nr kol. 855

Stefan WISNIEWSKI
Instytut Techniki Cieplnej i Chłodnictwa
Politechniki Łódzkiej

WYMIANA CIEPŁA PRZEZ PROMIENIOWANIE I PRZEWODZENIE

Streszczenie. Podano ogólny model matematyczny wymiany ciepła przez promieniowanie i przewodzenie oraz jego rozwiązanie dla szczególnych przypadków wymiany ciepła między równoległymi ściankami płaskimi.

W przypadku gdy powierzchnie ciał stałych o różnych temperaturach są rozdzielone ośrodkiem stałym lub bardzo lepkim płynem, tak że nie występuje konwekcja oraz ośrodek częściowo przepuszcza promieniowanie, występuje równoczesna wymiana ciepła przez promieniowanie i przewodzenie.

W przypadku gdy wymiana ciepła jest realizowana przez przewodzenie i promieniowanie, całkowita gęstość strumienia ciepła q_α składa się z gęstości kondukcyjnego strumienia ciepła

$$q_{k_\alpha} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = -\lambda T_{,\alpha} \tag{1}$$

oraz gęstości radiacyjnego strumienia ciepła q_{r_α} równego różnicy między gęstością strumienia ciepła emitowanego i pochłanianego przez ośrodek.

Dla wymiany ciepła przez promieniowanie i przewodzenie równanie bilansu ciepła ma postać

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda T_{,\alpha})_{,\alpha} + q_v - 4\int_0^\infty a_\nu e_\nu \, d\nu + \int_0^\infty \int_0^{4\pi} a_\nu I_{\nu l} d\omega \, d\nu , \tag{2}$$

gdzie: ρ - gęstość substancji, c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, T - temperatura, t - czas, λ - współczynnik przewodzenia ciepła, q_v - wydajność wewnętrznych źródeł ciepła, a_ν - monochromatyczny objętościowy współczynnik pochłaniania, e_ν - monochromatyczna gęstość emisji promieniowania, $I_{\nu l}$ - monochromatyczna intensywność promieniowania w kierunku l_α, ν - częstotliwość promieniowania, ω - kąt bryłowy.

Dalsze rozumowania zostaną ograniczone do ustalonej, jednowymiarowej wymiany ciepła przez promieniowanie i przewodzenie między równoległymi, nieograniczonymi, płaskimi powierzchniami szarymi o temperaturach $T_1 > T_2$ oraz emisyjnościach ε_1 i ε_2, rozdzielonymi ośrodkiem szarym o grubości s oraz objętościowym współczynniku pochłaniania a.

Najprostsze obliczenia oparte są na założeniu o addytywności gęstości kondukcyjnego i radiacyjnego strumienia ciepła.

Dla ośrodka o bardzo małej grubości optycznej $\tau_s \ll 1$ można przyjąć

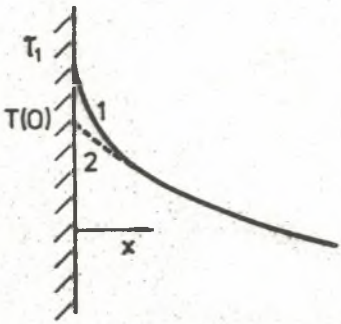
$$q = q_k + q_r = \frac{\lambda}{s}(T_1 - T_2) + \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}, \tag{3}$$

gdzie σ jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego.

Dla ośrodka o dużej grubości optycznej $\tau_s \gg 1$, gdy można zastosować przybliżenie dyfuzyjne Rosselanda, będzie

$$q = -\left(\lambda + \frac{16}{3}\frac{\sigma T^3}{a}\right)\frac{dT}{dx} = \text{const.} \tag{4}$$

Powyższe równanie nie jest słuszne w pobliżu powierzchni ścianki, gdzie nie jest spełniony warunek $\tau_s \gg 1$. Zwiększenie dokładności rozwiązania osiąga się przez wprowadzenie uskoków temperatury ośrodka na powierzchniach ścianek $T_1 - T(0)$ oraz $T(s) - T_2$ (rys. 1).



Rys. 1. Uskok temperatury na powierzchni ścianki przy zastosowaniu przybliżenia dyfuzyjnego do wymiany ciepła przez promieniowanie i przewodzenie: 1 - rozwiązanie dokładne, 2 - rozwiązanie przybliżone

Można wykazać, że gęstość radiacyjnego strumienia ciepła wynosi

$$q_r = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2}}\left[T_1^4 - T^4(0)\right] = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{2}}\left[T^4(s) - T_2^4\right]. \tag{5}$$

Przy posługiwaniu się przybliżeniem dyfuzyjnym gęstość radiacyjnego strumienia ciepła wynosi

$$q_r = -\frac{16}{3}\frac{\sigma T^3}{a}\frac{dT}{dx} \approx \text{const} \tag{6}$$

a po scałkowaniu powyższego równania w granicach temperatur od $T(0)$ do $T(s)$ oraz współrzędnej od 0 do s otrzymuje się

$$q_r = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{as}\left[T^4(0) - T^4(s)\right]. \tag{7}$$

Za pomocą równań (5) można usunąć temperatury $T(0)$ oraz $T(s)$ z równania (7) a wtedy

$$q_r = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{3}{4}as}. \tag{8}$$

Wobec powyższego wynik całkowania równania (4) ma postać pełną

$$q = \frac{\lambda}{s}(T_1 - T_2) + \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{3}{4}as} \tag{9}$$

lub postać bezwymiarową

$$\frac{q\tau_s}{\sigma T_1^4} = 4N_1(1 + \theta_2) + \frac{1 - \theta_2^4}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{3}{4}\tau_s}, \tag{10}$$

gdzie:

- grubość optyczna ośrodka

$$\tau_s = as, \tag{11}$$

- parametr kondukcyjno-radiacyjny

$$N_1 = \frac{\lambda a}{4\sigma T_1^3}, \tag{12}$$

- bezwymiarowa temperatura

$$\theta = \frac{T}{T_1}, \quad \theta_2 = \frac{T_2}{T_1}. \tag{13}$$

Równanie (10) jest wystarczająco dokładne dla powierzchni doskonale czarnych ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$). Błędy powstające przy obliczaniu gęstości kondukcyjnego i radiacyjnego strumienia ciepła w znacznym stopniu kompensują się.

Dokładniejsze rozwiązanie otrzymuje się przy zastosowaniu współczynnika akomodacji

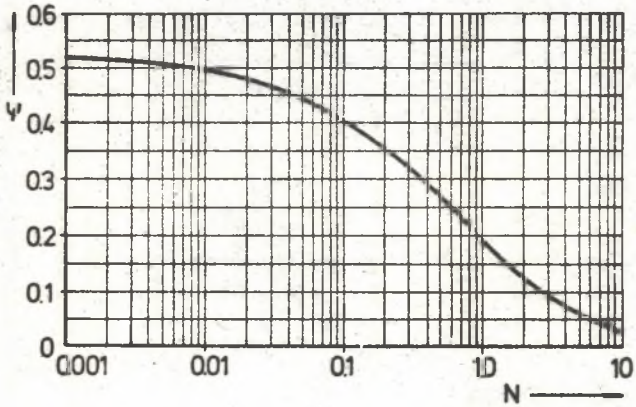
$$\Psi_1 = \frac{\sigma}{q_{r1}} [T^4 - T^4(0)] . \tag{14}$$

Gęstość radiacyjnego strumienia ciepła na powierzchni o temperaturze T_1 wynosi

$$q_{r1} = -\frac{16\sigma T_1^3}{3a}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{16\sigma T_1^3}{3a}\frac{q}{\frac{16\sigma T_1^3}{3a}+\lambda} , \tag{15}$$

czyli współczynnik akomodacji jest równy (rys.2)

$$\Psi_1 = \frac{3a}{4q}\left(\frac{4\sigma}{3a} + \frac{\lambda}{4T_1^3}\right)[T_1^4 - T^4(0)] . \tag{16}$$



Rys. 2. Współczynnik akomodacji przy zastosowaniu przybliżenia dyfuzyjnego do wymiany ciepła przez promieniowanie i przewodzenie

W celu wykorzystania powyższej metody równanie (4) sprowadza się do postaci bezwymiarowej

$$\frac{q}{\sigma T_1^4} = -4N_1\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{4}{3}\frac{d\theta^4}{d\tau} , \tag{17}$$

która po wykonaniu całkowania w granicach od 0 do τ_s oraz od $\theta(0)$ do $\theta(\tau_s)$ daje

$$\frac{q\,\tau_s}{\sigma T_1^4} = 4N_1[\theta(0) - \theta(\tau_s)] + \frac{4}{3}[\theta^4(0) - \theta^4(\tau_s)] . \tag{18}$$

Z równania (16) wynika

$$\frac{4q}{3a}\psi_1 = \frac{\lambda}{4T_1^3}[T_1^4 - T^4(0)] + \frac{4\sigma}{3a}[T_1^4 - T^4(0)] \approx$$

$$\approx \lambda[T_1 - T(0)] + \frac{4\sigma}{3a}[T_1^4 - T^4(0)] \tag{19}$$

a w postaci bezwymiarowej

$$\frac{4}{3}\psi_1 \frac{q}{\sigma T_1^4} = 4N_1[1 - \theta(0)] + \frac{4}{3}[1 - \theta^4(0)]. \tag{20}$$

W analogiczny sposób otrzymuje się dla drugiej powierzchni

$$\frac{4}{3}\psi_2 \frac{q}{\sigma T_1^4} = 4N_1[\theta(\tau_s) - \theta_2] + \frac{4}{3}[\theta^4(\tau_s) - \theta_2^4], \tag{21}$$

gdzie ψ_2 odczytuje się z rysunku 2 jako odpowiadające wartości

$$N_2 = \frac{\lambda a}{4\sigma T_2^3}. \tag{22}$$

Połączenie równań (18), (20) oraz (21) pozwala wyeliminować nieznane temperatury bezwymiarowe $\theta(0)$ oraz $\theta(\tau_s)$, a wtedy

$$\frac{q}{\sigma T_1^4} = \frac{1 - \theta_2^4 + 3N_1(1 - \theta_2)}{\frac{3}{4}\tau_s + \psi_1 + \psi_2}. \tag{23}$$

Całkowanie równania (17) w granicach od 0 do τ oraz od $\theta(0)$ do θ, po uwzględnieniu zależności (21) oraz (22), daje rozkład bezwymiarowej temperatury $\theta(\tau)$ w ośrodku rozdzielającym ścianki w postaci zależności

$$\frac{1 - \theta^4(\tau) + 3N_1[1 - \theta(\tau)]}{1 - \theta_2^4 + 3N_1(1 - \theta_2)} = \frac{\frac{3}{4}\tau + \psi_1}{\frac{3}{4}\tau_s + \psi_1 + \psi_2}. \tag{24}$$

Powyższe rozwiązania pokrywają się praktycznie z rozwiązaniami dokładnymi dla $\tau_s \geqslant 2$. W skrajnych przypadkach $N_1 \to 0$ oraz $N_1 \to \infty$ rozwiązania te są dokładne.

LITERATURA

[1] Siegel R., Howell J.R.: Thermal Radiation Heat Transfer. New York; McGraw-Hill 1972.

[2] Özisik M.N.: Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection. New York; J.Wiley 1973.

[3] Wiśniewski S.: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1979.

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Р е з ю м е

В работе приведена общая математическая модель теплообмена излучением и теплопроводностью. Дано решение этой задачи для среды большой оптической толщины , находящейся между двумя плоскопараллельными поверхностями, при использовании скачкообразного падения на поверхности стенки а также при использовании коэффициента аккомодации , что особенно удобной достаточно точно для технических целей.

HEAT TRANSFER BY RADIATION AND CONDUCTION

S u m m a r y

A general mathematical model of heat transfer by radiation and conduction has been given. The solution of this problem has been derived for a medium of great optical thickness, enclosed between two parallel flat surfaces, applying the temperature jump on the surfaces and the accomodation coefficient, which is particularly suitable and sufficiently accurate for engineering applications.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1985 r.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Edward Kostowski