

Adam FIC
Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

Czesław GROBORZ

Jan URUSKI

Zakład Kotłów i Wytwornic Pary
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PROGRAM DO WYZNACZANIA DWUWYMIAROWYCH PÓL
TEMPERATURY METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób rozwiązania zagadnienia przewodzenia ciepła metodą elementów skończonych. Przytoczono wzory służące do obliczania elementów macierzy pojemności cieplnych. Szczegółowo opisano program służący do wyznaczenia ustalonego i nieustalonego rozkładu temperatury w układach dwuwymiarowych: płaskim i walcowym osiowo-symetrycznym. Dla zilustrowania możliwości obliczeniowych programu zamieszczono przykład obliczeniowy dotyczący króćca zbiornika ciśnieniowego reaktora jądrowego WWER-440 w konkretnym stanie eksploatacyjnym tego reaktora.

1. WSTĘP

Rozwój maszyn cyfrowych stwarza możliwość opracowywania i eksploataowania ogólnych programów obliczeniowych służących do rozwiązywania różnorodnych problemów. Bardzo uniwersalna i wygodna w użytkowaniu w tego typu programach jest metoda elementów skończonych. Umożliwia ona rozwiązywanie problemów dotyczących różnych, złożonych geometrycznie obciążeni i stosunkowo łatwe opracowywanie programów ogólnych do rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień.

W niniejszym opracowaniu opisano program PMES i zastosowaną w nim metodę elementów skończonych do wyznaczenia ustalonego i nieustalonego rozkładu temperatury w układach dwuwymiarowych: płaskim i osiowo-symetrycznym. Możliwości stosowania tego programu ograniczone są głównie dostępną pojemnością pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej. Oprócz tego w konkretnych przypadkach może wynikać konieczność wymiany lub modyfikacji podprogramów służących do zadawania przestrzennego rozkładu wydajności wewnętrznych źródeł ciepła lub do określania zmiennych w czasie warunków brzegowych. Ogólniejsze opracowanie tych podprogramów związane byłoby z koniecznością bardziej uciążliwego przygotowywania danych i dlatego uznano, że nie jest opłacalne.

Program PMES napisany jest w języku FORTRAN dla maszyn serii ODRA-1300.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA DWUWYMIAROWEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

Rozkład temperatury $T(x, y, z)$ w dwuwymiarowym, nieruchomym, izotropowym obszarze V w stanie nieustalonym opisany jest równaniem Fouriera Kirchhoffa:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + \dot{Q}_V = c \rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

gdzie:

t - czas,

λ - współczynnik przewodzenia ciepła,

ρ - gęstość,

\dot{Q}_V - wydajność wewnętrznych źródeł ciepła,

c - właściwa pojemność cieplna.

Rozkład temperatury $T(x, y, z)$ musi spełniać warunki początkowe:

$$T(x, y, 0) = T_p(x, y), \quad (2)$$

a na brzegu S obszaru V warunki brzegowe, które można zapisać w postaci:

$$T(x, y, z) = T_0(x, y, z), \quad (3)$$

$$\{x, y\} \in S_1$$

$$\lambda \vec{n} \text{ grad } T + \dot{q} + \alpha T = 0, \quad (4)$$

$$\{x, y\} \in S_2$$

gdzie:

$$S = S_1 \cup S_2,$$

\vec{n} - wektor normalnej zewnętrznej do brzegu S_2 ,

α - współczynnik wnikania ciepła.

Równanie (3) wyraża tzw. warunek brzegowy I rodzaju. Równanie (4) sprowadza się do warunku brzegowego II rodzaju po podstawieniu w nim $\alpha = 0$ (wówczas \dot{q} oznacza gęstość strumienia ciepła oddawanego na brzegu S_2) lub do warunku brzegowego III rodzaju, po podstawieniu $\dot{q} = -\alpha T_{ot}$, gdzie T_{ot} jest: temperaturą płynu omywającego brzeg S_2 . Uwzględniając, że na brzegu S_2 ciepło wymieniane jest zarówno na drodze konwekcji, jak i promieniowania, we wzorze (4) należy podstawić:

$$\dot{q} = -\alpha T_{ot} + \dot{q}_r, \quad (5)$$

gdzie \dot{q}_r jest gęstością strumienia ciepła oddawanego radiacyjnie na brzegu S_2 .

Zakłada się, że wielkości: λ , \dot{Q}_V , c , ρ , α , \dot{q} mogą być funkcjami położenia, \dot{Q}_V , α , T_{ot} , T_0 mogą być funkcją czasu, a \dot{q}_r oprócz tego jest funkcją temperatury.

Zagadnienie ustalonego dwuwymiarowego przepływu ciepła opisane jest równaniami: (1) - po podstawieniu w nim $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, (3) i (4).

Osiowo-symetryczny dwuwymiarowy rozkład temperatury w obszarze V opisany jest równaniem:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) + \dot{Q}_V = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

łatwo zauważyć, że zagadnienie osiowo-symetryczne można sprowadzić do zagadnienia płaskiego, podstawiając w równaniach (6), (3) i (4):

$$\begin{aligned} x &= r, \\ y &= z, \\ \lambda^* &= \lambda r \\ \dot{Q}_V^* &= \dot{Q}_V r \\ (c\rho)^* &= c\rho r \\ \alpha &= \alpha r \\ \dot{q}^* &= \dot{q} r \end{aligned} \quad (7)$$

Metodami rachunku wariacyjnego można wykazać [1], że rozkład temperatury $T(x, y, z)$, który spełnia równania (1) - (4), minimalizuje równocześnie funkcjonal χ :

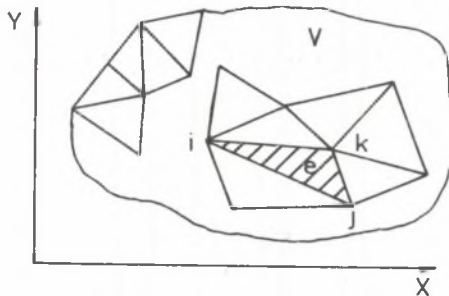
$$\chi = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] - \dot{Q}T \right\} dx dy + \int_{S_2} \left(\dot{q}T - \frac{1}{2} \alpha T^2 \right) ds_2 \quad (8)$$

gdzie:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_V - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DWUWYMIAROWEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Do wyznaczania ustalonego lub nieustalonego dwuwymiarowego rozkładu temperatury w obszarze V , będącego rozwiązaniem równań: (1) lub (6), (2) (3), (4), wykorzystano wariacyjne sformułowanie metody elementów skończonych.



Rys. 1. Podział obszaru V na elementy

Fig. 1. Division of the V area into elements

W tym celu cały obszar V podzielono na elementy trójkątne (rys. 1). Węzły siatki podziału obszaru na elementy znajdują się w wierzchołkach tych elementów. Wielkościami poszukiwanymi są temperatury $T_i(\xi)$ w tych węzłach. Temperatura jako funkcja położenia jest aproksymowana w oparciu o temperatury węzłowe T_i i tzw. funkcje kształtu $N_i(x, y)$:

$$T(x, y, \xi) = \sum_{i=1}^{NP} T_i(\xi) N_i(x, y) \quad (10)$$

gdzie NP jest liczbą węzłów w siatce podziału obszaru V na elementy.

Przy zastosowaniu wspomnianych elementów trójkątnych funkcje kształtu $N_i(x, y)$ oraz aproksymacja (10) są liniowymi funkcjami położenia w obszarze każdego z elementów. Dokładniej funkcje kształtu $N_i(x, y)$ dla elementów trójkątnych omówiono w [1].

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcjonału (8) względem temperatur węzłowych prowadzą do układu równań [1]:

$$HT + B \frac{dT}{d\xi} = F, \quad (11)$$

gdzie:

H - kwadratowa symetryczna macierz przewodności cieplnych, zawierająca również składowe wynikające z równania (4), w tym α

B - kwadratowa symetryczna macierz pojemności cieplnych,

T - kolumnowa macierz temperatur w węzłach,

$\frac{dT}{d\xi}$ - kolumnowa macierz pochodnych temperatur w węzłach,

F - kolumnowa macierz wyrazów wolnych zawierająca składniki wynikające z istnienia wewnętrznych źródeł ciepła oraz wynikające z warunku brzegowego (4), w tym \dot{q} .

Rozmiary ww. macierzy równe są liczbie węzłów NP w siatce podziału obszaru na elementy.

Kwadratowe symetryczne macierze H i B mają budowę pasmową. Maksymalna szerokość niezerowego pasma tych macierzy jest o jeden większa od maksymalnej różnicy numerów węzłów należących do tego samego elementu.

W przypadku zagadnienia ustalonego układ równań różniczkowych (11) sprowadza się do układu równań algebraicznych:

$$HT = F \quad (12)$$

Przy podziale na elementy trójkątne elementy macierzy H , B i F można wyznaczyć analitycznie. Odpowiednie zależności służące do obliczania elementów macierzy H i F podano w [1] i są one identyczne dla zagadnień ustalonych i nieustalonych. Natomiast elementy macierzy B określone są równaniami:

$$B_{ij} = \sum_e B_{ij}^{(e)} \quad (13)$$

gdzie sumowanie przebiega praktycznie po wszystkich elementach obszaru V do których należą węzły i, j . Składowe $B_{ij}^{(e)}$ elementów macierzy B_{ij} wynikają z całkowania po poszczególnych elementach i są określone równaniami:

$$B_{ij}^{(e)} = (c\rho)^{(e)} \int_{V^{(e)}} N_i^{(e)}(x,y) N_j^{(e)}(x,y) dx dy \quad (14)$$

gdzie:

- $V^{(e)}$ - obszar elementu "e" o węzłach i, j, k ,
- $(c\rho)^{(e)}$ - uśredniona na obszar elementu "e" wartość iloczynu $(c\rho)$,
- $N_i^{(e)}, N_j^{(e)}$ - funkcje kształtu w obszarze elementu "e".

Wykorzystując wzór (14), uzyskuje się [2]:

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(e)} = & \frac{(c\rho)^{(e)}}{4\Delta^2} \left\{ a_i a_j \Delta + a_i b_j x_s \Delta + a_i c_j y_s \Delta + b_i a_j x_s \Delta + c_i a_j y_s \Delta + \right. \\ & + b_i b_j \left[\frac{\Delta}{12} ([x_i - x_s]^2 + [x_j - x_s]^2 + [x_k - x_s]^2) + x_s^2 \Delta \right] + \\ & + [c_i b_j + b_i c_j] \left[\frac{\Delta}{12} ([x_i - x_s] [y_i - y_s] + [x_j - x_s] [y_j - y_s] + \right. \\ & + [x_k - x_s] [y_k - y_s]) + x_s y_s \Delta \left. \right] + c_i c_j \left[\frac{\Delta}{12} ([y_i - y_s]^2 + [y_j - y_s]^2 + \right. \\ & \left. + [y_k - y_s]^2) + [y_s^2 \Delta] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{cases} a_i = x_i y_k - x_k y_j, \\ b_i = y_j - y_k, \\ c_i = x_k - x_j, \end{cases} \quad (16)$$

a pozostałe wyrazy, tzn.: $a_j, b_j, c_j, a_k, b_k, c_k$, otrzymuje się przez cykliczne przestawienie wskaźników i, j, k ,

$$x_s = (x_i + x_j + x_k)/3,$$

$$y_s = (y_i + y_j + y_k)/3,$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (17)$$

jest polem trójkąta w węzłach i, j, k .

Początkowy rozkład temperatury może zostać wczytany. Najczęściej jest to jednak rozkład temperatury w pewnym stanie ustalonym.

Do rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych (12) zastosowano metodę eliminacji Gaussa.

Układ równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu (11) rozwiązano stosując do dyskretyzacji czasu metodę różnicową. W tym celu korzystne okazało się dokonanie diagonalizacji macierzy B . Utworzona w ten sposób macierz B^* jest również macierzą kwadratową, ale o niezerowych elementach leżących jedynie na przekątnej głównej:

$$B_{ii}^* = \sum_{j=1}^{NP} B_{ij}. \quad (18)$$

$$B_{ij}^* = 0 \quad (19)$$

dla $i \neq j$.

Taki sposób diagonalizacji macierzy B wynika wprost z założenia dla potrzeb każdego i -tego równania (11), że pochodne względem czasu temperatur w węzłach j sąsiadnych w stosunku do i -tego węzła są równe pochodnej temperatury w i -tym węźle, tzn.: $\frac{dT_j}{dt} = \frac{dT_i}{dt}$. Diagonalizacja macierzy B związana jest z nieznacznymi jedynie błędami obliczeniowymi [3].

Wprowadzając do równania (11) macierz diagonalną B^* oraz zastępując pochodne temperatur ilorazami różnicowymi przednimi, uzyskuje się:

$$\sum_{j=1}^{NP} H_{ij} T_j^{(n)} + B_{ii}^* \frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta \tau} = F_i, \quad (20)$$

gdzie:

$$i = 1, 2, \dots, NP,$$

$$T_i^{(n)} = T_i(\tau_n),$$

τ_n - czas po n-tym kroku czasowym.

$\Delta \tau$ - krok czasowy.

Dzięki diagonalizacji macierzy B układ równań (20) można rozwikłać względem temperatur węzłowych w kolejnym n+1-szym kroku czasowym:

$$T_i^{(n+1)} = T_i^{(n)} - \frac{\Delta \tau}{B_{ii}^*} \left[\sum_{j=1}^{NP} H_{ij} T_j^{(n)} - F_i \right], \quad (21)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, NP$.

Warunek fizycznej poprawności modelu wymaga, by współczynniki w równaniu (21) przy temperaturach $T_i^{(n)}$ były nieujemne, co prowadzi do ograniczenia kroku czasowego:

$$\Delta \tau_{\max} = \max \left(\frac{B_{ii}^*}{H_{ii}} \right) \quad (22)$$

dla $i = 1, 2, \dots, NP$.

Przekroczenie kroku czasowego $\Delta \tau_{\max}$ wiąże się na ogół z niestabilnością procesu obliczeniowego. Ograniczenie to jest często bardzo uciążliwe. Przykładowo, w przypadku zagadnienia omówionego w przykładzie obliczeniowym, dopuszczalny krok czasowy $\Delta \tau_{\max}$ jest mniejszy od 1 s, a po zastosowaniu warunku brzegowego I rodzaju na wewnętrznej powierzchni zbiornika ok. 5 s. W związku z powyższym w opracowanym programie przewidziano też możliwość realizacji obliczeń z zastosowaniem ilorazu różnicowego wstępnego do dyskretyzacji pochodnych temperatur węzłowych względem czasu. Wówczas równanie (11) przekształcić można do postaci:

$$A T^{(n+1)} = C, \quad (23)$$

gdzie:

$$A = H + \frac{1}{\Delta \tau} B^*, \quad (24)$$

$$C = F + \frac{1}{\Delta \tau} B^* T^{(n)} \quad (25)$$

Macierz A jest kwadratową symetryczną macierzą o rozmiarach $NP \times NP$, a C jest kolumnową macierzą posiadającą NP elementów.

W przypadku zastosowania ilorazu różnicowego wstecznego do dyskretyzacji pochodnych temperatur względem czasu nie występuje ograniczenie kroku czasowego, konieczne jest natomiast rozwiązywanie liniowego układu równań w każdym kroku czasowym. Można do tego celu wykorzystać podprogramy takie jak do rozwiązywania zagadnień ustalonych.

Często można przyjąć, że wielkości λ , $c\rho$, α nie ulegają zmianom w czasie lub przynajmniej w pewnych przedziałach czasu. Wówczas nie zmieniają się też wartości elementów macierzy H , B i β^* , a elementy macierzy A są stałe, jeżeli tylko dodatkowo stały jest krok czasowy. W przypadku zmienności współczynnika α w czasie wygodniej jest, zamiast zmieniać α w kolejnych krokach czasowych, korygować \dot{q} wg wzoru [2]:

$$\dot{q}^{(n)} = T^{(n)} [\alpha^{(n)} - \alpha^{(0)}] - \alpha^{(n)} T_{ot}^{(n)} + \dot{q}_r^{(n)}, \quad (26)$$

gdzie wskaźnik "n" oznacza, że wielkość dotyczy czasu \tilde{t}_n , $\alpha^{(0)} = \alpha(\tilde{t}=0)$. Wówczas zamiast obliczać w każdym kroku czasowym elementy kwadratowej macierzy H , wystarczy obliczać elementy kolumnowej macierzy F . Najczęściej więc w kolejnych krokach czasowych należy wyznaczać jedynie elementy macierzy F i C . Zależność (26) wynika wprost z równań (4) i (5).

Warunek brzegowy w postaci równania (4) uwzględniony jest już podczas budowy elementów macierzy H i F . Natomiast warunek brzegowy I rodzaju wymaga odrębnego potraktowania. Należy wówczas spowodować, by w węzłach leżących na brzegu S_1 występowała zadana temperatura T_{01} . W tym celu dla zagadnienia ustalonego modyfikuje się 1-ty wiersz równania (12), podstawiając:

$$\begin{cases} H_{11} = 1, \\ H_{1i} = 0 \quad \text{dla } i \neq 1, \\ F_1 = T_{01} \end{cases} \quad (27)$$

oraz eliminuje $T_1 = T_{01}$ z pozostałych równań. W przypadku zagadnienia nieustalonego i stosowania ilorazu różnicowego wstecznego postępować należy analogicznie, a przy stosowaniu ilorazu różnicowego przedniego należy jedynie podstawić: $T_1^{(n+1)} = T_{01}^{(n+1)}$.

4. PROGRAM OBLICZENIOWY

W oparciu o opisaną wcześniej metodę obliczeniową napisano program PMES w języku FORTRAN dla maszyn z serii ODRA-1300, służący do wyznaczania ustalonych i nieustalonych pól temperatury w dwuwymiarowych układach: płaskim i walcowym osiowo-symetrycznym.

Wszystkie większe tablice, których rozmiary zależą od rozpatrywanego zadania, ulokowane są w jednej wspólnej tablicy D zadeklarowanej w COMMON //. W ten sposób dla różnych zadań można rezerwować różną pamięć operacyjną, wystarczy jedynie zmienić rozmiar tablicy D i równoważnej jej tablicy LD zadeklarowanych w MASTER PMES. Zadeklarowane rozmiary tych tablic mogą być bowiem bezkarnie przekraczane w podprogramach w przypadku realizacji obliczeń z TRACE 0 lub TRACE 1. Wymagany rozmiar LMAX ww. tablic podczas obliczeń nieustalonych jest równy:

$$LMAX = 6 NE + NP \cdot (NBAND + 6) + 4 NQ + 3 NB, \quad (28)$$

gdzie:

NE - liczba elementów,

NP - liczba węzłów,

NQ - liczba elementów brzegowych z warunkiem brzegowym w postaci (4),

NB - liczba węzłów brzegowych z warunkiem brzegowym I rodzaju,

NBAND - szerokość niezerowego pasma macierzy H.

Uproszczony schemat blokowy programu PMES podano na rys. 2.

MASTER PMES wywołuje jedynie podprogram CONTR. Podprogramy CONTR, MESH i MACR służą do organizacji obliczeń oraz wczytywania danych i wraz z procedurami GENVECN I GEN wzorowane są na podprogramach programu MINIFEM Taylora opublikowanego w [3] i adoptowanego na m.c. ODRA 1305 w [4]. Wspomniane podprogramy organizacyjne działają różnorodnie, zależnie od wczytanych dla nich makroinstrukcji. Pozostałe podprogramy realizują ściśle określone zadania i są wywoływane zależnie od wprowadzonych makroinstrukcji.

Procedura CONTR wczytuje najpierw podstawowe dane na temat rozwiązywanego zadania (liczba węzłów, liczba elementów, liczba węzłów brzegowych na brzegu S_1 , liczba elementów brzegowych na brzegu S_2 , maksymalna szerokość niezerowego pasma macierzy H). W oparciu o te informacje ustalane są wówczas adresy w tablicy D pierwszych elementów wszystkich tablic deklarowanych dynamicznie w pozostałych podprogramach. Następnie procedura CONTR działa zależnie od wczytanych dla niej makroinstrukcji. Dopuszczalne dla tej procedury makroinstrukcje powodują:

FEAP - wejście do procedury MESH,

MACR - wejście do procedury MACR,

STOP - zakończenie działania programu.

Podprogram MESH działa zależnie od wczytanych dla niego makroinstrukcji. Większość spośród nich wymaga wprowadzenia następnie dodatkowych danych. Dopuszczalne są następujące makroinstrukcje: COOR, ELEM, MATE, TEMP, ALOU, QINT, PRIN, NOPR, END. Poszczególne makroinstrukcje powodują:

COOR - Określenie współrzędnych punktów w oparciu o wczytane po niej współrzędne niektórych węzłów. Pozostałe współrzędne są generowane interpolując liniowo pomiędzy punktami, których współrzędne są wczytane (realizacja - procedura GENVECN).

- ELEM - Określenie materiałów i węzłów przynależnych do poszczególnych elementów. Realizacja następuje w oparciu o dane wczytane dla niektórych elementów. Dane te dla pozostałych elementów są generowane, zakładając identyczny materiał jak w elemencie poprzednim i numery węzłów różniące się o stałą liczbę.
- MATE - Wczytanie danych materiałowych (λ, c, ρ) dla poszczególnych rodzajów materiałów.
- TEMP - Określenie węzłów na brzegu S_1 z warunkiem brzegowym I rodzaju i temperatur w tych węzłach w stanie ustalonym (początkowym). Realizacja (procedura GEN) następuje w oparciu o dane wczytane dla niektórych węzłów i generację danych dla pozostałych węzłów, stosując interpolację liniową.
- ALQU - Określenie α i q w stanie ustalonym (początkowym) dla elementów brzegowych, w których występuje warunek brzegowy (4). Realizacja następuje podobnie jak wyżej.
- QINT - Określenie wydajności wewnętrznych źródeł ciepła przyporządkowanych poszczególnym elementom w stanie ustalonym (początkowym) i ich wprowadzenie do tablicy QINT. Realizacja następuje za pomocą procedury QIN.
- PRIN - Następuje wydruk wyznaczonych wielkości.
- NOPR - Pominięcie wydruku wyznaczonych wielkości.
- END - Koniec zespołu danych dla podprogramu MESH. W odróżnieniu od pozostałych, musi wystąpić.

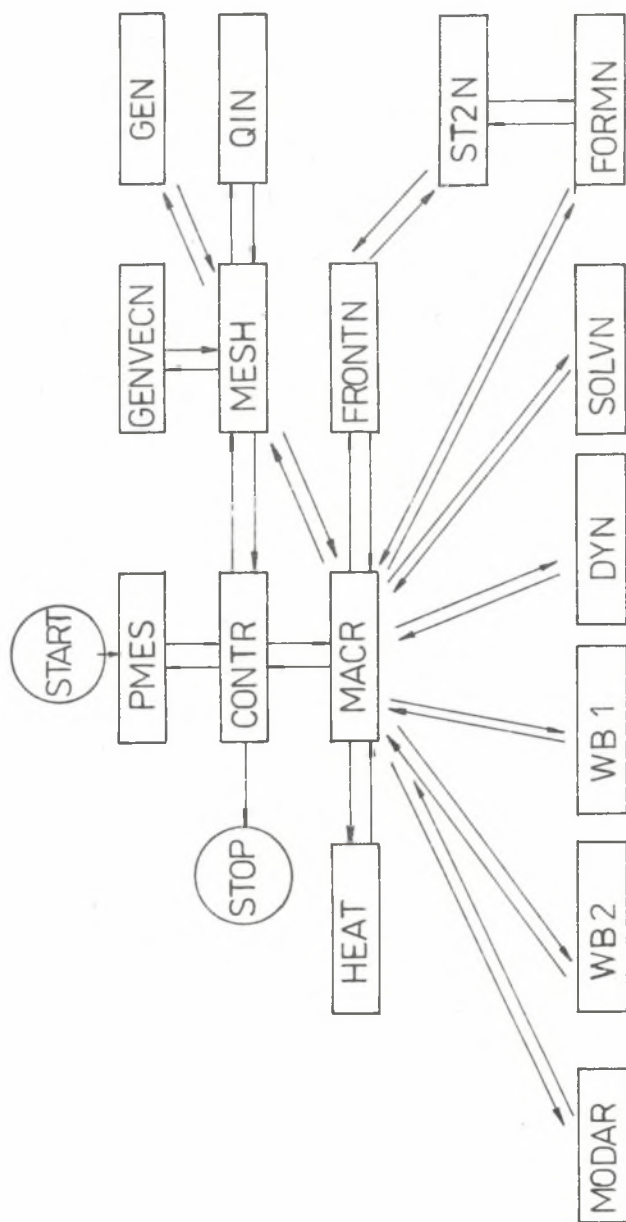
Wyznaczając wydajności wewnętrznych źródeł ciepła przyporządkowane poszczególnym elementom założono przestrzenny rozkład tej wydajności w postaci:

$$\dot{Q}_V(x, y) = \dot{Q}_{V0} \exp \left[-\mu(x - x_0) \right] \cos(\beta y), \quad (29)$$

gdzie: $\dot{Q}_{V0}, \mu, x_0, \beta$ są wielkościami stałymi.

W przypadku występowania przestrzennego rozkładu wydajności wewnętrznych źródeł ciepła w innej postaci należy zmienić, bardzo prostą w budowie, procedurę QIN. Pozostałe elementy podprogramu MESH i współpracujące z nim procedury są ogólniejsze i pozwalają rozwiązywać dowolne liniowe zadania dwuwymiarowego przewodzenia ciepła.

Podprogram MACR działa zależnie od wczytanych dla niego makroinstrukcji. Niektóre spośród nich zawierają parametry. Zbiór dopuszczalnych makroinstrukcji jest następujący: DT, PRPL, PRIN, TIDP, TDEP, LOOP, NEXT, ZMQU, TIME, SOLV, STEP, MODF, MESH, Z1WB, Z2WB, FRON, BACK. Znaczenie poszczególnych makroinstrukcji jest następujące:



Rys. 2. Uproszczony schemat blokowy programu obliczeniowego
 Fig. 2. Simplified block diagram of calculation program

- DT $p_1 p_2$ - Krok czasowy DTT jest od tego momentu równy parametrowi p_1 [sek]. Jeżeli $P_2 = 1$ wyznaczona jest macierz A. Powinno to mieć miejsce przy stosowaniu ilorazu różnicowego wstecznego.
- PRPL p_1 - Jeżeli $p_1 = 1$ wydruk temperatur wynikowych w zadanych węzłach. W przeciwnym przypadku wydruk wyników dla plotera.
- PRIN - Normalne wyprowadzenie temperatur wynikowych.
- TIDP - Powoduje wejście do procedury FORMN w obliczeniach ustalonego rozkładu temperatury i wyznaczenie macierzy H i F.
- TDEP - Powoduje wejście do procedury FORMN i wyznaczenie dla potrzeb obliczeń początkowego ustalonego rozkładu temperatury macierzy H, B^m , F.
- LOOP p_1 - Oznacza p_1 -krotne wykonanie ciągu makroinstrukcji do napotkania odpowiedniej makroinstrukcji NEXT.
- NEXT - Kończy pętlę rozpoczynając się od makroinstrukcji LOOP. W ciągu makroinstrukcji może być maksymalnie 8 poziomów pętli.
- ZMQU - Powoduje wejście do procedury HEAT i wyznaczenie wydajności wewnętrznych źródeł ciepła w aktualnym czasie TIME.
- TIME - Powoduje obliczenie aktualnego czasu wg instrukcji: TIME = TIME + DTT.
- SOLV - Powoduje wejście do procedury SOLVN i rozwiązanie liniowego układu równań algebraicznych.
- STEP - Powoduje wejście do procedury DYN i wyznaczenie temperatur węzłowych w kolejnym kroku czasowym metodą ilorazu różnicowego przedniego.
- MODF - Powoduje wejście do procedury FORMN podczas obliczeń niestabilnego rozkładu temperatury i wyznaczenie macierzy F dla warunków w aktualnym czasie.
- MESH - Powoduje ponowne wejście do procedury MESH i zmianę wielkości w niej wyznaczanych.
- Z1WB - Powoduje wejście do procedury WB1 i określenie aktualnych warunków brzegowych I rodzaju.
- Z2WB - Powoduje wejście do procedury WB2 i określenie aktualnych warunków brzegowych w postaci (4).
- FRON - Może powodować wejście do procedury FRONTN, wyznaczenie macierzy H i F oraz rozwiązanie liniowego układu równań względem temperatur węzłowych w stanie ustalonym. Stosowana jest przy dużych liczbach węzłów.

BACK - Powoduje wejście do procedury MODAR podczas obliczeń nieustalonego rozkładu temperatury metodą ilorazu różnicowego watecznego i wyznaczenie macierzy C. Następnie procedura SOLVN rozwiązuje liniowy układ równań (23).

Procedury FORMN i FRONTN budujące macierze H, B*, F współpracują z podprogramem ST2N, który wyznacza skłaniki elementów tych macierzy wynikające z całkowania po poszczególnych elementach.

W podprogramach FORMN i MODAR budowane są tablice, w których zapamiętywane są jedynie górne niezerowe pasma symetrycznych macierzy H i A. Procedura SOLVN rozwiązuje układy równań z tak przygotowanymi tablicami, zawierającymi elementy macierzy współczynników. Jeśli chodzi o macierz B*, to w odpowiedniej tablicy zapamiętywane są jedynie jej niezerowe elementy, które znajdują się na przekątnej głównej.

Podprogram FRONTN może być wykorzystywany do obliczeń ustalonych w przypadku dużej liczby węzłów i elementów. Dzięki wykorzystaniu pamięci zewnętrznej do zapisywania elementów macierzy współczynników może on służyć do rozwiązywania dużych układów równań [5].

Zdecydowana większość podprogramów programu PMES ma charakter ogólny. Pewnym wyjątkiem, obok wspomnianego podprogramu QIN, są też podprogramy WB1 i WB2, które służą do określania zmiennych w czasie warunków brzegowych. Wartości niektórych wielkości zmiennych w czasie są wczytywane dyskretnie. Do wyznaczania wartości tych wielkości (\dot{Q}_v , T_{ot}) w konkretnych momentach czasowych stosowana jest interpolacja Lagrange'a I lub II rzędu. Przewidziano też możliwość występowania wymiany ciepła przez promieniowanie pomiędzy powierzchnią rozpatrywanego obszaru omywaną płynem a ścianką omywanej również tym samym płynem izolacji.

Wówczas:

$$\dot{q}_r = \epsilon_{z-s} C_c \left[\left(\frac{T_z}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s}{100} \right)^4 \right], \quad (30)$$

gdzie:

- C_c - stała promieniowania ciała doskonale czarnego, równa $5,67 \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$,
- ϵ_{z-s} - współczynnik wymiany energii promienistej pomiędzy powierzchnią obszaru V i powierzchnią izolacji,
- T_z - temperatura powierzchni obszaru V (może być różna w każdym elemencie),
- T_s - temperatura powierzchni izolacji, którą wyznaczono z równania przestępnego:

$$x_z^p \epsilon_{z-s} C_c \left[\left(\frac{T_z}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s}{100} \right)^4 \right] = x_s^p \alpha (T_s - T_{ot}), \quad (31)$$

gdzie:

x_z, x_s - współrzędne powierzchni obszaru V i powierzchni izolacji,

$$p = \begin{cases} 1 & \text{- układ cylindryczny} \\ 0 & \text{- układ płaski} \end{cases}$$

Podprogramy WB1 i WB2 opracowano tak, by umożliwić obliczenia pól temperatury w różnych elementach zbiornika ciśnieniowego reaktora jądrowego w dowolnych stanach eksploatacyjnych tego reaktora. Wykorzystując program do rozwiązywania innych zadań, może okazać się konieczne wprowadzenie pewnych, dość łatwych do zrealizowania zmian w procedurach WB1 i WB2.

Przykładowy, skrócony zestaw danych dla programu PMES, dobrze ilustrujący sposób wykorzystywania makroinstrukcji, może wyglądać następująco:

```
FEAP tekst - musi wystąpić, powoduje wejście MESH,
..... - podstawowe informacje wstępne,
COOR
..... - dane dotyczące współrzędnych węzłów,
.....
pusty rekord
ELEM
..... - dane dotyczące połączeń węzłów, materiału w elementach,
.....
pusty rekord
TEMP
..... - dane dotyczące temperatur w węzłach z warunkiem brzegowym
..... I rodzaju
pusty rekord
ALQU
..... - dane dotyczące warunków brzegowych II i III rodzaju,
.....
pusty rekord
QINT
..... - dane dla procedury QIN,
pusty rekord
MATE
..... - dane materiałowe,
.....
pusty rekord
END - koniec ciągu makroinstrukcji i danych dla podprogramu MESH,
MACR - wejście do podprogramu MACR,
TDEP - wyznaczenie H, B*, F,
SOLV - wyznaczenie początkowego rozkładu temperatury,
DT 20 1 - krok czasowy staje się równy 20 s, wyznaczenie A,
LOOP 10 - powoduje 10-krotne wykonanie makroinstrukcji do napotkania
odpowiedniej makroinstrukcji NEXT,
```

```

PRIN   - normalny wydruk wyników,
PRPL   - wydruk wyników dla plotera,
LOOP 5 - 5-krotne wykonanie ciągu makroinstrukcji,
TIME   - TIME = TIME + 20 s, początkowo TIME = 0,
ZMQU   - obliczenie aktualnych  $\dot{Q}_v$  (podprogram HEAT),
Z1WB   - obliczenie aktualnych temperatur brzegowych (WB1),
Z2WB   - obliczenie aktualnych wartości  $\alpha$  i  $\dot{q}$  w elementach brzegowych
        (WB2),
MODF   - obliczenie F,
BACK   - wyznaczenie temperatur węzłowych w kolejnym kroku,
NEXT   - koniec pętli LOOP 5,
NEXT   - koniec pętli LOOP 10,
END     - koniec makroinstrukcji dla procedury MACR,
HEAT
..... - dane dla podprogramu HEAT (I wejście),
.....
pusty rekord
WB 1
..... - dane dla podprogramu WB 1 (I wejście),
.....
pusty rekord
WB 2
..... - dane dla podprogramu WB 2(I wejście),
.....
pusty rekord
STOP - koniec obliczeń.

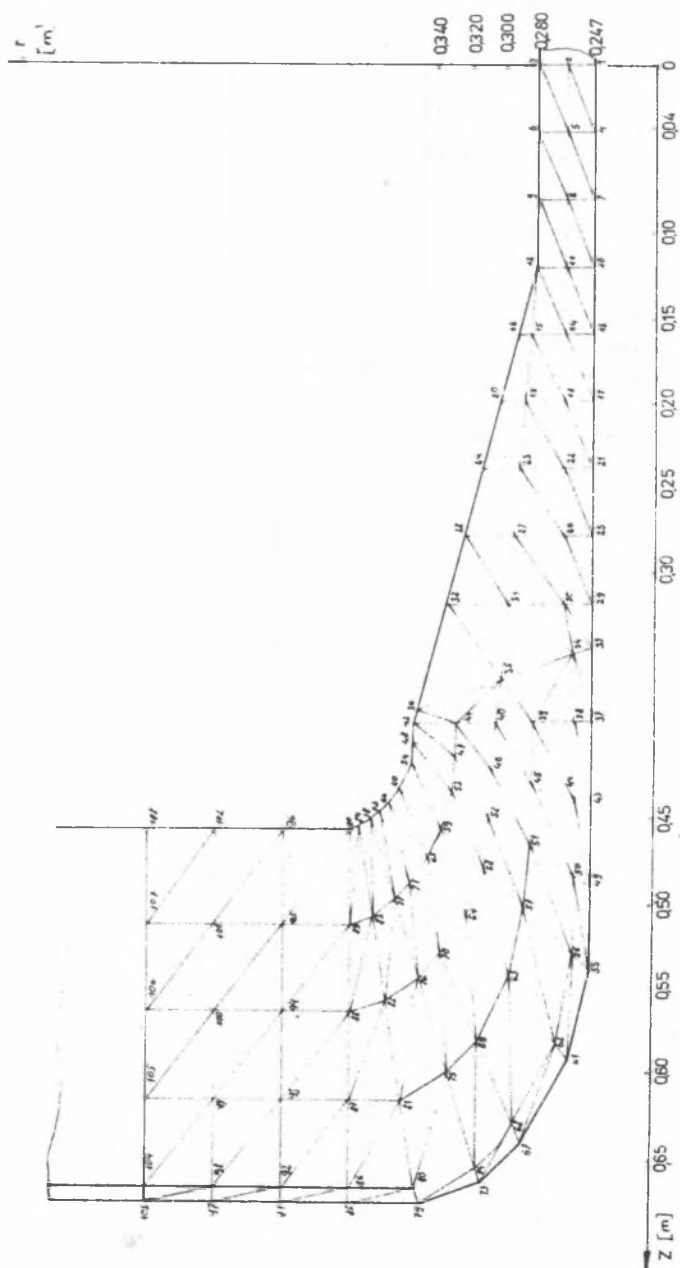
```

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

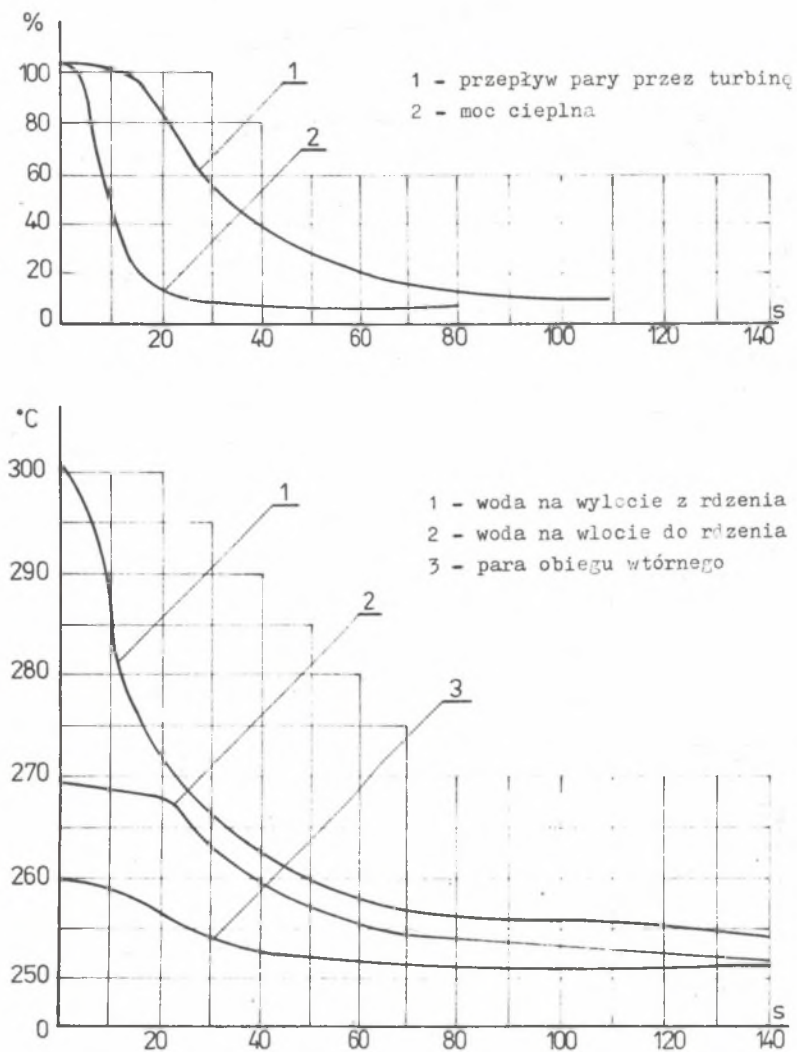
Dla zilustrowania możliwości obliczeniowych programu PMES zamieszczono obliczenia pól temperatury w króćcu ϕ 500 mm zbiornika ciśnieniowego reaktora jądrowego WWER-440.

Model obliczeniowy króćca ϕ 500 mm wraz z podziałem na elementy i zaznaczeniem numerów węzłów, w których obliczane są temperatury, zamieszczono na rys. 3.

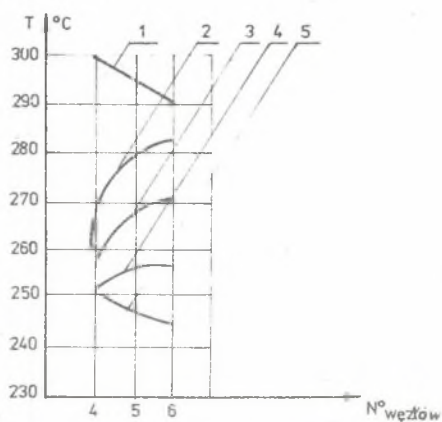
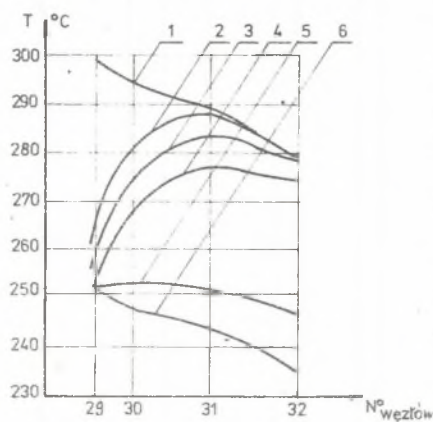
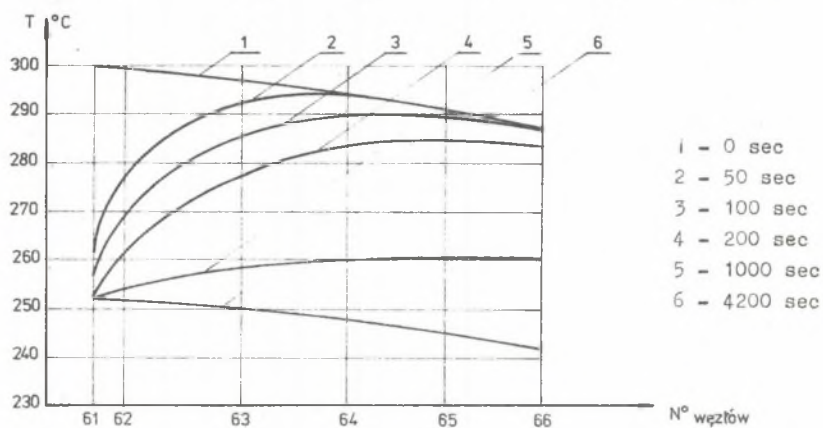
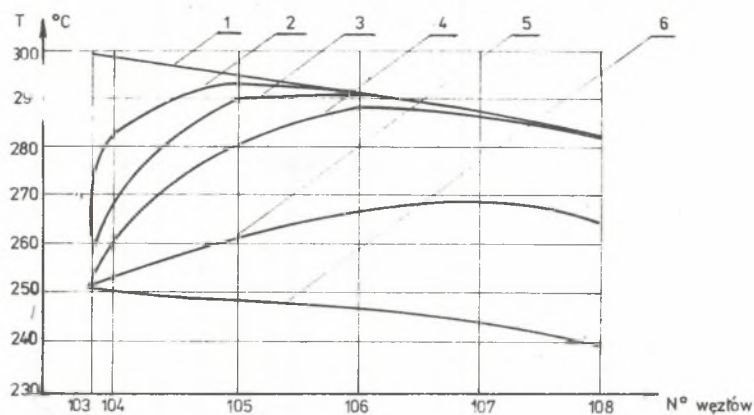
Zagadnienie potraktowano jako osiowo-symetryczne, gdzie oś "z" układu współrzędnych walcowych pokrywa się z osią króćca. Założono dla uproszczenia, że powierzchnia walcowa króćca przenika się z płaską ścianką zbiornika. W rzeczywistości króciec ten dospawany jest do szyjki wyciągniętej z cargi pierścieniowej zbiornika ciśnieniowego. Carga zbiornika odkuta jest ze stali 15H2MFA, a króciec właściwy wykonano ze stali OBH18N10T. Króciec łączy się dalej z głównym rurociągiem cyrkulacyjnym wykonanym również ze stali OBH18N10T. Od strony wewnętrznej carga zbiornika



Rys. 3. Model obliczeniowy króćca ϕ 500, podział na elementy, numeracja węzłów
 Fig. 3. Computational model of the stub ϕ 500, division for elements, nodes numeration



Rys. 4. Wyłączenie awaryjne - przebieg zmienności parametrów
Fig. 4. Failure switch off - runs of parameters changes



Rys. 5. Rozkłady temperatur w wybranych przekrojach
Fig. 5. Temperature distribution in chosen sections

nika pokryta jest warstwą plateru antykorozyjnego ze stali EI 898. Plater ten stanowi też warstwę przejściową w spoinie łączącej szyjkę wyciągniętą z cangi z króćcem właściwym. Na rys. 3 obszar przejściowy spoiny obejmuje elementy o numerach węzłów 33-42.

Obliczenia wykonano dla króćca wylotowego, którego wewnętrzna powierzchnia omywana jest wodą wylotową z rdzenia reaktora o maksymalnej temperaturze 300°C.

Dane materiałowe przyjęto do obliczeń wg tablicy 1. Zmiany własności stali w zakresie temperatur obliczeniowych są niewielkie i w obliczeniach nie uwzględniono tych zmian.

Tablica 1

Własności materiałowe stali

| Stal | λ [W/mK] | c [J/kg K] | ρ [kg/m ³] | T [°C] |
|-----------|------------------|------------|-----------------------------|--------|
| 15H2MFA | 41,8 | 460 | 7820 | 200 |
| 08H18N10T | 17,6 | 460 | 7830 | 200 |
| EI 898 | 20,7 | 480 | 7800 | 200 |

W obliczeniach nie uwzględniono radiacyjnej wymiany ciepła pomiędzy króćcem a częścią walcową zbiornika. Obliczenia wykonano dla stanu wyłącznie awaryjnego bez wychładzania; przebieg zmian parametrów dla tego stanu przedstawia rys. 4.

W obliczeniach przyjęto brak generacji ciepła w obszarze króćca. Na powierzchni wewnętrznej króćca założono warunek brzegowy III rodzaju, przyjmując współczynnik wnikania ciepła $\alpha = 25 \cdot 10^3$ W/m² K. Na powierzchni zewnętrznej założono warunek brzegowy w postaci (4), przyjmując współczynnik wnikania ciepła pomiędzy powierzchnią króćca i powietrzem chłodzącym $\alpha = 12$ W/m² K oraz temperaturę powietrza $T_{ot} = 50^\circ\text{C}$ i $\varepsilon_{z-e} = 0,68$.

Obliczenia realizowano za pomocą programu PMES, stosując metodę ilorazu różnicowego wstecznego z krokiem czasowym, w przedziale 0-200 s 10 sekund i dla czasów większych od 200 s z krokiem czasowym 100 s. Wyniki obliczeń w postaci przebiegów zmian temperatury w wybranych węzłach dla różnych momentów czasowych przedstawiono na rys. 5.

Oszacowane w [6] błędy rezultatów obliczeń z tytułu podziału obszaru na elementy o skończonych rozmiarach są rzędu 0,3 K, a z tytułu stosowania skończonego kroku czasowego - rzędu 0,2 K.

5. ZAKOŃCZENIE

Opracowany w języku FORTRAN dla maszyn cyfrowych serii ODRA 1300 program PMES umożliwia rozwiązywanie różnorodnych zadań z dziedziny ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła w dwuwymiarowym układzie płaskim

i walcowym osiowo-symetrycznym. Znaczną ogólność programu uzyskano dzięki wykorzystaniu idei makroinstrukcji w podprogramach organizujących obliczenia, podobnie jak w programie MINIFEM Taylora [3].

Możliwości programu mogą być łatwo rozszerzone dzięki prostej jego strukturze, w tym także wspomnianych podprogramów organizujących obliczenia. Między innymi łatwo jest wprowadzić zmiany umożliwiające obliczenia z zastosowaniem innych, niż to ma miejsce obecnie, metod dyskretyzacji pochodnych temperatur względem czasu.

LITERATURA

- [1] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. "Arkady", Warszawa 1972.
- [2] Ratajczak R.: Wyznaczanie rozkładu temperatury w stanie nieustalonym w dwuwymiarowym modelu osłony reaktora jądrowego. Praca dyplomowa magisterska wykonana w Instytucie Techniki Ciepłej Politechniki Śląskiej, Gliwice 1982.
- [3] Zienkiewicz O.C.: The Finite Element Method, third edition. Mc Graw Hill, London 1977.
- [4] Biły P.: Wyznaczanie ustalonego rozkładu temperatury w wybranych elementach reaktora. Praca dyplomowa magisterska wykonana w Instytucie Techniki Ciepłej Politechniki Śląskiej, Gliwice 1984.
- [5] Hood P.: Frontal Solution Program for unsymmetric Matrices. Int. Journ. for Num. Meth. Eng., vol. 10, 1976.
- [6] Fic. A., Groborz Cz., Uruski J.: Obliczanie pól temperaturowych w wytypowanych węzłach konstrukcyjnych zbiornika reaktora WWR-440 w określonych warunkach i stanach eksploatacyjnych. Praca nb IMiUE Pol. Śl., 1984.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Wiktor Żyszkowski

Wpłynęło do redakcji w kwietniu 1985 r.

ПРОГРАММА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХМЕРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р е з ю м е

В работе представлен метод конечных элементов для решения двухмерных стационарных и нестационарных задач теплопроводности. Приводятся уравнения для расчётов элементов матриц теплоёмкости. Кроме того, в работе описана программа для определения двухмерного стационарного и нестационарного распределения температуры в плоской и осево-симметрической системе координат. Результаты расчетов приведены для потрубка корпуса реактора ВВЭР-440 в одном из переходных состояний работы реактора.

PROGRAM FOR ASSIGNMENT OF TWO/DIMENSIONAL TEMPERATURE FIELDS
BY THE FINITE ELEMENTS METHOD

S u m m a r y

The paper describes a method of solution of the two-dimensional heat transfer problem using the finite element method. The equations for calculations of the elements of the heat capacity matrix have been given. The program used for calculation of steady state and transient temperature distributions in two-dimensional coordinates, Cartesian and cylindrical, have been described in detail. To illustrate abilities of the program an example of the calculation of the temperature distribution in the connector pipe of the pressure vessel of the nuclear reactor WWR-440 for the particular operating conditions has been presented.