ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 143 Nr kol. 1726

Rafał KOCISZEWSKI
Politechnika Białostocka

OBSERWOWALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIAMI ZMIENNYCH STANU

Streszczenie. W pracy sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające obserwowalności dodatnich (wewnętrznie) układów dyskretnych z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu. Podano metodę na wyznaczenie wektora warunków początkowych. Rozważania zilustrowano przykładem.

OBSERVABILITY OF POSITIVE DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS WITH DELAYS IN STATE

Summary. Definitions and necessary and sufficient conditions for observability of positive (internally) discrete-time systems with multiple delays in state vector have been given. Considerations are illustrated by numerical example.

1. Wstęp

Problematyka obserwowalności obok osiągalności czy sterowalności należy do ważnych aspektów nowoczesnej, matematycznej teorii sterowania. Zagadnienia te są od wielu już lat tematem licznych prac, np. monografie [4, 7] (wraz z obszernie cytowaną tam literaturą), w których rozważano układy standardowe (niedodatnie) ciągłe oraz dyskretne, lecz bez opóźnień. W ostatnich kilku latach, w których znacznie wzrosło zainteresowanie układami dodatnimi, problem obserwowalności układów ciągłych dodatnich bez opóźnień był rozważany w monografiach [3, 5, 6], natomiast układów dyskretnych także bez opóźnień w [5, 6].

W niniejszej pracy, przy wykorzystaniu pewnych rezultatów prac [2, 5, 6], zostaną podane łatwe do weryfikacji kryteria obserwowalności dodatnich (wewnętrznie) układów dyskretnych z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu. Zostanie także zaproponowana metoda na wyznaczenie wektora warunków początkowych dla tej klasy układów dodatnich.

2. Sformułowanie problemu

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę dodatni (wewnętrznie) dyskretny układ liniowy z opóźnieniami, opisany równaniem stanu i wyjścia

$$x_{i+1} = \sum_{k=0}^{h} A_k x_{i-k} + Bu_i, \quad i \in Z_+, \tag{1a}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \tag{1b}$$

gdzie h jest liczbą (naturalną) opóźnień zmiennych stanu, $x_i \in \Re_+^n$, $u_i \in \Re_+^m$, $y_i \in \Re_+^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wejścia i wyjścia oraz $A_k \in \Re_+^{n\times n}$, $k = 0,1,\ldots,h$, $B \in \Re_+^{n\times m}$, $C \in \Re_+^{p\times n}$, $D \in \Re_+^{p\times m}$. Warunek początkowy równania (1a) jest określony następująco:

$$x_{-i} \in \Re_+^n, \quad i = 0,1,\ldots,h. \tag{2}$$

Przy powyższym warunku, jeżeli $u_i \in \Re_+^m$ dla $i \in Z_+$, to rozwiązanie równania stanu (1a) jest nieujemne (tj. $x_i \in \Re_+^n$, $\forall i \in Z_+$) i ma postać [1]

$$x_i = \Phi(i)x_0 + \sum_{j=1}^{h} \sum_{k=1}^{h+1-j} \Phi(i-k)A_{k-1+j}x_{-j} + \sum_{j=0}^{i-1} \Phi(i-1-j)Bu_j, \tag{3}$$

gdzie $\Phi(i)$ jest macierzą podstawową. Spełnia ona równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1) + \ldots + A_h\Phi(i-h), \tag{4}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \tag{5}$$

Podstawiając rozwiązanie równania (1a) o postaci (3) do równania (1b) otrzymamy

$$y_i = C\Phi(i)x_0 + C\sum_{j=1}^{h} \sum_{k=1}^{h+1-j} \Phi(i-k)A_{k-1+j}x_{-j} + \sum_{j=0}^{i-1} C\Phi(i-1-j)Bu_j + Du_i. \tag{6}$$

Dokonując następnie podstawień, kolejno dla $i = 0,1,\ldots,N-1$, do powyższego równania, otrzymamy zmodyfikowaną odpowiedź układu dodatniego (1) w następującej postaci:

$$y_0^N = y_i - \sum_{j=0}^{i-1} C\Phi(i-1-j)Bu_j - Du_i, \tag{7}$$

gdzie:

$$y_0^N = S_N \widetilde{x}_0, \tag{8}$$

przy czym

$$y_0^N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad S_N = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C\Phi(1) & CA_1 & 0 & \cdots & 0 \\ C\Phi(2) & C\Phi(1)A_1 & CA_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Phi(N) & C\Phi(N-1)A_1 & C\Phi(N-2)A_2 & \dots & CA_h \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ \vdots \\ x_{-h+1} \\ x_{-h} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Z równania (8) wynika, że, z punktu widzenia obserwowalności rozpatrywanego układu dodatniego, należy zbadać powiązanie z warunkami początkowymi $\widetilde{x}_0$ wektora y_0^N, bez uwzględniania macierzy B i D.

Uogólniając podane w [5,6] definicje dla układów dodatnich bez opóźnień, napiszemy:

Definicja 1. Zbiorem dodatnich warunków początkowych X^+ układu dodatniego (1) nazywamy zbiór warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^n$, $i = 0,1,\dots,h$ (przy zerowym wektorze wymuszeń $u_i = 0, i \in Z_+$), dla których otrzymujemy nieujemne wartości odpowiedzi $y_i \in \Re_+^p$, $i \in Z_+$, tj.

$$X^+ := \{\widetilde{x}_0 \in \Re_+^{\widetilde{n}} : y_i \geq 0, \ i \in Z_+\}, \tag{10}$$

gdzie $\widetilde{n} = (h+1)n$, zaś y_i, $\widetilde{x}_0$ są dane wzorami (6) i (9).

Definicja 2. Układ dodatni nazywamy obserwowalnym w N krokach, jeżeli na podstawie znajomości wartości odpowiedzi tego układu w kolejnych N punktach $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ oraz warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^n$, $i = 0,1,\dots,h$ (przy $u_i = 0, i \in Z_+$), możemy jednoznacznie wyznaczyć x_{-i}, $i = 0,1,\dots,h$.

Definicja 3. Układ dodatni (1) nazywamy obserwowalnym, jeżeli istnieje liczba naturalna $N \geq 1$ taka, że układ ten jest obserwowalny w N krokach.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków koniecznych i wystarczających obserwowalności układu dodatniego (1) oraz metody pozwalającej wyznaczyć stan początkowy rozpatrywanego układu.

3. Rozwiązanie problemu

Przy zerowym wymuszeniu $u_i = 0, i \in Z_+$ równanie wyjścia rozpatrywanego układu dodatniego sprowadza się do postaci (8).
Postępując podobnie jak w przypadku układów dodatnich dyskretnych bez opóźnień [5, 6], możemy udowodnić poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 1. Zbiór dodatnich warunków początkowych X^+ układu dodatniego (1) jest dodatnim stożkiem wypukłym. Stożek ten jest solidny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $N \in Z_+$ taka, że rząd $S_N = \widetilde{n}$, gdzie macierz obserwowalności S_N ma postać (9).

Twierdzenie 2. Układ dodatni (1) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony przynajmniej jeden z podanych niżej warunków:

1. Istnieje dodatni obraz macierzy obserwowalności S_N, tzn. $\mathrm{Im}_+ S_N = \Re_+^{\widetilde{n}}$.
2. Z macierzy S_N można wybrać $\widetilde{n}$ liniowo niezależnych wierszy takich, że macierz odwrotna $\overline{S}_N^{-1}$ macierzy $\overline{S}_N$ utworzona z tych wierszy ma elementy nieujemne, tj. $\overline{S}_N^{-1} \in \Re_+^{\widetilde{n} \times \widetilde{n}}$.
3. Z macierzy S_N można wybrać $\widetilde{n}$ liniowo niezależnych wierszy takich, że macierz $\overline{S}_N$ utworzona z tych wierszy jest uogólnioną macierzą permutacji (w każdym wierszu i w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a pozostałe są zerowe).

Weźmy pod uwagę następującą, ogólną zależność [2]

$$\Phi(\widetilde{n}+k) = -a_{\widetilde{n}-1}\Phi(\widetilde{n}+k-1) - \ldots - a_1\Phi(k+1) - a_0\Phi(k), \quad k \in Z_+, \tag{11}$$

gdzie a_i, $i = 0,1,\ldots,\widetilde{n}-1$ są współczynnikami wielomianu charakterystycznego

$$w(z) = \det(zI_{\widetilde{n}} - A) = z^{\widetilde{n}} + a_{\widetilde{n}-1}z^{\widetilde{n}-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{12}$$

natomiast macierz A jest macierzą układu (bez opóźnień) równoważnego do układu dodatniego (1)

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{h-1} & A_h \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Mnożąc lewostronnie (11) przez macierz C, otrzymujemy

$$C\Phi(\tilde{n}+k) = -a_{\tilde{n}-1}C\Phi(\tilde{n}+k-1) - \ldots - a_0 C\Phi(k), \tag{14}$$

Ze wzorów (11) i (14) wynika, że $C\Phi(\tilde{n}+k)$ jest liniową, nieujemną kombinacją $C\Phi(k+i)$ dla każdego $k \in Z_+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \leq 0$, $i = 0,1,\ldots,\tilde{n}-1$. Można więc stwierdzić, że $\text{rząd}\, S_{N+k} = \text{rząd}\, S_N$, gdzie $N = \tilde{n}$. Jeżeli są spełnione warunki twierdzenia 2, to zbiór dodatnich warunków początkowych X^+ (10) nie zmienia się dla $N \geq \tilde{n}$ i pozostaje w przestrzeni $\Re_+^{\tilde{n}}$. Jeśli nie jest on równy przestrzeni $\Re_+^{\tilde{n}}$, to układ dodatni (1) nie jest obserwowalny. Dalsze zwiększanie liczby N nie spowoduje zmiany zbioru wartości początkowych X^+. Wobec tego, jeżeli układ dodatni jest obserwowalny w $\tilde{n}+k$ krokach to jest on obserwowalny w $\tilde{n}$ krokach.

Uwzględniając równanie wyjścia (8) oraz powyższe rozważania, możemy podać następujący warunek dostateczny obserwowalności.

Twierdzenie 3. Układ dodatni (1) jest obserwowalny, jeżeli istnieje liczba naturalna $N \in Z_+$ taka, że rząd macierzy S_N o postaci (9) jest równy $\tilde{n}$, oraz

$$S_N^T \left[S_N S_N^T \right]^{-1} \in \Re_+^{\tilde{n}\times(N+1)p}, \tag{15}$$

Dowód. Jeżeli $\text{rząd}\, S_N = \tilde{n}$, wówczas macierz $[S_N S_N^T]$ jest nieosobliwa, zaś macierz $S_N^T \left[S_N S_N^T \right]^{-1}$ jest w pełni określona. Przy spełnionym warunku (15) oraz ciągu odpowiedzi $y_0^N \in \Re_+^{(N+1)p}$ wektor warunków początkowych $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{\tilde{n}}$.

Jeżeli istnieje taka liczba naturalna $N \in Z_+$, że jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 2, to układ jest obserwowalny. Jeżeli jest spełniony warunek (15), to, korzystając z rozwiązania równania stanu (1) w postaci (8), możemy wyznaczyć wektor stanu $\tilde{x}_0$ (na podstawie znajomości sekwencji odpowiedzi y_0^N oraz znajomości macierzy obserwowalności S_N). Wektor $\tilde{x}_0$ jest określony wzorem

$$\tilde{x}_0 = S_N^T \left[S_N S_N^T \right]^{-1} y_0^N. \tag{16}$$

4. Przykład

Celem pełnego zobrazowania podanych powyżej rozważań zbadamy obserwowalność układu standardowego („niedodatniego") oraz układu dodatniego z dwoma opóźnieniami (w każdym przypadku) w 4 krokach. Macierze opisujące układ standardowy oraz warunki początkowe są następujące

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$x_0 = [3 \quad 2 \quad 1]^T, x_{-1} = [2 \quad 1 \quad 2]^T, x_{-2} = [6 \quad 4 \quad 5]^T. \tag{18}$$

Przyjmując podaną liczbę kroków $N = 4$, ze wzoru (9) wyznaczymy macierz obserwowalności

$$S_N = S_4 = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ C\Phi(1) & CA_1 & 0 \\ C\Phi(2) & C\Phi(1)A_1 & CA_2 \\ C\Phi(3) & C\Phi(2)A_1 & C\Phi(1)A_2 \\ C\Phi(4) & C\Phi(3)A_1 & C\Phi(2)A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

gdzie wartości $\Phi(1)...\Phi(4)$ wyznaczamy ze wzoru rekurencyjnego (4). Macierz (19) ma pełny rząd wierszowy równy 5, rozpatrywany układ jest obserwowalny. Ciąg odpowiedzi wyznaczony ze wzoru (8) ma postać

$$y_0^N = y_0^4 = S_4 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} = [3 \quad 1 \quad 6 \quad 4 \quad 10]^T, \tag{20}$$

gdzie $y_0 = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = 6$, $y_3 = 4$, $y_4 = 10$. Natomiast wektor stanów początkowych wyznaczony ze wzoru (16)

$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} = S_4^T \left[S_4 S_4^T \right]^{-1} y_0^4 = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 4 \quad 0]^T. \tag{21}$$

Wobec tego

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_{-1} = \begin{bmatrix} x_{-11} \\ x_{-12} \\ x_{-13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_{-2} = \begin{bmatrix} x_{-21} \\ x_{-22} \\ x_{-23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Zauważmy, że macierze opisujące układ standardowy zawierają elementy nieujemne, można więc ten układ traktować również jak układ dodatni. Z punktu widzenia badania obserwowalności układu dodatniego, postać macierzy (19) wskazuje jednak, że żaden z warunków twierdzenia 2 nie jest spełniony i układ nie jest obserwowalny (przy nieujemnej sekwencji wyjścia). Łatwo można sprawdzić, że wynika to z faktu, że macierz $\left[S_4 S_4^T \right]^{-1}$ zawiera elementy niedodatnie.

Weźmy zatem pod uwagę układ dodatni przy tych samych warunkach początkowych, lecz o następujących macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Powtarzając obliczenia dla powyższych danych, otrzymujemy następującą postać macierzy obserwowalności

$$S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Z postaci macierzy (24) wynika, że są spełnione warunki twierdzenia 2. Łatwo można sprawdzić, że jest spełniony warunek dostateczny (15), bowiem dla $\widetilde{n} = (h+1)n = 9$ otrzymujemy, że $S_4^T \left[S_4 S_4^T \right]^{-1} \in \Re_+^{9\times 5}$. Wektor odpowiedzi oraz stanów początkowych w rozpatrywanym układzie dodatnim wynoszą odpowiednio

$$y_0^4 = S_4 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \widetilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} = S_4^T \left[S_4 S_4^T \right]^{-1} y_0^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{25}$$

5. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem obserwowalności dodatnich układów dyskretnych z wieloma opóźnieniami w wektorze stanu. Dla tej klasy układów sformułowano definicje oraz podano łatwe do weryfikacji warunki konieczne i wystarczające obserwowalności. Wskazano również, że istnieje metoda pozwalająca wyznaczyć, przy spełnieniu warunku dostatecznego (15), wektor stanów początkowych. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym, w którym pokazano różnicę między obserwowalnością standardowego układu dyskretnego z opóźnieniami a obserwowalnością układu dodatniego. Warunki obserwowalności (podobnie jak osiągalności czy sterowalności) dyskretnych układów dodatnich są trudniejsze do spełnienia ze względu na postać macierzy obserwowalności (lub odpowiednio osiągalności), od której wymaga się istnienia jej obrazu dodatniego (spełnienie warunku 1, twierdzenia 2 i w konsekwencji warunków 2, 3). Poszczególne zerowe składowe stanów x_{-1}, x_{-2} w rozpatrywanych układach wynikają z zerowych wierszy macierzy $S_4^T \left[S_4 S_4^T \right]^{-1}$. Podane rozważania można uogólnić na klasę układów dodatnich ciągłych z wieloma opóźnieniami.

***

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

LITERATURA

1. Busłowicz M.: O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Elektrotechnika, nr 1, 1983, s. 17-29.
2. Busłowicz M., Kaczorek T.: Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. Proc. 12th Med. Conf. On Control and Automation, Kasadasi, Izmir, Turkey, 2004 (CD-ROM).
3. Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems: Theory and Applications. Willey, New York, 2000.
4. Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa 1996.
5. Kaczorek T.: Dodatnie układy jedo- i dwuwymiarowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2000.
6. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D systems. Springer-Verlag, London 2002.
7. Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: Podstawy teorii sterowania. WNT, Warszawa 2005.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

Abstract

In positive systems inputs, state variables and outputs take only non-negative values for non-negative initial states and non-negative controls. The basic mathematical tools for analysis and synthesis of linear systems are linear space and the theory of linear operators. Positive linear systems are defined on cones and not on linear spaces. Therefore, the theory of positive systems is more complicated and less advanced. Some known results on positive discrete-time linear systems (without delays) are extended for positive discrete-time systems with delays in state and input vector.

In this paper we give definitions of observability (based on monographs [5, 6] for discrete-time linear systems without delays) of positive (internally) linear discrete-time systems with multiple delays in state vector. We give also simple necessary and sufficient conditions for observability. Considerations are illustrated by numerical example.