ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 143 Nr kol. 1726

Marek KUBALE, Paweł OBSZARSKI, Konrad PIWAKOWSKI
Politechnika Gdańska

KOLOROWANIE HIPERGRAFÓW

Streszczenie. Hipergraf to struktura stanowiąca pewne uogólnienie grafu. Oprócz tradycyjnych krawędzi dwuelementowych dopuszcza ona także krawędzie, które zawierają inną, przeważnie większą, liczbę wierzchołków. W tej pracy pokażemy kilka modeli kolorowania hipergrafów, takich jak kolorowanie krawędzi, kolorowanie wierzchołków i tzw. *CD*-kolorowanie, przedstawimy ich podstawowe własności, złożoności oraz wskażemy zastosowania.

HYPERGRAPH COLORING

Summary. A hypergraph is a generalization of a graph in which the edges may contain any number of vertices. In this paper we discuss a few models of hypergraph coloring, namely: edge coloring, vertex coloring and mixed coloring. We present some basic properties of these models, complexity and their possible applications.

1. Wstęp

Rozważmy zbiór procesorów, które mogą wykonywać pewne zadania cząstkowe. Procesory różnią się między sobą i każdy jest wyspecjalizowany w innej czynności. Weźmy teraz zbiór niepodzielnych zadań, przypisanych konkretnym procesorom w taki sposób, że każde zadanie może być wykonane tylko we współpracy z ustalonym zbiorem dedykowanych procesorów. Czas jest podzielony na jednostki i wykonanie każdego zadania wymaga jednej jednostki czasu. Żaden procesor nie może pracować nad więcej niż jednym zadaniem jednocześnie. Celem szeregowania jest ułożenie najkrótszego możliwego harmonogramu.

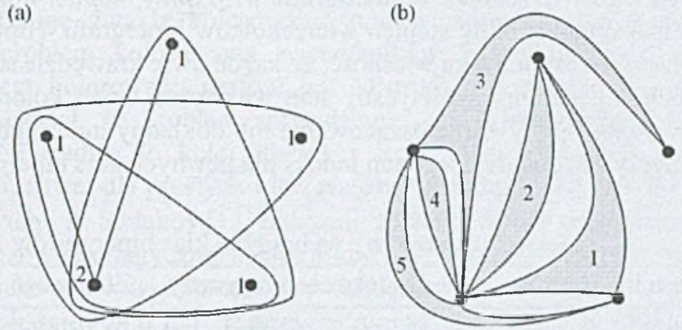
Rozpatrzmy teraz inny przykład. Wyobraźmy sobie magazyn odczynników chemicznych. Wiadomo, że pewne substancje będące w pobliżu (narażone na przypadkowy kontakt) mogą wejść ze sobą w reakcję. Nie muszą to być tylko dwie substancje, czasem do reakcji konieczna jest obecność większej liczby odczynników np. katalizatorów. Celem naszym jest takie pogrupowanie odczynników chemicznych, by nie zachodziła możliwość niekontrolowanej reakcji oraz, by użyta była jak najmniejsza liczba pomieszczeń.

Te i inne problemy rozdziału zasobów można modelować za pomocą kolorowania hipergrafów. W tej pracy rozpatrzymy różne ich modele. Jednakże nasze rozważania rozpoczniemy od przypomnienia podstawowych definicji.

Hipergrafem H nazywamy uporządkowaną parę $H=(V,E)$, gdzie V (lub $V(H)$) oznacza zbiór wierzchołków, a E (lub $E(H)$) oznacza zbiór podzbiorów zbioru V. Elementy zbioru E nazywać będziemy *krawędziami* lub *hiperkrawędziami*. Krawędź, która zawiera dokładnie k wierzchołków, nazywana będzie *k-krawędzią*. Wtedy $\Psi(e)=k$ nazywamy *wymiarem* takiej krawędzi. Przez $\Psi(H)$ oznaczymy *wymiar hipergrafu H*, czyli największy wymiar krawędzi hipergrafu. Hipergraf, w którym wszystkie krawędzie są k-krawędziami, nazywać będziemy *hipergrafem k-jednorodnym* lub *k-hipergrafem*. *Stopniem wierzchołka v* w hipergrafie H określamy liczbę krawędzi, w których występuje v i oznaczamy $\Delta(v)$. *Stopniem hipergrafu H* nazywamy maksymalny stopień po wszystkich wierzchołkach i oznaczamy go $\Delta(H)$. Liczbę wierzchołków w hipergrafie H oznaczamy przez $|V(H)|$ lub n, a liczbę krawędzi przez $|E(H)|$ lub m.

Analogicznie do grafów prostych hipergraf nazywamy *prostym*, jeśli każde dwie krawędzie mają najwyżej jeden wspólny wierzchołek. Jest to na pierwszy rzut oka bardzo niewielka klasa hipergrafów, ale na tyle duża, by pomieścić w sobie wszystkie grafy proste (czyli różne od multigrafów). Każdemu hipergrafowi $H=(X,E)$ odpowiada pewien graf dwudzielny $B(H)$, który składa się z partycji wierzchołków odpowiadających wierzchołkom w H i partycji wierzchołków odpowiadających krawędziom w H. Krawędź między dwoma wierzchołkami występuje, jeśli w hipergrafie odpowiadające im wierzchołek i krawędź są incydentne. O hipergrafie H mówimy, że jest *planarny*, jeśli planarny jest odpowiadający mu graf dwudzielny $B(H)$. Zauważmy, że definicja taka poprawna będzie także dla zwykłych grafów, ponieważ przekształcenie grafu prostego G w $B(G)$ oznacza przedzielenie każdej krawędzi w G dodatkowym wierzchołkiem, a to nie wpływa na planarność. Planarność hipergrafów możemy zdefiniować także w bardziej intuicyjny sposób. Przedstawmy hipergraf na płaszczyźnie. Niech krawędzie będą pewnymi figurami na płaszczyźnie, które na swoim obwodzie mają odpowiadające im wierzchołki hipergrafu. Hipergraf jest planarny, gdy da się go tak narysować, że jedynymi stycznymi punktami wszystkich figur, odpowiadających krawędziom, są wierzchołki. *Hipergrafem indukowanym H* przez pewien graf prosty G będziemy nazywać każdy taki hipergraf, że zbiory wierzchołków H i G są takie same oraz każda krawędź w H indukuje pewien spójny podgraf w grafie prostym G. *Hiperdrogą* nazywać będziemy hipergraf indukowany przez pewną drogę. Analogicznie definiujemy *hiperdrzewa, hipercykle* i *hiperkoła*. Hipergraf z rys. 1 jest przykładem hiperdrzewa. Wystarczy zauważyć, że jest on indukowany przez drzewo, które powstaje przez połączenie 2-krawędziami wierzchołka o największym stopniu z pozostałymi wierzchołkami.

W drugim punkcie zaprezentujemy model kolorowania krawędzi hipergrafu oraz jego podstawowe własności. Krawędziom przydzielamy barwy w taki sposób, by każde dwie sąsiednie krawędzie miały różne kolory. W trzeciej części zajmiemy się tematyką kolorowania wierzchołków hipergrafu. Aby poprawnie pokolorować wierzchołki hipergrafu, trzeba tak rozdzielić barwy, by każda krawędź zawierała wierzchołki w dwóch różnych kolorach. Istnieje jeszcze inne podejście do kolorowania wierzchołków, zwane silnym kolorowaniem. Polega ono na takim przydzielaniu kolorów wierzchołkom, by żadna krawędź nie zawierała dwóch wierzchołków tego samego koloru. Ostatni punkt poświęcony jest uogólnionemu kolorowaniu wierzchołków, zwanemu kolorowaniem hipergrafów mieszanych lub *CD*-kolorowaniem. Hipergraf mieszany posiada dwa rodzaje krawędzi: *D*-krawędzie, które mają tę własność, że muszą zawierać przynajmniej dwa wierzchołki różnego koloru oraz *C*-krawędzie, które muszą zawierać przynajmniej dwa wierzchołki tego samego koloru.



Rys. 1. Przykład hipergrafu *H* narysowanego na dwa sposoby. (a) Hipergraf *H* narysowany w klasyczny sposób, cyfry przy wierzchołkach oznaczają optymalne pokolorowanie wierzchołkowe. (b) Hipergraf *H* narysowany w sposób uwypuklający jego planarność. Cyfry na krawędziach oznaczają optymalne pokolorowanie krawędzi

2. Kolorowanie krawędzi

Poprawnym *pokolorowaniem krawędziowym* hipergrafu nazywamy funkcję $c:E(H)\rightarrow \{1,...,k\}$ taką, że krawędzie mające wspólny wierzchołek dostają inny numer, zwany dalej *kolorem*. *Indeks chromatyczny* $\chi'(H)$ to najmniejsza możliwa liczba kolorów potrzebna, aby poprawnie pokolorować wszystkie krawędzie hipergrafu *H*. *Sumacyjny indeks chromatyczny* $\chi'_\Sigma(H)$ to najmniejsza możliwa liczba kolorów potrzebna, aby poprawnie pokolorować krawędzie hipergrafu *H* w taki sposób, że suma kolorów przydzielonych krawędziom, zwana *krawędziową sumą chromatyczną* $\Sigma'(H)$, jest minimalna.

Model ten ilustruje wspomniany we wstępie problem szeregowania zadań wieloprocesorowych z procesorami dedykowanymi. Niech wierzchołki oznaczają procesory, a krawędzie niech reprezentują zadania. Nie trudno zauważyć, że pokolorowanie takiego hipergrafu będzie odpowiadało rozłożeniu zadań w czasie. Znalezienie indeksu chromatycznego jest równoważne ustaleniu minimalnego czasu potrzebnego na wykonanie wszystkich zadań. Znalezienie minimalnej sumy kolorów i sumacyjnego indeksu chromatycznego pozwala ustalić minimalny średni czas przepływu zadań. Analogiczny model badany był na przykład w [7].

Problemy kolorowania krawędziowego hipergrafów z 1-krawędziami i bez 1-krawędzi są równoważne, ponieważ dla każdej 1-krawędzi możemy dostawić jeden specjalny wierzchołek wiszący, zmieniając 1-krawędź w 2-krawędź. Dlatego tradycyjnie rozważa się kolorowanie krawędzi hipergrafów bez 1-krawędzi.

Kolorowanie krawędzi hipergrafu jest problemem NP-trudnym, ponieważ jest uogólnieniem problemu kolorowania krawędzi grafów prostych i multigrafów, który pozostaje NP-trudny.

2-sekcja hipergrafu H to multigraf $|H|_2$ bez pętli na zbiorze wierzchołków $V(H)$ z k równoległymi krawędziami pomiędzy wierzchołkami v i u, jeśli występują one razem w k krawędziach w hipergrafie H. *Silny stopień* wierzchołka $\Delta_S(v)$ w hipergrafie H, to stopień tego wierzchołka w multigrafie $|H|_2$. *Silny stopień hipergrafu* $\Delta_S(H)$ to oczywiście maksymalny silny stopień wierzchołków hipergrafu. Hipergraf nazywamy *przecinającym się*, jeśli ma taką własność, że każde dwie krawędzie są sąsiednie.

W tabeli 1 podajemy syntetyczny stan wiedzy na temat kolorowania krawędzi hipergrafów. Pokazujemy górne oszacowanie lub dokładny indeks chromatyczny oraz złożoność algorytmu znajdującego ten indeks dla pewnych klas hipergrafów.

Tabela 1

Indeks chromatyczny wybranych klas hipergrafów

Klasa hipergrafu	Indeks chromatyczny	Złożoność	Źródło
Ogólne	$\chi'(H) \le 2\Delta(H)-1$	NP-trudne	[3]
Ogólne	$\chi'(H) \le \lfloor 1{,}5\Delta(H) \rfloor$*	NP-trudne	[3]
Proste	$\chi'(H) \le \lceil 1{,}5n-2 \rceil$	NP-trudne	[2]
Proste	$\chi'(H) \le n$*	NP-trudne	[4]
Proste	$\chi'(H) \le \Delta_S(H)+1$*	NP-trudne	[1,6]
Proste przecinające się	$\chi'(H) = m \le \Delta_S(H)+1$	$O(m)$	[6]
Bez 2-krawędzi	$\chi'(H) \le \lfloor 1{,}5\Delta(H) \rfloor -2$	?	[3]
Przecinające się	$\chi'(H) = m \le \lfloor 1{,}5\Delta(H) \rfloor$	$O(m)$	[3]
r-jednorodne hipergrafy pełne, r dzieli n	$\chi'(H) = \Delta(H)$	$O(m)$	[1]
Hiperdrzewa	$\chi'(H) = \Delta(H)$	$O(m)$	[14]

* hipoteza

3. Kolorowanie wierzchołków

Przez pojęcie *k-pokolorowania* hipergrafu $H = (V,E)$ rozumiemy funkcję $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ taką, że dla każdej krawędzi $e \in E$ zachodzi $|\{c(v): v \in e\}| \ge 2$. Innymi słowy kolorujemy graf w taki sposób, że żadna krawędź nie jest monochromatyczna. Zauważmy, iż nie ma sensu mówić o kolorowaniu hipergrafów, które mają 1 - krawędzie, ponieważ takiego hipergrafu z definicji nie dałoby się pokolorować. Dlatego w tym punkcie będziemy rozważać tylko hipergrafy bez 1-krawędzi. *Liczbą chromatyczną* $\chi(H)$ hipergrafu H nazywamy takie minimalne k, że istnieje k-pokolorowanie hipergrafu.

Model taki pozwala nam przedstawić wspomniany w drugim paragrafie wstępu problem rozmieszczania odczynników chemicznych w magazynach oraz minimalizacji ilości pomieszczeń. Przyjmijmy, że każda substancja chemiczna reprezentowana jest przez wierzchołek w hipergrafie H. Jeśli pewna grupa odczynników potencjalnie reaguje ze sobą, to tworzymy z nich krawędź. Poprawne pokolorowanie takiego hipergrafu mówi nam jak rozmieścić odczynniki, by nie zachodziło ryzyko niekontrolowanej reakcji. Znalezienie liczby chromatycznej daje nam wiedzę na temat tego, jaka jest minimalna ilość boksów w magazynie. Podobny problem postawiony został w [5].

Zauważmy, że 2-jednorodne hipergrafy to zwykłe grafy, wtedy także kolorowanie definiuje zwykłe kolorowanie grafów. Możemy zatem bez wahania stwierdzić, że problem kolorowania wierzchołków hipergrafu, jako uogólnienie problemu zwykłego kolorowania grafów, jest NP-trudny. Dodatkowo Lovasz [13] już w 1973 roku pokazał, że problem sprawdzenia, czy 3-jednorodny hipergraf jest 2-barwny jest NP-trudny. Z kolei Phelps i Rodl [15] udowodnili, że problem k-kolorowalności, nawet dla prostych hipergrafów r-jednorodnych, jest NP-trudny dla $r\geq 3$. M. Krivelevich i B. Sudakov [12] pokazali, że dla pewnego ustalonego $r\geq 3$ nie da się przybliżyć liczby chromatycznej r-jednorodnych hipergrafów z czynnikiem $n^{1-\varepsilon}$ dla pewnego ustalonego $\varepsilon\geq 0$ w wielomianowym względem n czasie.

Kosztem pokolorowania lub *sumą chromatyczną* hipergrafu $H=(V,E)$ nazywamy $\Sigma_{v\in V}c(v)$, gdzie c jest pokolorowaniem. *Minimalnym pokolorowaniem* nazywamy pokolorowanie c, które spełnia $\Sigma_{v\in V}\ c(v)=\min_{c'\in F}\ (\Sigma_{v\in V}\ c'(v))$, gdzie F to zbiór wszystkich możliwych pokolorowań hipergrafu H. Sumę użytych kolorów potrzebnych do minimalnego pokolorowania hipergrafu H nazywamy *wierzchołkową sumą chromatyczną*. Oznaczamy ją przez $\Sigma(H)$.

W tabeli 2 pokazujemy wartości liczby chromatycznej oraz sumacyjnego indeksu chromatycznego dla pewnych wybranych klas hipergrafów, oraz złożoność algorytmów uzyskujących takie pokolorowanie.

Tabela 2

Liczba chromatyczna i sumacyjna liczba chromatyczna wybranych klas hipergrafów

Klasa hipergrafów	Liczba chromatyczna	Złożoność	Suma chromatyczna	Złożoność
Hiperdrzewa	2	$O(n)$	$n+1\leq\Sigma(H)\leq\lfloor 1{,}5n\rfloor$	$O(n)$
Hiperdrogi proste	2	$O(n)$	$\Sigma(H)=\lfloor 1.5(m+1)\rfloor+n-m-1$	$O(n)$
Hipercykle	2, 3	$O(n)$	$n+1\leq\Sigma(H)\leq n+\lfloor n/2\rfloor$	?
Hiperkoła	2, 3, 4	?	$n+1\leq\Sigma(H)\leq n+\lfloor (n-1)/2\rfloor+5$	?
Pełne	n	$O(n)$	$\Sigma(H)=(n-1)n/2$	$O(n)$
Pełne, r-jednorodne	$\lceil n/(r-1)\rceil$	$O(n)$	$\Sigma(H)=0{,}5(r-1)\chi(H)(\chi(H)-1)-\chi(H)(n \bmod (r-1))$	$O(n)$
Planarne	$\chi(H)\leq 4$	NP-trudne		

4. Kolorowanie hipergrafów mieszanych

Pewnym uogólnieniem wierzchołkowego kolorowania hipergrafów jest kolorowanie hipergrafów mieszanych. Problem ten znajduje wiele zastosowań zarówno przy rozwiązywaniu innych problemów teoretycznych, jak i praktycznych.

Hipergraf mieszany $H=(V,C,D)$ to trójka taka, że V jest zbiorem wierzchołków, a C i D są rodzinami podzbiorów zbioru V. Elementy zbiorów C i D nazywać będziemy odpowiednio *C-krawędziami* i *D-krawędziami*. *Poprawne k-pokolorowanie* $c: V \rightarrow \{1, ..., k\}$ hipergrafu mieszanego $H=(V,C,D)$, to takie przydzielenie kolorów wierzchołkom, że:

- każda C-krawędź zawiera co najmniej dwa wierzchołki tego samego koloru (*common*);
- każda D-krawędź zawiera co najmniej dwa wierzchołki różnego koloru (*different*).

O zbiorze wierzchołków $Y \subset V$ mówimy, że jest *monochromatyczny*, jeśli wszystkie wierzchołki z Y są jednego koloru, a jeśli każdy wierzchołek jest innego koloru, to mówimy o takim zbiorze, że jest *polichromatyczny*. Zauważmy, że nie ma sensu mówić o krawędziach wymiaru 1 w hipergrafach mieszanych, ponieważ zarówno kolorowanie D-krawędzi, jak i C-krawędzi wymaga przynajmniej dwóch wierzchołków. Dlatego w dalszej części rozdziału będziemy przyjmować, że krawędzie są przynajmniej dwuelementowe.

Ścisłe k-pokolorowanie to takie pokolorowanie, w którym wszystkie kolory $1,...,k$ zostały użyte. Jeśli graf posiada przynajmniej jedno pokolorowanie, to mówimy, że jest *kolorowalny*, w przeciwnym wypadku mówimy o nim, że jest *niekolorowalny*. *Górna liczba chromatyczna* $\overline{\chi}(H)$ to największa możliwa liczba kolorów jaką dany hipergraf można ściśle pokolorować. *Dolna liczba chromatyczna* $\chi(H)$ to najmniejsza możliwa liczba kolorów jaką hipergraf można ściśle pokolorować. Jeśli rozpatrzymy sytuację $H=(X,\emptyset,D)$, to będzie to zwyczajne kolorowanie hipergrafu.

Niech r_k oznacza liczbę możliwych k-pokolorowań hipergrafu, przy czym dwa pokolorowania, które dzielą wierzchołki na te same podzbiory, traktujemy jak jedno. Wtedy *spektrum chromatyczne* będzie wektorem postaci $R(H)=(r_1,...,r_n)$. Wektorowi temu odpowiadać będzie *zbiór dopuszczalny* $S(H)$, na który składać się będą wszystkie k takie, że $r_k > 0$. Innymi słowy, $S(H)$ to taki zbiór liczb k, że istnieje k-ścisłe pokolorowanie hipergrafu mieszanego. Zbiór dopuszczalny, o ile istnieje, zawsze będzie kształtował się następująco: $S(H) = \{\chi(H),....,\overline{\chi}(H)\}$. Oczywiście w przypadku, gdy graf nie zawiera D-krawędzi, to $\chi(H) = 1$. Podobną obserwację można poczynić dla sytuacji, gdy hipergraf H nie zawiera C-krawędzi, wtedy $\overline{\chi}(H) = n$.

Problem znajdowania górnej liczby chromatycznej hipergrafów mieszanych jest NP-trudny nawet dla grafów postaci $H=(V,C,\emptyset)$ [10]. Do kolorowania hipergrafów mieszanych można zredukować wiele problemów teoretycznych, takich jak szukanie liczb Ramseya, czy listowe kolorowanie grafów [16].

Pierwotnie uważano, że zbiór dopuszczalny dla każdego hipergrafu mieszanego jest ciągły, a więc jest przedziałem liczb naturalnych $[\chi(H), \overline{\chi}(H)]$. Faktycznie na pierwszy rzut oka przypuszczenie takie wydaje się prawdzie. Własność taka zachodzi dla wielu klas hipergrafów, ale nie dla wszystkich. Co więcej zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. [8] *Skończony zbiór liczb naturalnych jest zbiorem dopuszczalnym pewnego hipergrafu mieszanego wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera on* 1 *lub jest ciągłym przedziałem zawierającym* 1 *w swoim zbiorze dopuszczalnym.*

Bihipergrafem nazywamy mieszany hipergraf taki, że $C=D$. Hipergraf jest *przedziałowy*, jeśli da się ustawić jego wierzchołki w takim porządku, że każda krawędź jest przedziałem w tym porządku.

W tabeli 3 podajemy jak kształtuje się spektrum chromatyczne dla pewnych wybranych klas grafów.

Tabela 3

. Spektrum chromatyczne różnych klas hipergrarfów

Klasa hipergrafów	Spektrum chromatyczne	Źródło
Ogólne	może być nieciągłe	
Bihipergrafy r-jednorodne	może być nieciągłe	[8]
Planarne	może być nieciągłe	[9]
Przedziałowe	ciągłe	[8]
Hiperdrzewa	ciągłe	[10]
Unicykliczne	ciągłe	[11]
Ogólne n<6	ciągłe	[8]

LITERATURA

1. Berge C.: On the chromtaic index of linear hypergraph and the Chvatal conjecture. Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference, Ann. New York Acad. Sci, New York 1985, p. 40–44.
2. Chang W. I., Lawler E. L.: Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdös. Faber and Lovasz. Combinatorica 8, 1988, p. 293–295.
3. Dvořák T.: Chromatic index of hypergraphs and Shannon's theorem. Europ. J. Combinatorics 21, 2000, p. 585–591.
4. Erdös P.: Problems and results in graph theory and combinational analysis. Proc. Fifth British Comb. Conf., Congr. Numeratium 15 Winnipeg: Utilitas Mathematica, 1976, p. 169–192.
5. Fiedorowicz A.: Kolorowanie hipergrafów a problem składowania odpadów. praca magisterska napisana na Uniwersytecie Zielonogórskim.
6. Furedi Z.: The chromatic index of simple hypergraphs. Graphs and Combinatorics 2, 1986, p. 89–92.
7. Giaro K., Kubale M.: Chromatic scheduling of 1- and 2-processor UET tasks on dedicated machines with availability constrains. Lecture Notes in Computer Science 3911, 2006.
8. Jiang T., Mubayi D., Tuza Z., Voloshin V., West D.: The chromatic spectrum of mixed hypergraphs. Graphs and Combinatorics 18, 2002, p. 309–318.
9. Kobler D., Kündgen A.: Graps in the chromatic spectrum of face-constrained plane graphs. Electron J. Combin. 8, 2001, N3.

10. Král D., Kratochvil J., Proskurowski A., Voss H.: Coloring mixed hypertrees. Lecture Notes in Computer Science 1928, 2000, p. 279–289.
11. Král D., Kratochvil J., Proskurowski A., Voss H.: Mixed hypercacti. Discrete Mathematics 286, 2004, p. 99–113.
12. Krivelevich M., Sudakov B.: Approximate coloring of uniform hypergraphs. Journal of Algorithms 49, 2003, p. 2–12.
13. Lovász L.: Coverings and colorings of hypergraphs. Proc. 4th S.E. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilitas Math., 1973, p. 3–12.
14. Obszarski P., Dąbrowski J.: Hipergrafowy model szeregowania w rozrzedzonych systemach zadań wieloprocesorowych. Zeszyty Naukowe Wydziału ETI Politechniki Gdańskiej, przyjęte do druku, 2006.
15. Phelps K., Rödl V.: On the algorithmic complexity of coloring simple hypergraphs and Steiner triple systems. Combinatorica 4 ,1984, p. 79–88.
16. Voloshin V. I.: Coloring Mixed Hypergraphs: Theory, Algorithms and Applications. American Mathematical Society, 2002.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ewa Dudek-Dyduch

Abstract

A hypergraph $H=(V,E)$ consists of a set V of vertices and a family E of nonempty subsets of V called edges. In this paper we discuss a few models of coloring of hypergraphs. A coloring is a function $c: B \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$, where B is the set of vertices or the set of edges of H. Thus we can treat colors as positive integers.

The first model considered is the edge coloring problem. Analogously to graphs we color the edges of a hypergraph in such a way that no two intersecting edges have the same color. The aim is to find the minimal number of colors (chromatic index) or to find a coloring that minimizes the sum of colors. We present known facts and conjectures about upper bounds for the chromatic index and the complexity of algorithms for finding it. This model finds its application in the multiprocessor task scheduling problem.

The second model is the vertex coloring problem. In this model we assign colors to vertices in such a way that each edge contains at least two vertices in different colors. We present results on the chromatic number and the complexity of coloring algorithms for some kinds of hypergraphs. This model can be used in simulation of the problem of location in a chemical warehouse.

Finally, the last model considered is coloring of mixed hypergraphs $H=(V,C,D)$. In this model we have the edges of two kinds. C-edges have a property that while colored they have to contain at least two vertices in the same color. D-edges require at least two vertices in different colors. In this case the coloring is most complicated, because it is nontrivial to find the highest and the lowest number of colors needed. Also, it is nontrivial to decide if a mixed hypergraph can be colored with the number of colors between the highest and lowest possible value. If this is impossible, we say that a hypergraph has a gap in the chromatic spectrum. We present some results on the chromatic spectrum for different classes of hypergraps.