ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985
Seria: Energetyka z. 91 Nr kol. 856

Janusz WALCZAK
Instytut Techniki Cieplnej i Silników Spalinowych
Politechniki Poznańskiej

ROZKŁADY PRĘDKOŚCI I NAPRĘŻENIA STYCZNE NA ŚCIANCE TRÓJWYMIAROWEJ TURBULENTNEJ WARSTWY PRZYŚCIENNEJ W PRZEPŁYWIE PRZEZ RÓWNOLEGŁOTARCZOWY DYFUZOR BEZŁOPATKOWY

Streszczenie: W pracy autora [8] doświadczalne rozkłady prędkości, dla trójwymiarowej warstwy przyściennej, występujące w równoległotarczowym dyfuzorze bezłopatkowym, aproksymowano odpowiednimi wzorami potęgowymi. Na podstawie tych rozkładów potęgowych oraz formuły Ludwiega i Tillmanna, opracowanej dla dwuwymiarowych warstw przyściennych, wyznaczono lokalne współczynniki tarcia na ściance. W poniższym artykule dokonano oceny w jakim stopniu, ustalone przez autora, potęgowe rozkłady prędkości dla trójwymiarowej warstwy przyściennej spełniają uniwersalne rozkłady prędkości. Skorzystano tutaj z pracy Pierca i Zimmermanna [5], którzy wykazują, że również w trójwymiarowej warstwie przyściennej obowiązują rozkłady uniwersalne prędkości w postaci jak dla warstw dwuwymiarowych. Z przeprowadzonej tutaj analizy wynika, że przyjęte potęgowe rozkłady prędkości i wyznaczone z nich lokalne współczynniki tarcia ścianki [8], dla zakresu liczb Reynoldsa występujących w dyfuzorach bezłopatkowych sprężarek i dmuchaw promieniowych, wykazują dość dobrą zgodność z uniwersalnym, logarytmicznym rozkładem prędkości.

Oznaczenia:

- A - parametr,
- b - szerokość dyfuzora,
- $C, D, \varkappa$ - stałe w uniwersalnym rozkładzie prędkości,
- c - prędkość wypadkowa, lokalna,
- $c_{f_0}' = 2\tau_0/\rho c_{max}^2$ - lokalny współczynnik tarcia ścianki,
- $c^+ = c/v_*$ - bezwymiarowa prędkość wypadkowa w trójwymiarowej warstwie przyściennej,
- $H_x = \delta_x^*/\delta_x^{**}$ - parametr kształtu,
- Re - liczba Reynoldsa,
- $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ - prędkość dynamiczna,
- y - współrzędna prostopadła do ścianki,
- $\bar{y} = 2y/b$ - bezwymiarowa odległość od ścianki,
- $y^+ = y v_*/\nu$ - bezwymiarowa odległość od ścianki w uniwersalnym rozkładzie prędkości,
- α - kąt przepływu,
- ρ - gęstość,
- τ_0 - naprężenie styczne na ściance,
- ν - kinematyczny współczynnik lepkości.

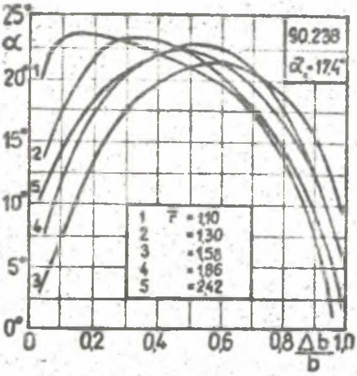
1. Wprowadzenie

Praca dotyczy przepływu w równoległotarczowym dyfuzorze bezłopatkowym sprężarki promieniowej. Przepływ ten jest trójwymiarowy ponieważ kąty w strumieniu zmieniają się, idąc od ścianki do środka kanału, a warstwy przyścienne wypełniają całą szerokość dyfuzora - rys.1. Warstwy przyścienne są na ogół niesymetryczne po szerokości kanału, a punkt maksymalnych prędkości i kątów przesuwa się od jednej ścianki do drugiej idąc wzdłuż drogi przepływu, pojawiają się oderwania strumienia od ścianki a symetria przepływu występuje tylko na niektórych promieniach dyfuzora.

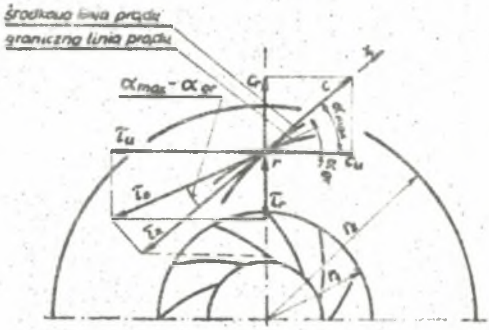
Na podstawie analizy obszernych badań własnych [8,9] przyjęto model teoretyczny przepływu, który zasadniczo charakteryzuje się tym, że rozkłady prędkości są symetryczne po szerokości dyfuzora a oderwania nie występują. Straty wyznaczone teoretycznie dla takiego modelu porównano ze stratami w przepływie rzeczywistym, wyznaczając wpływ warunków napływu i oderwań na ich wielkość [8]. Dla powyższego teoretycznego modelu przepływu opracowano funkcje rozkładów prędkości dla składowej promieniowej i obwodowej, będące modernizacją funkcji Jansena [2]. Modernizacja tych funkcji polegała na wprowadzeniu parametru, który uzależniał te rozkłady od średniego kąta przepływu, mającego szczególnie istotny wpływ na rozkład składowej promieniowej prędkości [8,9]. Tym parametrem okazał się kąt strumienia tuż przy ściance, na granicznej linii prądu, zwany tutaj kątem granicznym α_{gr} - rys.2. Wartość tego kąta, w zależności od średniego kąta przepływu, została wyznaczona w badaniach przeprowadzonych przez autora [8,9]. Zmodernizowane rozkłady prędkości zostały porównane z profilami uzyskanymi z badań, dla tych przypadków kiedy zachowana była w przybliżeniu symetria profilu po szerokości kanału, uzyskując dobrą zgodność.

Powyższe aproksymowane rozkłady prędkości użyto do wyznaczenia lokalnych współczynników tarcia w oparciu o formułę Ludwiega i Tillmanna [4], słuszną dla dwuwymiarowej warstwy przyściennej. Formułę tę zastosowano dla rozkładu prędkości w płaszczyźnie linii prądu w środku kanału /zgodnie z sugestiami Johnstona [3]/, biegnącej pod kątem α_{max} /rys.2/, wyznaczając lokalne współczynniki tarcia c'_{fx}. Znając kąty α_{max} i α_{gr} [8,9] można określić naprężenie styczne τ_c w kierunku granicznej linii prądu i lokalny współczynnik tarcia c'_{fo}. Tak wyznaczone naprężenia styczne i rozkłady prędkości zostały wykorzystane w metodzie określania strat dyfuzora [8].

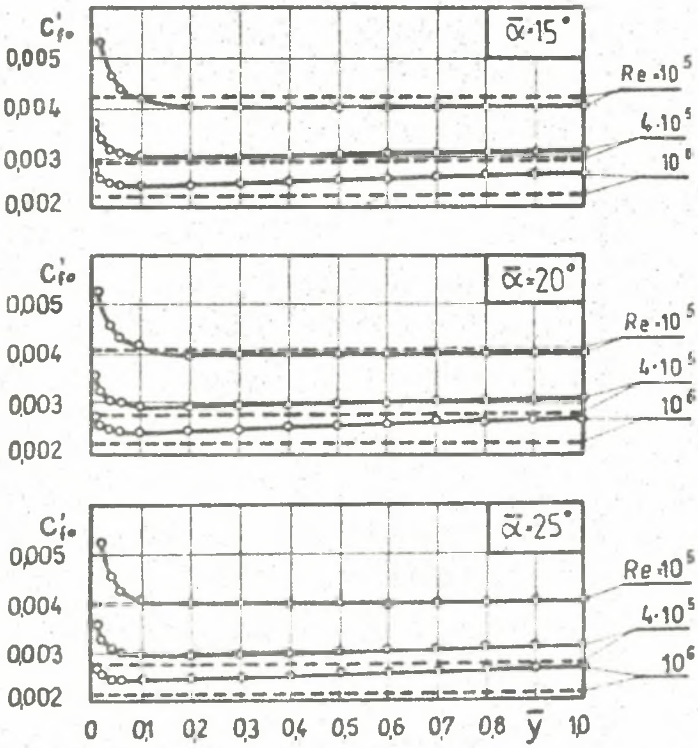
Stosując taką drogę postępowania należy stwierdzić poprawność aproksymacji rozkładów prędkości. Aproksymacja będzie poprawna jeśli rozkłady prędkości będą zgodne z rozkładami uniwersalnymi, które, jak wykazał Pierce i Zimmerman [5], obowiązują również w trójwymiarowej warstwie przyściennej. Ponieważ w formule Ludwiega i Tillmanna występują miary liniowe straty strumienia masy δ_x^{*}, pędu δ_x^{**} i parametr kształtu $H_x = \delta_x^{*}/\delta_x^{**}$, a o ich wielkości decyduje głównie rozkład prędkości w rdzeniu turbuletnym, zatem rozkład prędkości powinien przede wszystkim spełniać rozkład uniwersalny - logarytmiczny lub pojedynczą formułę Spaldinga [7] - w obszarze turbulentnym. Można też zagadnienie odwrócić, wyznaczając lokalny współczynnik tarcia c'_{fo} z przyjętych rozkładów prędkości i rozkładu uniwersalnego, i porównać z wartościami c'_{fo} uzyskanymi z formuły Ludwiega i Tillmana. Obydwa te porównania zostaną tutaj przedstawione.



Rys. 1. Przykładowe rozkłady kątów przepływu α wzdłuż szerokości dyfuzora na różnych promieniach r̄



Rys. 2. Naprężenia styczne na ściance dyfuzora



Rys. 3. Porównanie lokalnych współczynników tarcia ścianki c_{f0} wyznaczonych z rozkładów prędkości (6) i formuły Ludwiega i Tillmanna (-----) oraz z uniwersalnych rozkładów prędkości (1) (———)

2. Podstawowe zależności

Formuła Spaldinga zostanie zapisana dla modelu Prahlada [6], używając prędkość wypadkową c, bez względu na kierunek, czyli nie sprowadzając trójwymiarowej warstwy przyściennej do dwuwymiarowej

$$y^+ = c^+ + D\left[e^{\varkappa c^+} - 1 - \varkappa c^+ - \frac{1}{2}(\varkappa c^+)^2 - \frac{1}{6}(\varkappa c^+)^3\right] \tag{1}$$

Wartości stałych $\varkappa$ i C przyjęto według Colesa [1]

$$\varkappa = 0{,}41\ ,\ C = 5{,}0\ ,\ D = e^{-\varkappa C} \tag{2}$$

Bezwymiarowe wielkości c^+ i y^+ zostaną wyrażone przez przyjęte rozkłady prędkości i lokalne współczynniki tarcia c'_{fo} [9]

$$\frac{c_r}{c_{r,max}} = \left[1 - A(1-\bar{y})^2\right]\bar{y}^{1/10} \tag{3}$$

$$\frac{c_u}{c_{u,max}} = \bar{y}^{1/10} \tag{4}$$

Parametr A w równaniu [3], związany jest z kątem granicznej linii prądu α_{gr} i zależy od średniego kąta przepływu $\bar{\alpha}$, został przez autora wyznaczony doświadczalnie [8]

$$A = 1 - \frac{tg\,\alpha_{gr}}{tg\,\alpha_{max}} = f(\bar{\alpha}) \tag{5}$$

Prędkość wypadkowa c, jako suma składowej promieniowej (3) i obwodowej (4), wykorzystując zależności geometryczne z rys.2, wynosi

$$\frac{c}{c_{max}} = \left\{\left[1 - A(1-\bar{y})^2\right]\sin^2\alpha_{max} + \cos^2\alpha_{max}\right\}^{1/2}\bar{y}^{1/10} \tag{6}$$

Lokalny współczynnik tarcia ścianki c'_{fo}, dla kierunku granicznej linii prądu określonej kątem α_{gr} (rys.2), zdefiniowany jest następująco

$$c'_{fo} = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\varrho c^2_{max}} \tag{7}$$

Wprowadzając do tego wzoru prędkość dynamiczną $v_*^2 = \tau_o/\varrho$, otrzymuje się

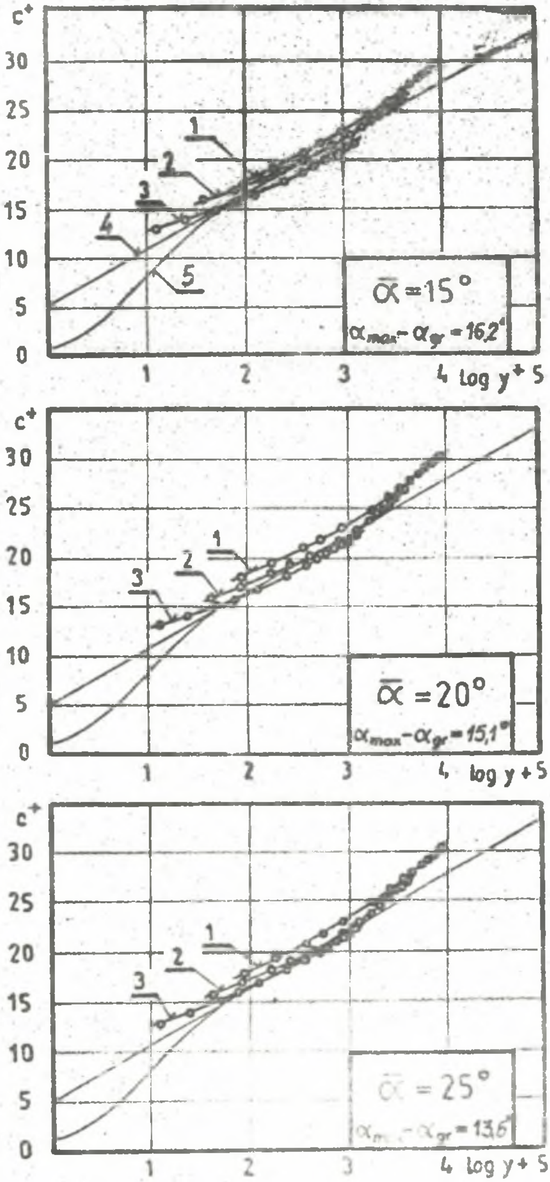
$$v_* = c_{max}\sqrt{\frac{c'_{fo}}{2}} \tag{8}$$

Używając tej zależności, bezwymiarowa prędkość z równania (1), obliczona będzie następująco

$$c^+ = \frac{c}{c_{max}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c'_{fo}}{2}}} \tag{9}$$

Wprowadzając do bezwymiarowej odległości od ścianki y^+ zależność [8], otrzymuje się

$$y^+ = \frac{y\,v_*}{\nu} = Re_y\sqrt{\frac{c'_{fo}}{2}} \tag{10}$$



Rys. 4. Bezwymiarowe rozkłady prędkości dla trójwymiarowych warstw przyściennych w równoległotarczowym dyfuzorze bezłopatkowym dla różnych średnich kątów przepływu $\bar{\alpha}$ i liczb Reynoldsa Re_1. Krzywa: 1 - $Re_1 = 10^6$; 2 - $Re_1 = 4 \cdot 10^5$; 3 - $Re_1 = 10^5$; 4 - logarytmiczny rozkład prędkości; 5 - według formuły Spaldinga (1)

gdzie przez liczbę Reynoldsa Re_y oznaczono

$$Re_y = \frac{y\, c_{max}}{\nu} \tag{11}$$

którą powiązano z liczbą Reynoldsa

$$Re = \frac{c_{max} \cdot 2b}{\nu} \tag{12}$$

stąd

$$Re_y = \frac{y \cdot c_{max}}{\nu} = \frac{c_{max} \cdot 2b}{\nu} \cdot \frac{y}{2b} = \frac{Re}{4}\,\bar{y} \tag{13}$$

Poza tym liczbę Re powiązano z liczbą Reynoldsa opartą na średniej prędkości przepływu $\bar{\bar{c}}$, używaną w pracy [9]- $Re_1 = 2b\bar{\bar{c}}/\nu$.

Ostatecznie bezwymiarowa odległość y^+ wyliczona będzie następująco

$$y^+ = \frac{Re}{4}\,\bar{y}\,\sqrt{\frac{c'_{fo}}{2}} \tag{14}$$

Wyznaczone w powyższy sposób bezwymiarowe wielkości c^+ i y^+ naniesiono na wykres i porównano z logarytmicznym rozkładem prędkości i formułą Spaldinga - rys.4.

Odwracając teraz zagadnienie lokalne współczynniki tarcia można wyznaczyć z formuły Spaldinga, wykorzystując przyjęty rozkład prędkości (6) . Mnożąc równanie (1) przez c^+, lewa strona przyjmie postać

$$c^+ y^+ = \frac{c}{v_*} \cdot \frac{y\, v_*}{\nu} = \frac{yc}{\nu} \tag{15}$$

i dalej

$$\frac{cy}{\nu} = \frac{c}{c_{max}} \cdot \frac{y\, c_{max}}{\nu} = \frac{c}{c_{max}} \cdot Re_y = \frac{c}{c_{max}} \cdot \frac{Re}{4} \cdot \bar{y} \tag{16}$$

Ostatecznie formułę Spaldinga można zapisać następująco

$$\frac{c}{c_{max}} \cdot \frac{Re}{4}\,\bar{y} = (c^+)^2 + c^+ D\left[e^{\varkappa c^+} - 1 - \varkappa c^+ - \frac{1}{2}(\varkappa c^+)^2 - \frac{1}{6}(\varkappa c^+)^3\right] \tag{17}$$

Z rozwiązania tego równania otrzymuje się c^+, a wykorzystując zależność (9) można wyliczyć c'_{fc}. Tak wyznaczone lokalne współczynniki tarcia zostaną porównane z wartościami uzyskanymi z formuły Ludwiega i Tillmanna w pracy [9] - rys.3.

3. Wyniki obliczeń i wnioski

Obliczenia przeprowadzono dla zakresu liczb Reynoldsa $Re_1 = 10^5 \div 10^6$ i średniego kąta przepływu $\bar{\alpha} = 5^\circ \div 90^\circ$. Tutaj przedstawiono wyniki dla $\bar{\alpha} = 15^\circ \div 25^\circ$, to jest wartości najczęściej występujących w sprężarkach i dmuchawach - rys. 3 i 4. Kolejne punkty na rys.4 dotyczą odległości od ścianki $\bar{y} = 2y/b = 0{,}01;0{,}02;0{,}06;0{,}1;0{,}2;\ldots 1{,}0$. Z rys.4 wynika, że przyjęte funkcje rozkładów prędkości (3),(4)i (6)na ogół dość dobrze pokrywają się z logarytmicznym rozkładem prędkości czy pojedynczą formułą Spaldinga dla danego zakresu liczb Reynoldsa. Jednak tuż przy ściance prędkości te są nieco za wysokie. Najlepszą zgodność uzyskano dla $Re_1 = 10^5$ i $4 \cdot 10^5$. Natomiast dla $Re_1 = 10^6$ w całym prawie zakresie przyjęte rozkłady prędkości leżą powyżej rozkładu logarytmicznego. Konsekwencją takich rozkładów jest to, że wyznaczone z nich lokalne współczynniki tarcia ścianki c'_{fo}, w oparciu o formułę Ludwiega i Tillmanna, są za duże przy małych kątach $\bar{\alpha}$ dla $Re_1 = 10^5$, natomiast za małe dla większych liczb Reynoldsa, szczególnie przy $Re_1 = 10^6$. Dla zakresu występujących w sprężarkach i dmuchawach średnich kątów przepływu $\bar{\alpha} = 10^\circ \div 35^\circ$ różnice między przyjętym rozkładem prędkości a rozkładem logarytmicznym, a w konsekwencji w lokalnych współczynnikach tarcia, sięgają od +6% przy $Re_1 = 10^5$ i $\bar{\alpha} = 10^\circ$ do -11% przy $Re_1 = 10^6$ i $\bar{\alpha} = 35^\circ$. Aproksymację rozkładów prędkości (3),(4) i (6)ustalono z badań w zakresie liczb Reynoldsa $Re_1 = 10^5 \div 4\cdot10^5$ [8], stąd też w tym zakresie uzyskano najlepszą zgodność.

W analizowanych tutaj przepływach trójwymiarowość, określona różnicą kątów w środku kanału i przy ściance $(\alpha_{max} - \alpha_{gr})$, była umiarkowana, np. dla $\bar{\alpha} = 15^\circ - (\alpha_{max} - \alpha_{gr}) \cong 16^\circ$. Analiza wskazuje, że dla tego zakresu trójwymiarowości oraz liczb Reynoldsa $10^5 \div 10^6$, przyjęte rozkłady prędkości dość dobrze są zgodne z rozkładami uniwersalnymi dla dwuwymiarowych warstw przyściennych dla obszaru rdzenia turbulentnego w pobliżu ścianki. W zewnętrznej części rdzenia turbulentnego rozkłady prędkości odbiegają od rozkładu logarytmicznego czy formuły Spaldinga. Ujawnia się tam wpływ gradientu ciśnienia, szczególnie dla $Re_1 = 10^6$ i $\bar{\alpha} > 10^\circ$.

Literatura

1. Coles D. - The law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer. Journal of Fluid Mechanics.Vol.1,1956.
2. Jansen W. - Steady Fluid in a Radial Vaneless Diffuser. Trans.of the ASME. Jorunal of Basic Engineering. September 1964,pp.607.
3. Johnston J. - On the Three-Dimensional Boundary Layer Generated by Secondary Flow. Journal of Basic Engineering. Trans.ASME, Series D,Vol.82, No 1, March 1960,p.233.
4. Ludwieg H., Tillmann W. - Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. Ing. Archiv 17/1949,288-299.
5. Pierce F.J., Zimmerman B.B. - Wall Shear Stress Inference From Two and Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Velocity Profiles. Journal of Fluids Engineering, March - 1973, Trans. ASME, p.61
6. Prahlad T.S. - Wall Similarity in Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer. AIAA Journal,Vol.6.1968.
7. Spalding D.B. - A Single Formula for the law of the Wall. Journal of Applied Mechanics.Vol.28,Trans.ASME,Vol.83,Series E,No3,Sept.1961,p.455
8. Walczak J. - Metoda obliczania przepływu czynnika nieściśliwego w równoległotarczowym dyfuzorze bezłopatkowym dla modelu z rozwiniętymi warstwami przyściennymi.Politechnika Poznańska. Rozprawy Nr 93,Poznań 1978.
9. Walczak J.,Cichoń L. - Analiza rozkładów prędkości w promieniowym dyfuzorze równoległotarczowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria - Maszyny Robocze i Pojazdy. Nr 17. Poznań,1979r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Chmielniak

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИИ
НА СТЕНКЕ ТРЁХМЕРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ПРИ ТЕЧЕНИИ ЧЕРЕЗ ПАРАЛЛЕЛЬНО-ДИСКОВОЙ БЕЗОЛОПАТОЧНЫЙ ДИФФУЗОР

Р е з ю м е

В настоящей работе автора [8] опытные распределения скоростей, для трёхмерного граничного слоя, выступающие в параллельно-дисковом безлопаточным диффузоре, аппроксимированы соответственными формулами возведения в степень. На основе этих распределений возведения степеней, а также формулы Людвига и Тильмана, разработанной для двухмерного граничного слоя, определены местные коэффициенты трения на стенке. В настоящей статье проведена оценка в какой мере универсальным распределениям скоростей соответствуют, определённые автором, степени возведения скоростей для трёхмерного граничного слоя. Мы воспользовались при этом работами Пирса и Циммермана [5], которые показывают, что также для трёхмерного граничного слоя обязывают универсальные распределения скоростей в таком же виде, как и для двухмерных слоёв.

Из проведенного здесь анализа следует, что принятые возведения в степень распределения скоростей, и определённые из них местные коэффициенты трения стенки [8], для объёма чисел Рейнольдса, выступающих в безлопаточных диффузорах центробежных компрессоров и воздуходувок, показывают хорошее согласование с универсальным (логарифмическим) законом распределения скоростей.

VELOCITY DISTRIBUTIONS AND TANGENTIAL STRESSES ON THE WALL
OF A THREE-DIMENSIONAL TURBULENT BOUNDARY LAYER IN THE FLOW
THROUGH A PARALLEL-DISK VANELESS DIFFUSER

S u m m a r y

In the author's paper [8], experimental distributions of velocity for a three-dimensional boundary layer, occurring in a parallel-disk vaneless diffuser, are approximated by corresponding power formulae. On the basis of these power distributions as well as of Ludwieg and Tillmann's formula, elaborated for the three-dimensional boundary layer, local friction coefficients on the wall are determined. Whereas in the after-mentioned paper, it is estimated to what degree power distributions of velocity for the three-dimensional boundary layer, determined by the author satisf universal distributions of velocity. Herein, Pierc and Zimmerman's work [5] has been utilized; they show that universal velocity distributions are also obligatory in the three-dimensional boundary layer in the same form as for the two-dimensional layer. It results from the herein performed analysis that the assumed power distributions of velocity and local friction coefficients of the wall [8], for the range of Reynolds number occurring in diffusers of vaneless radial compressors and blowers, are in quile good conformity with the universal logarithmic velocity distribution law.