ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 144 Nr kol.1727

Donat ORSKI
Politechnika Wrocławska

ZASTOSOWANIE ZMIENNYCH NIEPEWNYCH W OPTYMALIZACJI ROZDZIAŁU ZASOBU DLA KLASY ZALEŻNYCH OPERACJI PRODUKCYJNYCH*

Streszczenie. Praca dotyczy problemu rozdziału zasobu pomiędzy realizowane szeregowo operacje produkcyjne. Czasy wykonania operacji opisane są zależnościami relacyjnymi z nieznanymi parametrami, o których zakłada się, że są wartościami zmiennych niepewnych charakteryzowanymi przez eksperta. W pracy przedstawiono trzy sformułowania problemu optymalnego rozdziału zasobu wyróżnione ze względu na postać wymagania użytkownika, wskazano sposoby ich rozwiązania oraz podano przykłady ilustracyjne.

APPLICATION OF UNCERTAIN VARIABLES IN OPTIMIZATION OF A RESOURCE DISTRIBUTION FOR A CLASS OF DEPENDENT PRODUCTION OPERATIONS

Summary. The paper concerns a resource distribution problem in a cascade of production operations with execution times described by relations containing unknown parameters. The parameters are assumed to be values of uncertain variables characterized by an expert. The paper presents three formulations of optimal resource distribution problem for different forms of user's requirement. Solutions and examples illustrating the presented approach are included.

1. Wprowadzenie

Jeden z kierunków rozwoju problematyki opartego na wiedzy zarządzania produkcją wiąże się z zastosowaniami *zmiennych niepewnych* [4], [6], opisywanych jako specyficzna wersja *liczb rozmytych*, w systemach produkcyjnych składających się z operacji [5], [7], [8] polegających na wykonaniu określonej czynności z wykorzystaniem przydzielonego zasobu. Zależność czasu realizacji operacji od ilości przydzielonego do niej zasobu, która w klasycznym podejściu jest funkcyjna, w rozpatrywanym podejściu opartym na wiedzy ma postać relacji nie dającej się sprowadzić do funkcji. Zakłada się, że występujący w relacji nieznany parametr jest wartością zmiennej niepewnej scharakteryzowaną przez eksperta za pomocą *rozkładu pewności*

*Praca została sfinansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005 – 2007 w ramach projektu badawczego nr 3 T11A 031 28.

reprezentującego opinię eksperta na temat możliwych wartości parametru. Problem decyzyjny polega na wyznaczeniu takiego rozdziału zasobu pomiędzy poszczególne operacje, który optymalizuje kryterium związane z wymaganiem określonym przez użytkownika. Prace poświęcone problematyce alokacji zasobów na podstawie tak formułowanej wiedzy o operacjach dotyczyły głównie operacji niezależnych (np. [8], [9]), dla których rozpatrywano problem decyzyjny z *zadanym czasem wykonania* oraz z *zadanym poziomem pewności*. W pracach dotyczących operacji o strukturze szeregowej [2] formułowano i rozwiązywano dotychczas tylko pierwszy z nich.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie dla operacji szeregowych nowych rezultatów uzyskanych dla obydwu sformułowań problemu decyzyjnego, a także problemu decyzyjnego powstałego z połączenia wspomnianych dwóch problemów.

W rozdz. 2 zaprezentowano sformułowanie problemu decyzyjnego z zadanym czasem wykonania i na podstawie rozwiązania analitycznego dla szczególnego przypadku zaproponowano sposób konstrukcji dedykowanej procedury numerycznej dla przypadku nierozwiązywalnego analitycznie. Rozdział 3 przedstawia sformułowanie i analityczny algorytm rozwiązania problemu decyzyjnego z zadanym poziomem pewności oraz wynikającą z niego propozycję numeryczno-analitycznego algorytmu dla problemu z zadanym czasem wykonania. Rozważania uzupełniają przedstawione w rozdziale 4 wyniki dla połączenia problemów z rozdziałów 2 i 3.

2. Optymalizacja z zadanym czasem wykonania

Rozpatrzmy kompleks k operacji opisanych nierównościami (relacjami)

$$T_i \le \varphi_i(u_i; x_i), \quad i \in \overline{1,k}, \tag{1}$$

gdzie T_i oznacza czas wykonania i-tej operacji, u_i oznacza ilość przydzielonego zasobu, a φ_i jest znaną malejącą funkcją od u_i z nieznanym parametrem x_i. Zakłada się, że x_i jest wartością zmiennej niepewnej $\bar{x}_i$ o rozkładzie pewności $h_i(x_i)$ (rys. 1) podanym przez eksperta. Czas wykonania kompleksu operacji szeregowych

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \ . \tag{2}$$

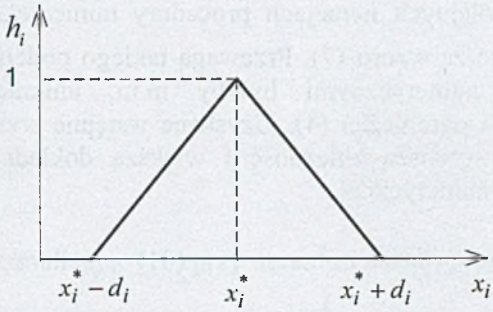
Dla całkowitej ilości zasobu U przeznaczonego do rozdziału pomiędzy k operacji rozpatrywany problem optymalizacyjny z zadanym czasem wykonania formułuje się następująco [6], [8]: Dla danych φ_i, h_i, $i \in \overline{1,k}$, U oraz wymaganego przez użytkownika czasu wykonania kompleksu operacji α należy wyznaczyć rozdział zasobu $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_k^*)$ **maksymalizujący** wskaźnik pewności tego, że wymaganie użytkownika jest w przybliżeniu spełnione

$$v(u; \alpha, U) \stackrel{\Delta}{=} v[\varphi(u; \bar{x}) \tilde{\le} \alpha], \tag{3}$$

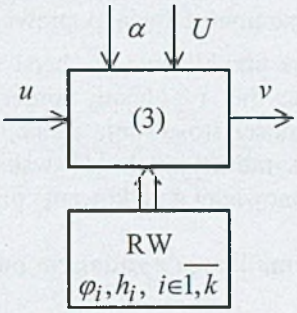
gdzie $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$, $\varphi(u; x) = \varphi_1(u_1; x_1) + \ldots + \varphi_k(u_k; x_k)$, przy ograniczeniach

$$u_1 + u_2 + ... + u_k = U, \qquad u_i > 0, \qquad i \in \overline{1,k}. \tag{4}$$

Rozpatrywany problem decyzyjny jest problemem optymalizacji statycznej obiektu z wyjściem v, wejściami u, α, U i opisem opartym na reprezentacji wiedzy RW (rys. 2).



Rys. 1. Trójkątny rozkład pewności



Rys. 2. Obiekt optymalizacji

Uzyskanie opisu (3) w przypadku operacji szeregowych [2] jest trudniejsze niż w przypadku operacji równoległych [8] i może wymagać zastosowania dekompozycji α na wartości α_i oraz wskaźników pewności $v_i(u_i;\alpha_i,U)$ $(i \in \overline{1,k})$.

Przykład 1. Dla trójkątnych rozkładów pewności (Rys. 1, $d_i \le x_i^*$) oraz $\varphi_i(u_i;x_i) = x_i u_i^{-1}$ stosując dekompozycję [3] otrzymujemy opis

$$v(u;\alpha,U) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad \alpha \le \sum_{i=1}^{k}(x_i^* - d_i)u_i^{-1} \\ 1 - (\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{u_i} - \alpha)(\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i}{u_i})^{-1} & \text{gdy} \quad \sum_{i=1}^{k}(x_i^* - d_i)u_i^{-1} \le \alpha \le \sum_{i=1}^{k} x_i^* u_i^{-1} \\ 1 & \text{gdy} \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^* u_i^{-1} \le \alpha \end{cases}, \tag{5}$$

dla którego nie istnieje rozwiązanie analityczne. Jeśli RW spełnia założenie $\frac{x_1^*}{d_1} = \frac{x_2^*}{d_2} = ... = \frac{x_k^*}{d_k} \stackrel{\Delta}{=} \gamma$, to w przypadku $0 < v(u) < 1$ dostajemy:

$$v(u;\alpha,U) = 1 - \gamma + \gamma\alpha(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{u_i})^{-1} \tag{6}$$

oraz

$$u_i^* = \sqrt{x_i^*}(\sum_{j=1}^{k}\sqrt{x_j^*})^{-1}U. \tag{7}$$

Stosowanie (7), pomimo niespełnienia dodatkowego założenia może być korzystne w przypadku eksperta charakteryzującego nieznane parametry z dużym błędem [3], natomiast w przypadku wiarygodnego eksperta lepiej wyznaczać u^* posługując się metodami numerycznymi.

Dedykowana procedura numeryczna może bazować na założeniu, że optymalizowaną funkcję (5) daje się w otoczeniu u^* dobrze przybliżać funkcją (6), której parametry będą poprawiane w kolejnych iteracjach procedury numerycznej, a kolejne przybliżenia u^* będą wyliczane ze wzoru (7). Przewagą takiego podejścia nad innymi typowymi procedurami numerycznymi byłoby m.in. uniknięcie konieczności stosowania funkcji kary dla ograniczeń (4). Uzyskane wstępne wyniki badań symulacyjnych [1] wskazują na szybszą zbieżność i większą dokładność zaproponowanej dedykowanej procedury numerycznej.

3. Optymalizacja z zadanym poziomem pewności

W sformułowaniu problemu optymalizacyjnego z zadanym poziomem pewności użytkownik wymaga, aby efekt decyzji mierzony wartością wskaźnika pewności (3) (por. rys. 2) był nie mniejszy niż zadana wartość $\overline{v}$, a celem optymalizacji jest minimalizacja czasu wykonania kompleksu operacji α. Problem można sformułować analogicznie jak dla operacji niezależnych [9]: Dla danych φ_i, h_i, $i \in \overline{1,k}$, U oraz $\overline{v}$ należy wyznaczyć rozdział zasobu $\overline{u} = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_k)$ spełniający (4) i **minimalizujący** wartość α, dla której wskaźnik pewności (3) spełnia wymaganie użytkownika, tzn.

$$v(u;\alpha,U) \geq \overline{v}. \tag{8}$$

Do rozwiązania rozpatrywanego problemu decyzyjnego można częściowo wykorzystać algorytm dla operacji niezależnych z proponowaną poniżej istotną modyfikacją uwzględniającą dekompozycję α na wartości α_i ($i \in \overline{1,k}$):

1. Dla

$$v_i[\varphi_i(u_i;\overline{x}_i) \tilde{\leq} \alpha_i] \triangleq g_i(u_i,\alpha_i)$$

wyznacz rozwiązania równań

$$g_i(u_i,\alpha_i) = \overline{v}$$

względem u_i.

2. Podstaw wyznaczone $u_i = g_i^{-1}(\alpha_i;\overline{v})$ do (4) otrzymując równanie

$$g_1^{-1}(\alpha_1;\overline{v}) + g_2^{-1}(\alpha_2;\overline{v}) + ... + g_k^{-1}(\alpha_k;\overline{v}) = U \tag{9}$$

z niewiadomymi α_i.

3. Wyznacz optymalne $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$, ..., $\overline{\alpha}_k$ minimalizując funkcję

$$f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k \tag{10}$$

przy ograniczeniu (9).

4. Wyznacz

$$\overline{u}_i = g_i^{-1}(\overline{\alpha}_i, \overline{v}), \qquad i \in \overline{1,k}.$$

Przykład 2. Dla funkcji φ_i, h_i jak w przykładzie 1 otrzymujemy:

$$g_i(u_i, \alpha_i) = 1 + \frac{\alpha_i u_i - x_i^*}{d_i} = \overline{v}, \qquad u_i = g_i^{-1}(\alpha_i; \overline{v}) = \frac{(\overline{v}-1)d_i + x_i^*}{\alpha_i}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{v}-1)d_i + x_i^*}{\alpha_i} = U. \tag{11}$$

Minimalizując (10) przy ograniczeniu (11) dostajemy:

$$\overline{\alpha}_i = \sqrt{b_i} \sum_{j=1}^{k} \sqrt{b_j} U^{-1}, \qquad \overline{\alpha} = (\sum_{i=1}^{k} \sqrt{b_i})^2 U^{-1}, \tag{12}$$

gdzie $b_i = (\overline{v}-1)d_i + x_i^*$. Wstawiając $\overline{\alpha}_i$ do g_i^{-1} wyznaczamy optymalny rozdział:

$$\overline{u}_i = \sqrt{b_i} (\sum_{j=1}^{k} \sqrt{b_j})^{-1} U. \tag{13}$$

W przeciwieństwie do problemu decyzyjnego dla danego α rozwiązanie problemu decyzyjnego dla danego $\overline{v}$ można otrzymać analitycznie.

Uzyskane wyniki analityczne można wykorzystać do opracowania algorytmu rozwiązania problemu z zadanym czasem wykonania. Proponowany algorytm oparty na (12), (13) jest następującym dwuetapowym algorytmem *numeryczno-analitycznym*:

1. Dla zadanej wartości α zastosuj procedurę numeryczną i rozwiąż równanie:

$$\alpha = (\sum_{i=1}^{k} \sqrt{(v-1)d_i + x_i^*})^2 U^{-1}$$

ze względu na v, otrzymując maksymalną możliwą wartość wskaźnika pewności dla danego α.

2. Wyznaczoną wartość $v \overset{\Delta}{=} v_{\max}$ wstaw do (13) uzyskując rozwiązanie analityczne:

$$u_i^* = \frac{\sqrt{(v_{\max}-1)d_i + x_i^*}}{\sum_{j=1}^{k} \sqrt{(v_{\max}-1)d_j + x_j^*}} U.$$

Wstępną ocenę przydatności zaproponowanego podejścia numeryczno-analitycznego przeprowadzono w [1]. Jego zaletą w porównaniu z dedykowaną procedurą numeryczną jest ograniczenie problemu numerycznego poszukiwania

rozwiązania do pojedynczej zmiennej v oraz znanego przedziału jej wartości (0,1). Zaproponowane podejście można wykorzystać także dla innych rozkładów pewności oraz postaci funkcji φ_i.

4. Optymalizacja z nieznaną ilością zasobu

Sformułowania problemów z rozdziałów 2 i 3 można połączyć przy braku założonej ilości zasobu U. W tym przypadku stanowi ona kryterium optymalizacji, a problem optymalizacyjny *z nieznaną ilością zasobu* sformułujemy następująco: Dla danych φ_i, h_i, $i \in \overline{1,k}$, α oraz $\overline{v}$ należy wyznaczyć rozdział $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, ..., \hat{u}_k)$ **minimalizujący** wartość U przy spełnieniu (4) oraz wymagania użytkownika (8). Może to oznaczać, że chcemy zaplanować wielkość nakładu na produkcję na najniższym poziomie, zapewniającym przy jego optymalnym rozdziale, spełnienie wymagań użytkowych.

Można zaproponować następujący algorytm rozwiązania rozpatrywanego problemu decyzyjnego:

1. Dla

$$v_i[\varphi_i(u_i;\overline{x}_i) \tilde{\leq} \alpha_i] \triangleq g_i(u_i, \alpha_i)$$

wyznacz rozwiązania równań

$$g_i(u_i, \alpha_i) = \overline{v}$$

względem α_i.

2. Podstaw wyznaczone $\alpha_i = g_i^{-1}(u_i;\overline{v})$ do wzoru na dekompozycję α

$$g_1^{-1}(u_1;\overline{v}) + g_2^{-1}(u_2;\overline{v}) + ... + g_k^{-1}(u_k;\overline{v}) = \alpha \tag{14}$$

z niewiadomymi u_i.

3. Wyznacz optymalne $\hat{u}_1, \hat{u}_2, ..., \hat{u}_k$ minimalizując funkcję

$$f(u_1, u_2, ..., u_k) = u_1 + u_2 + ... + u_k \tag{15}$$

przy ograniczeniu (14); $\hat{U} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + ... + \hat{u}_k$.

Przykład 3. Dla funkcji φ_i, h_i jak w przykładzie 1 otrzymujemy:

$$g_i(u_i, \alpha_i) = 1 + \frac{\alpha_i u_i - x_i^*}{d_i} = \overline{v}, \qquad \alpha_i = g_i^{-1}(u_i;\overline{v}) = \frac{(\overline{v}-1)d_i + x_i^*}{u_i}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(\overline{v}-1)d_i + x_i^*}{u_i} = \alpha. \tag{16}$$

Minimalizując (15) przy ograniczeniu (16) dostajemy

$$\hat{u}_i = \sqrt{b_i} \sum_{j=1}^{k} \sqrt{b_j} \alpha^{-1}, \qquad \hat{U} = (\sum_{i=1}^{k} \sqrt{b_i})^2 \alpha^{-1}.$$

Ze względu na identyczną postać f w (10) i (15), rozwiązania problemów z rozdziałów. 3 i 4 są w pewnym sensie analogiczne. Przy innej postaci ograniczeń (4) i/lub innej strukturze kompleksu operacji (np. szeregowo-równoległej), takiej analogii nie będzie.

5. Podsumowanie. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono trzy różne praktycznie uzasadnione sformułowania problemu optymalnego rozdziału zasobu w kompleksie operacji szeregowych opisanych za pomocą relacji z niepewnymi parametrami. Na podstawie wyników uzyskanych dotychczas dla pewnej klasy opisów zaproponowano ogólną koncepcję dedykowanej numerycznej procedury rozwiązania problemu decyzyjnego *z zadanym czasem wykonania*. Zaproponowano algorytm rozwiązania sformułowanego w pracy problemu decyzyjnego z *zadanym poziomem pewności*, w którym wykorzystano dekompozycję opracowaną dla operacji szeregowych. Uzyskany wynik stał się podstawą zaproponowanego w pracy numeryczno-analitycznego algorytmu rozwiązania problemu decyzyjnego z *zadanym czasem wykonania*. Prezentowane nowe rezultaty zostały uzupełnione o sformułowanie i algorytm rozwiązania problemu decyzyjnego, w którym wyznaczana jest najmniejsza ilość zasobu wystarczająca do spełnienia wymagań użytkownika, tzn. minimalizowany jest koszt produkcji.

Wyniki wstępnej oceny zaproponowanych podejść nieanalitycznych przedstawione w [1] wskazują na ich szybką zbieżność i dużą dokładność. W przyszłych pracach rozważania można rozszerzyć na kompleksy operacji o strukturze szeregowo-równoległej, na przykład w zastosowaniu do pewnej klasy systemów transportowych z jednostkami produkcyjnymi [7], a także uwzględnić praktycznie ważne przypadki, w których nieznane parametry modeli niektórych operacji są wartościami zmiennych losowych.

LITERATURA

1. Hojda M., Orski D.: Metody nieanalityczne w ekspertowym systemie decyzyjnym dla kompleksu operacji szeregowych z niepewnymi parametrami. Mat. 6 Krajowej Konferencji „Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe", Wrocław 2006, s. 115-124.
2. Orski D.: Quality of cascade operations control based on uncertain variables. Artificial Life and Robotics, vol.9, no.1, 2005, p. 32-35.
3. Orski D.: Application of uncertain variables to planning resource allocation in a class of research projects. Proc. 18th International Conference on Systems Engineering, IEEE CS Press, Los Alamitos 2005, p. 238-243.
4. Bubnicki Z.: Uncertain Logics, Variables and Systems. Springer-Verlag, Berlin, London, New York 2002.

5. Bubnicki Z.: Learning algorithms and uncertain variables for a class of knowledge-based assembly systems. M. H. Hamza (ed) Modelling, Identification and Control, Acta Press, Zurich 2002, p. 529-534.
6. Bubnicki Z.: Analysis and Decision Making in Uncertain Systems. Springer-Verlag, Berlin, London, New York 2004.
7. Bubnicki Z.: Application of uncertain variables to knowledge-based decision making in a class of production systems. Proc. 18th International Conference on Production Research, Salerno, Italy, 2005.
8. Bubnicki Z.: On allocation problems for a complex of parallel operations described by uncertain variables. Foundations of Computing and Decision Sciences, vol.30, no.2, 2005, p. 77-90.
9. Bubnicki Z.: Optimization of a class of uncertain systems based on uncertain variables. R. Moreno Díaz, F. Pichler, A. Quesada Arencibia (eds) Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2005. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, vol. 3643, 2005, p. 38–43.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Świerniak

Abstract

The paper concerns a resource distribution problem for a complex of production operations of cascade structure. Each operation is described by a relation between its execution time and an amount of a resource allocated to this operation. The relations contain unknown parameters, which are assumed to be values of uncertain variables characterized by an expert. For such a knowledge representation, the decision problem consists in finding an optimal distribution of total amount of a resource among operations as to satisfy a user's requirement. In the paper, three formulations of optimal resource distribution problem have been presented for three different forms of a user's requirement, and possibilities of finding analytical and/or numerical solution algorithms have been discussed. New results include: the concept of a specific numerical algorithm and the numerical-analytical algorithm for the problem with a required execution time as well as the analytical algorithm based on decomposition for the problem with a given certainty threshold.