ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 144 Nr kol. 1727

Rafał SZKLARCZYK
Politechnika Śląska

MDMGVRP - NOWY WARIANT PROBLEMU MARSZRUTYZACJI POJAZDÓW. CZĘŚĆ 1 - SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Streszczenie. W artykule krótko scharakteryzowano problem marszrutyzacji pojazdów (ang. VRP), następnie sformułowano nowy wariant problemu: problem marszrutyzacji pojazdów z wieloma magazynami i wieloma asortymentami (MDMGVRP). Wiele odmian VRP stanowi szczególny przypadek MDMGVRP. Publikacja niniejsza zawiera opis nowego wariantu oraz model matematyczny.

MDMGVRP - A NEW VARIANT OF VEHICLE ROUTING PROBLEM. PART 1 - DEFINITION

Summary. The paper presents a short introduction to VRP and a definition of MDMGVRP, a new variant of VRP. A mathematical model of MDMGVRP is presented and discused. The paper serves as introduction to the paper "MDMGVRP - a new variant of vehicle routing problem. Part 2 - the CLP solution".

1. Wstęp

Ogólnie problem marszrutyzacji pojazdów *(ang. VRP - vehicle routing problem)* polega na znalezieniu jak najkrótszych dróg dla floty ciężarówek o określonej ładowności, mających odwiedzić zadaną liczbę miast (lokalizacji klientów) w celu dostarczenia lub pobrania zadanej liczby jednostek towaru. Odległości pomiędzy miastami są dane. Zadanie należy rozwiązać tak, aby nie przekroczyć ładowności pojazdów i zaspokoić zapotrzebowania klientów.

1.1. Klasyfikacja problemów VRP

VRP występuje w wielu wariantach. Nazwy poszczególnych wariantów VRP są tworzone w wyniku dodawania do VRP przedrostków, np. CVRP. Można tu wymienić takie jak:

- **Capcitated Vehicle Routing Problem (CVRP)** - homogeniczny wariant VRP (z jednakowymi ciężarówkami).

- **Multiple Depot VRP (MDVRP)** - dostawy są dokonywane z wielu magazynów.
- **VRP with Time Windows (VRPTW)** - do klientów są przypisywane "okna czasowe" (czas startu, czas zakończenia, czas obsługi). Zgłoszenia muszą być obsłużone zgodnie z określonymi chwilami czasu.
- **Stochastic VRP (SVRP)** - jeśli któraś ze składowych problemu zachowuje się stochastycznie.
- **Periodic VRP (PVRP)** - jeśli dostawy muszą być dokonywane okresowo.
- **Split Delivery VRP (SDVRP)** - jeśli jedno zgłoszenie może być obsłużone przez kilka pojazdów.
- **VRP with Backhauls (VRPB)** - jeśli pojazdy muszą odebrać ładunek po dokonaniu dostaw.
- **VRP with Pick-Ups and Deliveries (VRPPD)** - jeśli pojazdy muszą coś odebrać i dostarczyć do klientów.

Powyższą klasyfikację zaproponowno w [1]. Dodatkowo warto zapoznać się z zaproponowaną bibliografią [2]. Od sfomułowania VRP minęło już prawie 50 lat [3]. Ostatnia dekada wskazuje na szczególne zainteresowanie VRP. Z tego okresu pochodzi większość publikacji na temat problemu. Ciekawy przegląd problemu możemy znaleźć w [4].

2. Sformułowanie problemu MDMGVRP

Klasyfikacja obejmuje znaczne spektrum problemów. Rzeczywistość jest zwykle bardziej skomplikowana niż modele matematyczne, które oddają świat w pewnym przybliżeniu.

Rozważmy sytuację, gdy dysponujemy pewną liczbą magazynów. W tych magazynach przechowywany jest pewien zapas dóbr należących do kilku rodzajów asortymentów. Stany poszczególnych magazynów są ograniczone i określone. Dodatkowo mamy do dyspozycji pewną flotę ciężarówek, którymi możemy dostarczać asortymenty do klientów.

Klienci i magazyny znajdują się w miastach. Odległości pomiędzy tymi miastami są dane. Wielkości zamówień poszczególnych klientów są określone dla każdego asortymentu.

Opisana sytuacja częściej odpowiada rzeczywistości niż abstrakcyjny problem VRP, określony dla jednego asortymentu i nieograniczonych stanów magazynowych. Dlatego zdecydowałem się wprowadzić kolejny wariant VRP.

"**MDMGVRP**" to *"Multiple Depots and Multiple Goods Vehicle Routing Problem"* czyli *"problem marszrutyzacji pojazdów z wieloma magazynami i wieloma asortymentami"*.

Niekiedy do rozwiązania MDMGVRP wystarczą modele matemetyczne stworzone dla innych wariantów VRP. Wyobraźmy sobie sytację kiedy mamy jeden magazyn, w którym zapasy poszczególnych dóbr są nieograniczone. W takim przypadku rozważyć wystarczy zagadnienie VRP dla sumy dostaw wszystkich asortymentów.

Jeżeli jednak pojawi się więcej magazynów lub więcej magazynów z ograniczeniem zapasów poszczególnych asortymentów, do rozwiązania koniecze staje się stworzenie nowego modelu matematycznego.

Wiele dotychczas spotykanych wariantów VRP jest w istocie szczególnym przypadkiem MDMGVRP. Podobnie rzecz się ma do problemu komiwojażera.

3. Model matematyczny

3.1. Definicje

Dana jest pewna liczba miast M, pewna liczba samochodów V oraz pewna liczba asortymentów A. Zakładamy, że bez względu na rodzaj asortymenty konfekcjonowane są w jednakowych pojemnikach. Stąd wspólna jednostka miary załadunku i zamówień dla wszystkich asortymentów.

Odległości pomiędzy miastami określa macierz O:

$$O = [o_{i,j}] \quad i, j = 1, \ldots, M, \tag{1}$$

gdzie i oznacza miasto początkowe, j miasto końcowe.

W niektórych miastach znajdują się magazyny. W magazynach przechowywana jest określona liczba pojemników różnych asortymentów:

$$S = [s_{a,m}] \quad a = 1, \ldots, A; \quad m = 1, \ldots, M; \quad s_{a,m} \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

gdzie a oznacza rodzaj asortymentu, m miasto, w którym jest przechowywany, $s_{a,m}$ – liczbę pojemników asortymentu a dostępnych w magazynie m. Jeżeli liczba $s_{a,m}$ jest większa od 0, oznacza to, że w mieście m znajduje się $s_{a,m}$ pojemników z asortymentem a.

W niektórych miastach znajdują się klienci, których zamówienia muszą zostać zrealizowane. Zamówienia oznaczone są macierzą D:

$$D = [d_{a,m}] \quad a = 1, \ldots, A; \quad m = 1, \ldots, M; \quad d_{a,m} \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

gdzie a oznacza asortyment, m – miasto klienta, $d_{a,m}$ – zamawianą liczbę pojemników asortymentu a.

W danym mieście nie może znajdować się jednocześnie magazyn i klient:

$$\forall m \in \{1, \ldots, M\}: \quad \sum_{a=1}^{A} s_{a,m} = 0 \vee \sum_{a=1}^{A} d_{a,m} = 0 \tag{4}$$

Samochody, którymi dysponujemy w celu realizowania zamówień, mają określone ładowności l_v wyrażone w liczbie pojemników:

$$l_v \in \mathbf{N} \quad v = 1, \ldots, V \tag{5}$$

oraz charakteryzują się kosztem przejazdu jednostki odległości:

$$c_v \in \mathrm{N} \quad v = 1, \ldots, V, \tag{6}$$

gdzie c_v oznacza koszt przejechania jednej jednostki odległości przez samochód v.

Samochody mają określone miasto startowe:

$$p_v \quad v = 1, \ldots, V; \quad p_v \in \{1, \ldots, M\}, \tag{7}$$

gdzie p_v oznacza miasto startowe samochodu v. Dla zobrazowania rozważmy następujące dane:

$$M = 9, A = 2, V = 3;$$

$$l_1 = 9, l_2 = 15, l_3 = 15,$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1,$$

$$p_1 = 4, p_2 = 4, p_3 = 5,$$

$$O = \begin{bmatrix} 0, & 6, & 10, & 5, & 9, & 4, & 8, & 10, & 13 \\ 6, & 0, & 4, & 3, & 5, & 7, & 9, & 7, & 9 \\ 10, & 4, & 0, & 7, & 3, & 11, & 12, & 9, & 7 \\ 5, & 3, & 7, & 0, & 4, & 4, & 5, & 5, & 7 \\ 9, & 5, & 3, & 4, & 0, & 8, & 8, & 5, & 4 \\ 4, & 7, & 11, & 4, & 8, & 0, & 4, & 7, & 11 \\ 8, & 9, & 12, & 5, & 8, & 4, & 0, & 4, & 9 \\ 10, & 7, & 9, & 5, & 5, & 7, & 4, & 0, & 4 \\ 13, & 9, & 7, & 7, & 4, & 11, & 9, & 4, & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 10, & 3, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 5, & 5, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 0, & 0, & 0, & 3, & 1, & 3, & 3 \\ 2, & 1, & 2, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 3 \end{bmatrix}$$

Rysunek 1 obrazuje problem MDMGVRP dla powyższych danych.

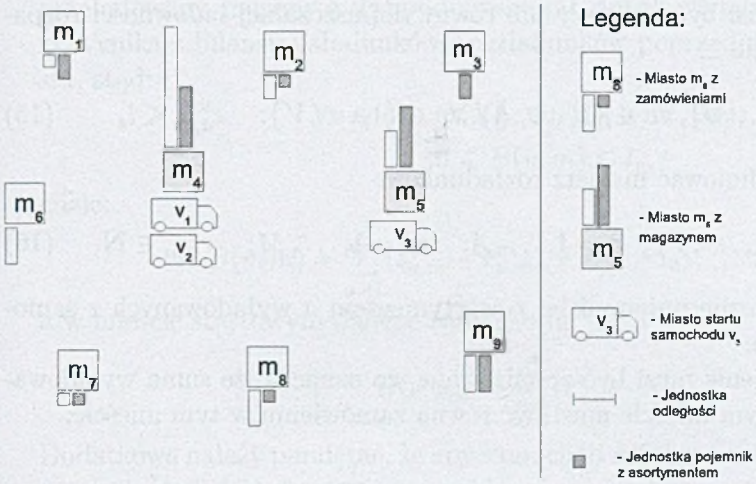
3.2. Sformułowanie problemu

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$X^v = [x^v_{m_1,m_2}] \quad v = 1, \ldots, V; \quad m_1, m_2 = 1, \ldots, M; \quad x^v_{m_1,m_2} \in \{0, 1\}, \tag{8}$$

gdzie X^v jest macierzą trasy przejechanej przez samochód v, zbudowaną w następujący sposób:

$$x^v_{m_1,m_2} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli samochód } v \text{ jedzie z miasta } m_1 \text{ do } m_2 \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{9}$$



Rys. 1. Dane MDMGVRP

Dany samochód może odwiedzić dane miasto co najwyżej raz, co zapisujemy wzorem:

$$\sum_{m_1=1}^{M} x^v_{m_1,m_2} \leqslant 1 \qquad \forall v \in \{1,\ldots,V\}, \forall m_2 \in \{1,\ldots,M\} \tag{10}$$

Podobnie dany samochód może opuścić dane miasto co najwyżej raz, co zapisujemy wzorem:

$$\sum_{m_2=1}^{M} x^v_{m_1,m_2} \leqslant 1 \qquad \forall v \in \{1,\ldots,V\}, \forall m_1 \in \{1,\ldots,M\} \tag{11}$$

Jeżeli dany samochód uczestniczy w transportach, to wyrusza ze swojej lokalizacji startowej. Jeżeli natomiast nie uczestniczy w transportach (nie wyrusza z lokalizacji startowej), to wszystkie elementy jego trasy przyjmują wartość 0. Możemy to zapisać w sposób następujący:

$$\forall v \in \{1,\ldots,V\}: \quad \sum_{m_2=1}^{M} x^v_{p_s,m_2} = 0 \Rightarrow \sum_{m_1=1}^{M}\sum_{m_2=1}^{M} x^v_{v,m_1,m_2} = 0 \tag{12}$$

Oznaczmy literą Z^v macierz załadunków:

$$Z = [z^v_{a,m}] \quad v = 1,\ldots,V; \quad a = 1,\ldots,A; \quad m = 1,\ldots,M; \quad z^v_{a,m} \in \mathrm{N}, \tag{13}$$

gdzie $z^v_{a,m}$ oznacza liczbę pojemników z asortymentem a załadowanych do samochodu v w mieście m.

Suma załadunków wszystkich samochodów w danym mieście nie może być większa niż stan magazynu:

$$\forall m \in \{1,\ldots,M\}, \forall a \in \{1,\ldots,A\}: \quad \sum_{v=1}^{V} z^v_{a,m} \leqslant s_{a,m} \tag{14}$$

Każdy załadunek musi być mniejszy lub równy dopuszczalnej ładowności rozpatrywanego samochodu:

$$\forall m \in \{1,\ldots,M\}, \forall a \in \{1,\ldots,A\}, \forall v \in \{1,\ldots,V\}: \quad z^v_{a,m} \leqslant l_s \tag{15}$$

Podobnie można zdefiniować macierz rozładunków:

$$R = [r^v_{a,m}] \quad v = 1,\ldots,V; \quad a = 1,\ldots,A; \quad m = 1,\ldots,M; \quad r^v_{a,m} \in \mathrm{N}, \tag{16}$$

gdzie $r^v_{a,m}$ oznacza liczbę pojemników z asortymentem a wyładowanych z samochodu v w mieście m.

Każde zamówienie musi być zrealizowane, co oznacza, że suma wyładowanych towarów w danym mieście musi być równa zamówieniu w tym mieście:

$$\forall m \in \{1,\ldots,M\}, \forall a \in \{1,\ldots,A\}: \quad \sum_{v=1}^{V} r^v_{a,m} = d_{a,m} \tag{17}$$

W niniejszym wariancie VRP (w odróżnieniu od SDVRP) przyjmujemy, że zamówienia na wszystkie towary w danym mieście muszą być załatwione przez jeden transport:

$$\forall m \in \{1,\ldots,M\}, \exists v \in \{1,\ldots,V\}:$$
$$r^v_{a,m} = d_{a,m} \qquad \forall a \in \{1,\ldots,A\} \tag{18}$$

Zakładamy, że wszystkie samochody ładują dokładnie tyle towarów, ile później rozładowują. Suma załadunków każdego samochodu jest równa sumie rozładunków:

$$\forall v \in \{1,\ldots,V\}, \forall a \in \{1,\ldots,A\}:$$
$$\sum_{m=1}^{M} z^v_{a,m} = \sum_{m=1}^{M} r^v_{a,m} \tag{19}$$

Samochody muszą odwiedzić miasta, w których są rozładunki lub załadunki. Muszą do nich dojechać lub muszą z nich wyruszyć. Dzieje się tak w przypadku, gdy rozpatrywane jest miasto startowe. W opisywanym wariancie zakładamy, że samochody nie muszą powrócić do miasta startowego, z którego wyruszyły. Stąd:

$$\forall v \in \{1,\ldots,V\}, \forall m \in \{1,\ldots,M\}:$$
$$z^v_{a,m} > 0 \vee r^v_{a,m} > 0, \quad a = 1,\ldots,A \Rightarrow$$
$$\sum_{m_2=1}^{M} x^v_{m,m_2} = 1 \vee \sum_{m_1=1}^{M} x^v_{m_1,m} = 1 \tag{20}$$

Mając zdefiniowane załadunki i rozładunki należy pamiętać o tym, że dopuszczalna ładowność samochodu nie może być przekroczona w którymkolwiek miejscu trasy. To znaczy, że przy sprawdzeniu, czy w danym mieście samochód nie został

przeładowany, musimy wziąć pod uwagę załadunek, wyładunek oraz ładunek, który wynika z bilansu załadunków i rozładunków poprzedniego odwiedzonego miasta, stąd:

$$\forall v \in \{1,\ldots,V\}, \forall m \in \{1,\ldots,M\}:$$
$$0 \leqslant B(v,m) \leqslant l_v, \tag{21}$$

gdzie:

$$B(v,m) = \sum_{a=1}^{A}(z^v_{a,m} - r^v_{a,m}) + B(v,m_0) \qquad x^v_{m_0,m} = 1, \tag{22}$$

a w mieście startowym danego samochodu:

$$B(s,p_v) = \sum_{a=1}^{A}(z^v_{a,p_s} - r^v_{a,p_s}) \tag{23}$$

Dodatkowo należy pamiętać, że aby samochód mógł coś załadować lub rozładować, to musi odwiedzić dane miasto, stąd:

$$\sum_{a=1}^{A}(z^{v_0}_{a,m_0} + r^{v_0}_{a,m_0}) \neq 0 \quad v_0 \in \{1,\ldots,V\}, m_0 \in \{1,\ldots,M\} \Rightarrow$$
$$(\exists m \in \{1,\ldots,M\} : x^{v_0}_{m_0,m} = 1 \vee \exists m \in \{1,\ldots,M\} : x^{v_0}_{m,m_0} = 1) \tag{24}$$

Koszt transportów zależny jest od odległości przejechanych przez poszczególne samochody, stąd funkcja celu:

$$F(X^1,\ldots,X^V) = \sum_{v=1}^{V}\sum_{m_1=1}^{M}\sum_{m_2=1}^{M} x^v_{m_1,m_2} * o_{m_1,m_2} * c_s \tag{25}$$

Rozwiązanie problemu polega na znalezieniu takich macierzy X^v, Z^v oraz R^v, aby wartość funkcji celu F była jak najmniejsza i wszystkie powyższe ograniczenia były spełnione.

Problem nie został sprowadzony do postaci kanonicznej, gdyż metody zastosowane do jego rozwiązania w [5] tego nie wymagają.

Dla przykładu z rozdziału poprzedniego rozwiązanie dopuszczalne wygląda następująco:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 6, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 0, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 4, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 5, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

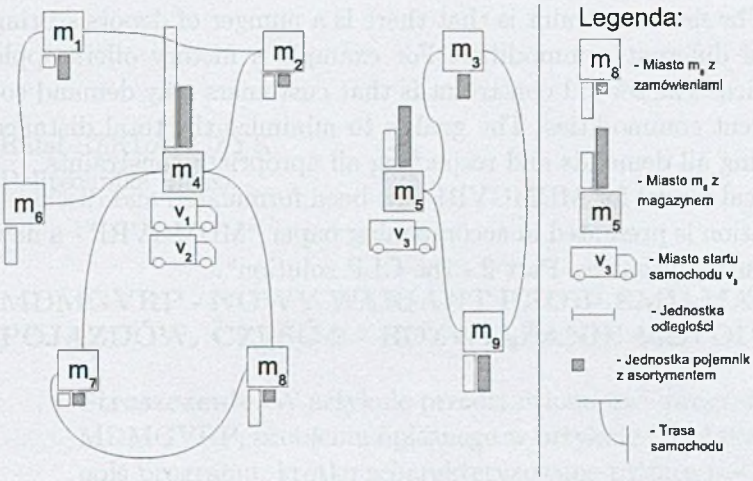
$$R_3 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

W celu zilustrowania rozwiązania MDMGVRP zamieszczono rys. 2.

LITERATURA

1. Garn W.: `http://osiris.tuwien.ac.at/~wgarn/VehicleRouting/vehicle_routing.html` Publikacja internetowa, Wiedeń, 2002.
2. Garn W.: `http://osiris.tuwien.ac.at/~wgarn/VehicleRouting/neo/biblio.html` Publikacja internetowa, Wiedeń, 2002.



Rys. 2. Rozwiązanie MDMGVRP

3. Dantzig R., Ramser R.H.: The Truck Dispatching Problem. Management Science, vol. 6, 1959.
4. Toth P., Vigo D.: The Vehicle Routing Problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia 2002.
5. Szklarczyk R.: MDMGVRP - nowy wariant problemu marszrutyzacji pojazdów. Część 2 - Rozwiązanie metodą CLP. XV Krajowa Konferencja Automatyzacji Precesów Dyskretnych, Zakopane 2006.

Podziękowania

Autor chciałby podziękować Prof. A. Niederlińskiemu za pomoc przy opracowaniu tego artykułu.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Banaszak

Abstract

The VRP problem is one of suppling a set of custormers with a single commodity, using a fleet of vehicles, under costraints on vehicles, routes, and customers. Each vehicle has a certain capacity and each customer has a certain demand. There is also a set of depots storing an unlimited number of commodities and the distance matrix for all relevant distances. The goal is to minimize the total distance traveled or the number of vehicles required to solve the problem, so that all demands are satisfied.

The paper presents a new variant of VRP called Multiple Depots and Multiple Goods Vehicle Routing Problem (MDMGVRP). It is charecterized by addi-

tional constraints. The first constraint is that there is a numger of depots storing a limited number of different commodities. For example a factory offers apple juice and banana juice. The second constraint is that customers may demand some amounts of diffrent commodities. The goal is to minimize the total distance traveled while meeting all demands and respecting all apropriate constraints.

A mathematical model for MDMGVRP has been formulated and discused. A CLP solution solution is presented in accompaning paper "MDMGVRP - a new variant of vehicle routing problem. Part 2 - the CLP solution".