ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLASKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 145 Nr kol. 1728

Mikołaj BUSŁOWICZ
Politechnika Białostocka

ODPORNA STABILNOŚĆ DODATNICH LINIOWYCH SINGULARNYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIAMI O KANONICZNYCH POSTACIACH MACIERZY STANU

Streszczenie. Podano proste warunki konieczne i wystarczające odpornej stabilności liniowych dodatnich singularnych układów dyskretnych z dwoma opóźnieniami o kanonicznych postaciach macierzy stanu.

ASYMPTOTIC STABILITY OF POSITIVE LINEAR SINGULAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAYS WITH CANONICAL FORMS OF STATE MATRICES

Summary. Simple necessary and sufficient condition for the robust stability of singular positive discrete-time linear system with two delays and with state-space matrices in the canonical forms has been given.

1. Wstęp

Dynamiczne układy dodatnie z opóźnieniami są w ostatnich latach tematem wielu publikacji. Problemowi badania stabilności asymptotycznej oraz odpornej takich układów są poświęcone np. prace [9, 2, 3, 5, 6].

Celem pracy jest podanie prostego warunku koniecznego i wystarczającego odpornej stabilności liniowych singularnych dodatnich układów dyskretnych z dwoma opóźnieniami zmiennych stanu, o macierzach stanu w postaciach kanonicznych podanych w [10].

Problem badania odpornej stabilności singularnych dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze.

2. Sformułowanie problemu

Niech $\Re_+^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych nieujemnych elementach, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$.

Weźmy pod uwagę dodatni singularny układ dyskretny o niepewnych parametrach z dwoma opóźnieniami zmiennych stanu, opisany jednorodnym równaniem:

$$Ex_{i+1} = A_0(q)x_i + A_1(q)x_{i-1} + A_2(q)x_{i-2},\ i \in Z_+, \tag{1}$$

gdzie: Z_+ jest zbiorem liczb całkowitych nieujemnych, $x_i \in \Re^n_+$ jest wektorem stanu z warunkami początkowymi

$$x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \Re^n_+, \tag{2}$$

przy czym: $q = [q_1, q_2, \ldots, q_m]$ jest wektorem niepewnych parametrów, a

$$Q = \{q : q_r \in [q_r^-, q_r^+], q_r^- < q_r^+, r = 1,2,\ldots,m\} \tag{3}$$

jest "standardowym" zbiorem wartości niepewnych parametrów, rozpatrywanym w literaturze z zakresu odpornej stabilności, patrz np. [1] i cytowaną tam literaturę.

Będziemy przyjmować, że macierze występujące w równaniu (1) mają podane poniżej postaci kanoniczne, zaproponowane w pracy [10] w przypadku dokładnie znanych elementów poszczególnych macierzy, tj.

$$E = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{n\times n},\ A_0(q) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_2(q) \\ 0 & \cdots & 0 & a_5(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3n-4}(q) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4a}$$

$$A_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1(q) \\ 0 & \cdots & 0 & a_4(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3n-5}(q) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0(q) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_3(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3(n-2)}(q) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4b}$$

przy czym $a_k(q) \geq 0,\ k = 0,1,\ldots,3n-4$, dla każdego ustalonego $q \in Q$.

Wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu, będący wyznacznikiem macierzy $H(z,q) = Ez^3 - A_0(q)z^2 - A_1(q)z - A_2(q)$, ma postać

$$w(z,q) = z^{3(n-1)} - a_{3n-4}(q)z^{3n-4} - a_{3n-5}(q)z^{3n-5} - \ldots - a_1(q)z - a_0(q). \tag{5}$$

Dla singularnego układu (1) z opóźnieniami można wyznaczyć (w sposób opisany np. w [9] w przypadku układów standardowych) równoważny singularny układ bez opóźnień. Uwzględniając powyższe oraz uogólniając rezultaty podane w rozdziale 8 pracy [7] (dotyczące singularnych układów dyskretnych bez opóźnień o dokładnie znanych parametrach) na przypadek dodatniego układu (1) otrzymamy następującą definicję oraz twierdzenie.

Definicja 1. Dodatni układ (1) nazywamy odpornie stabilnym, jeżeli dla każdego ustalonego $q \in Q$ rozwiązanie x_i równania (1) dla dowolnych warunków początkowych (2) spełnia warunek $x_i \to 0$ przy $i \to \infty$.

Twierdzenie 1. Układ (1) o macierzach (4) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera $z_k(q)$ $(k = 1,2,\dots,3(n-1))$ wielomianu charakterystycznego (5) dla każdego ustalonego $q \in Q$ leżą w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, tj. $|z_k(q)| < 1$, $\forall q \in Q$, $k = 1,2,\dots,3(n-1)$.

Problem badania stabilności standardowych dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami był rozpatrywany w wielu pracach. Podano w nich kryteria asymptotycznej stabilności [9] oraz odpornej stabilności, np. [2, 3, 5, 6].

Celem pracy jest podanie prostego warunku koniecznego i wystarczającego odpornej stabilności singularnego dodatniego układu (1) o macierzach (4).

3. Rozwiązanie problemu

Wielomian (5) jest wielomianem charakterystycznym układu dyskretnego bez opóźnienia o niepewnych parametrach, opisanego równaniem stanu

$$\bar{x}_{i+1} = F(q)\bar{x}_i, \quad i \in Z_+, \tag{6}$$

gdzie $\bar{x}_i \in \Re^{3(n-1)}$, a macierz $F(q) \in \Re^{(3n-3)\times(3n-3)}$ ma postać

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(q) & a_1(q) & a_2(q) & \cdots & a_{3n-4}(q) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Jeżeli $a_k(q) \geq 0$, $\forall q \in Q$, $k = 0,1,\dots,3n-4$, to macierz (7) ma nieujemne elementy. Zatem, układ (6) o niepewnych parametrach jest układem dodatnim.

Uogólniając rezultaty pracy [8] na dodatnie układy o niepewnych parametrach, otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Dodatni układ (6) bez opóźnienia o niepewnych parametrach jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie główne wiodące minory $\Delta_i(q)$ $(i = 1,2,\dots,3(n-1))$ macierzy

$$\overline{F}(q) = I - F(q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -a_0(q) & -a_1(q) & -a_2(q) & \cdots & 1-a_{3n-4}(q) \end{bmatrix} \tag{8}$$

są dodatnie dla każdego $q \in Q$. ■

Ze wzoru (8) wynika, że $\Delta_i(q) = 1$ dla $i = 1,2,\ldots,3n-4$. Natomiast

$$\Delta_{3n-3}(q) = \det \overline{F}(q) = 1 - \sum_{k=0}^{3n-4} a_k(q). \tag{9}$$

Zatem, o asymptotycznej stabilności dodatniego układu (6) decyduje tylko główny wiodący minor (9). Zgodnie z twierdzeniem 2 musi on być dodatni.

Twierdzenie 3. Dodatni singularny układ (1) z opóźnieniami o niepewnych parametrach jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min_{q \in Q} S(q) < 1, \tag{10}$$

przy czym

$$S(q) = \sum_{k=0}^{3n-4} a_k(q). \tag{11}$$

Dowód. Z twierdzenia 2 i powyższych rozważań wynika, że dodatni układ (6) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $S(q) < 1$ dla każdego $q \in Q$, czyli gdy zachodzi (10). Teza twierdzenia wynika z powyższego oraz z faktu, że dodatnie układy (1) i (6) mają te same wielomiany charakterystyczne, zatem warunki ich odpornej stabilności są takie same. ■

Warunek (10) można sprawdzić stosując obliczenia komputerowe z wykorzystaniem odpowiedniego oprogramowania (dostępnego w specjalizowanych pakietach, np. MATLAB), służącego do wyznaczania minimum funkcji wielu zmiennych przy ograniczeniach. W pewnych przypadkach szczególnych, przy liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności, sprawdzenie warunku (10) nie wymaga obliczania minimum funkcji wielu zmiennych.

Postępując podobnie jak w pracy [4], w której rozpatrywano problem odpornej stabilności dyskretnych standardowych układów dodatnich bez opóźnienia, można udowodnić poniższy lemat.

Lemat 1. Jeżeli współczynniki $a_k(q)$, $k = 0,1,\ldots,3n-4$ są liniowymi lub wieloliniowymi rzeczywistymi funkcjami niepewnych parametrów, to funkcja (11) osiąga wartość minimalną w jednym z wierzchołków zbioru Q.

Zbiór (3) jest hiperprostopadłościanem w przestrzeni niepewnych parametrów. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków.

Z powyższego i lematu 1 wynika, że jeżeli współczynniki $a_k(q)$, $k = 0,1,\ldots,3n-4$, są liniowymi lub wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów, to należy najpierw obliczyć $K = 2^m$ wartości funkcji (11) w wierzchołkach zbioru (3), a następnie wybrać wartość minimalną. Jest ona równa $\min_{q \in Q} S(q)$.

4. Przykład

Należy zbadać odporną stabilność dodatniego układu (1) przy $n = 3$, o macierzach stanu w postaciach kanonicznych (4), tj.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2(q) \\ 0 & 0 & a_5(q) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$A_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1(q) \\ 0 & 0 & a_4(q) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_0(q) \\ 1 & 0 & a_3(q) \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{12b}$$

przy czym $a_0(q) = 0.1 + q_1q_2$, $a_1(q) = 0.1 + q_2$, $a_2(q) = 0.2 + q_1 + q_1q_2$, $a_3(q) = 0.2 + q_1$, $a_4(q) = 0.2 + q_1 + q_2$, $a_5(q) = 0.1$ oraz

$$Q = \{q = [q_1, q_2]: q_r \in [-0.1, 0.1], r = 1,2\}. \tag{13}$$

Z twierdzenia 3 wynika, że rozpatrywany układ jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (10), przy czym $S(q) = 0.9 + 3q_1 + 2q_2 + 2q_1q_1$. Funkcja $S(q)$ jest wieloliniową (biliniową) funkcją niepewnych parametrów, zatem z lematu 1 wynika, że jej wartość minimalna jest osiągana w wierzchołkach zbioru (13), będącego prostokątem na płaszczyźnie niepewnych parametrów.

Łatwo sprawdzić, że funkcja $S(q)$ osiąga wartość minimalną równą 0.42 dla $q_1 = q_2 = -0.1$. Ponieważ jest ona mniejsza od 1, warunek (10) jest spełniony i rozpatrywany układ singularny jest odpornie stabilny, zgodnie z twierdzeniem 3.

5. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem odpornej stabilności singularnego dodatniego układu dyskretnego (1) z dwoma opóźnieniami o macierzach w postaciach kanonicznych (4). Podano prosty warunek konieczny i wystarczający odpornej stabilności (twierdzenie 2). Pokazano, że jeżeli współczynniki wielomianu charakterystycznego (5) są liniowymi lub wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów, to wartość minimalna funkcji (11) jest osiągana w zbiorze wierzchołków zbioru wartości niepewnych parametrów (3) (lemat 1).

Rozważania można uogólnić na singularne dyskretne układy dodatnie z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

LITERATURA

1. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wyd. i Poligr. PB, Ser. Rozpr. Nauk. Nr 48, Białystok 1997.
2. Busłowicz M.: Odporna stabilność dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniem o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego. Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, tom 1, Warszawa 2005, s. 179-182.
3. Busłowicz M.: Robust stability of scalar positive discrete-time linear systems with delays. Proc. Int. Conf. on Power Electronics and Intelligent Control, Warszawa 2005, Paper 163 (on CD-ROM).
4. Busłowicz M.: Odporna stabilność jednowymiarowych dodatnich układów dyskretnych. Mat. Konf. Nauk.-Techn. Automation, Automatyzacja - Nowości i Perspektywy, Warszawa 2006, s. 362-371.
5. Busłowicz M., Kaczorek T.: Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol. 52, no. 2, 2004, p. 99-102.
6. Busłowicz M., Kaczorek T.: Robust stability of positive discrete-time systems with pure delay with linear unity rank uncertainty structure. Proc. 11th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje 2005, Paper 0169 (on CD-ROM).
7. Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa 1993.
8. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London 2002.
9. Kaczorek T.: Stability of positive discrete-time systems with time-delay. Proc. 8th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, Florida USA, 2004, p. 321-324.
10. Kaczorek T.: Positive minimal realizations for singular discrete-time systems with delays in state and delays in control. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol. 53, no. 3, 2005, p. 293-298.

Recenzent: Dr hab. inż. Adam Czornik

Abstract

The paper considers the robust stability problem of positive singular discrete-time system (1) with two delays and with the state matrices in canonical forms (4). The main result is given in Theorem 3. According to this theorem, positive singular system (1) with the state matrices in forms (4) is robustly stable if and only if condition (10) holds. If the coefficients of characteristic polynomial (5) are linear or multilinear functions of uncertain parameters then minimal value of (11) is assigned in the vertices of value set (3) (Lemma 1).

Considerations can be extended for positive singular discrete-time systems with multiple delays and with canonical forms of the state matrices.