ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 145 Nr kol. 1728

Mikołaj BUSŁOWICZ, Rafał KOCISZEWSKI, Wojciech TRZASKO
Politechnika Białostocka

PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ I PUNKTOWA DEGENERACJA DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIAMI

Streszczenie. W pracy sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych dodatnich układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami zmiennych stanu. Podano też metodę wyznaczania warunków początkowych, dla których trajektoria stanu układu punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy. Rozważania zilustrowano przykładem.

POINTWISE COMPLETENESS AND POINTWISE DEGENERACY OF POSITIVE DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAYS

Summary. Definitions and necessary and sufficient conditions for the pointwise completeness and the pointwise degeneracy of positive discrete-time linear systems with delays have been given.

1. Wstęp

Weźmy pod uwagę liniowy ciągły układ dynamiczny opisany jednorodnym równaniem stanu $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t) \in \Re^n$, z warunkiem początkowym $x_0 = x(t_0)$. Jest dobrze znany fakt, że dla dowolnego stanu $x_1 \in \Re^n$ i $t_1 > 0$ zawsze istnieje stan początkowy x_0, taki że rozwiązanie równania stanu spełnia warunek $x(t_1) = x_1$.

Wychodząc z powyższego faktu, Weiss (np. [8]) sformułował następujący problem: kiedy podobna właściwość zachodzi dla ciągłych układów z opóźnieniem opisanych równaniem stanu $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)$, $h > 0$, $x(t) \in \Re^n$, z warunkami początkowymi $x_0 = x(t_0)$, $x(t-h) = \varphi(t)$, $\forall t \in [0,h)$. Wprowadził też pojęcie punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji takich układów i podał pierwsze warunki. Sformułowany przez Weissa problem był rozpatrywany w wielu pracach, np. [3, 4, 7].

Problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych układów z opóźnieniami został sformułowany i rozwiązany w pracach [1, 2].

W niniejszej pracy rozpatrzymy problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych dodatnich układów z opóźnieniami. Podamy najpierw defini-

cje punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji ogólnych układów dyskretnych z opóźnieniami, a następnie, uwzględniając specyfikę układów dodatnich, sformułujemy definicje dla takich układów oraz podamy odpowiednie warunki.

2. Główny rezultat

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę dyskretny układ liniowy stacjonarny z opóźnieniami opisany jednorodnym równaniem stanu

$$x_{i+1} = \sum_{k=0}^{h} A_k x_{i-k}, \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

gdzie $x_i \in \Re^n$, z warunkami początkowymi

$$x_{-i} \in \Re^n, \quad i = 0,1,\ldots,h. \tag{2}$$

W pracy [2], uogólniając pojęcia punktowej zupełności i punktowej degeneracji na układy dyskretne, sformułowano następujące definicje.

Definicja 1. Układ (1) nazywamy punktowo zupełnym w dyskretnej chwili $i = N \geq h$, jeżeli dla każdego wektora $x_f \in \Re^n$ można tak dobrać warunki początkowe (2), że $x_N = x_f$.

Definicja 2. Układ (1) nazywamy punktowo zdegenerowanym w kierunku v w dyskretnej chwili $i = N \geq h$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \Re^n$, taki że dla wszystkich warunków początkowych (2) rozwiązanie równania (1) dla $i = N$ spełnia warunek $v^{\mathrm{T}} x_N = 0$.

Rozwiązanie równania stanu (1) z warunkiem początkowym (2) ma postać [2]

$$x_i = \Phi(i)x_0 + \sum_{j=-h}^{-1} \sum_{k=1}^{h+j+1} \Phi(i-k)A_{k-1+j}x_j, \tag{3}$$

gdzie macierz podstawowa $\Phi(i)$ spełnia równanie

$$\Phi(i+1) = \sum_{k=0}^{h} A_k \Phi(i-k) = \sum_{k=0}^{h} \Phi(i-k)A_k, \tag{4}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \tag{5}$$

Układ (1) nazywamy dodatnim, jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych (2), tj. dla $x_{-i} \in \Re_+^n$, $i = 0,1,\ldots,h$, rozwiązanie równania stanu (1) jest nieujemne dla każdego $i \in Z_+$, tj. $x_i \in \Re_+^n$, $\forall i \in Z_+$.

Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy [6]

$$A_k \in \Re_+^{n\times n},\ k = 0,1,\ldots,h. \tag{6}$$

Uogólniając definicję 1 na układy dodatnie, otrzymamy następującą definicję.

Definicja 3. Dodatni układ (1) nazywamy punktowo zupełnym w dyskretnej chwili $i = N$, $N \geq h$, jeżeli dla każdego wektora $x_f \in \Re_+^n$ można tak dobrać warunki początkowe $x_{-i} \in \Re_+^n$, $i = 0,1,\ldots,h$, że $x(N) = x_f$.

Rozwiązanie (3) równania stanu układu dodatniego (1) z warunkami początkowymi (2) dla $i = N$ można napisać w postaci

$$x_N = D_N \tilde{x}_0, \tag{7}$$

gdzie $\tilde{x}_0 = \left[x_0^{\mathrm{T}}, x_{-1}^{\mathrm{T}}, \ldots, x_{-h}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in \Re_+^{(h+1)n}$,

$$D_N = [D_0(N), D_1(N), \cdots, D_h(N)] \in \Re_+^{n\times(h+1)n}, \tag{8}$$

przy czym

$$D_0(N) = \Phi(N),\ D_j(N) = \sum_{k=1}^{h-j+1} \Phi(N-k)A_{k-1+j},\ j = 1,2,\ldots,h. \tag{9}$$

Z definicji 3 i wzoru (7) wynika następujący warunek konieczny punktowej zupełności.

Lemat 1. Aby dodatni układ (1) był punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N$, musi być spełniony warunek

$$\text{rząd } D_N = n. \tag{10}$$

Twierdzenie 1. Dodatni układ (1) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony przynajmniej jeden z warunków:

1) $\mathrm{Im}_+ D_N = \Re_+^n$, gdzie $\mathrm{Im}_+ D_N = \{x_N \in \Re_+^n\colon x_N = D_N\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_0 \in \Re_+^{(h+1)n}\}$ jest dodatnim obrazem macierzy D_N o postaci (8),
2) z macierzy D_N można wybrać n liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\overline{D}_N$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe),
3) z macierzy D_N można wybrać n liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz odwrotna $(\tilde{D}_N)^{-1}$ macierzy utworzonej z tych kolumn ma elementy nieujemne.

Dowód. Z definicji 3 i wzoru (7) wynika, że dodatni układ (1) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_N \in \Re_+^n$ istnieje $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{(h+1)n}$, czyli gdy jest spełniony warunek 1) twierdzenia 1. Jeżeli jest speł-

niony warunek 1) twierdzenia 1, to z macierzy D_N można wybrać n kolumn liniowo niezależnych, które tworzą bazę przestrzeni $\Re_+^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym wierszu i w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe, czyli gdy jest spełniony warunek 2) twierdzenia 1. Macierz utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji. Macierz odwrotna macierzy o nieujemnych elementach jest też macierzą o nieujemnych elementach wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona uogólnioną macierzą permutacji [5]. Warunki 2) i 3) są więc równoważne. ■

Przy spełnieniu któregokolwiek z warunków twierdzenia 1 na podstawie wzoru (7) można wyznaczyć wektor $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{(h+1)n}$ dla dowolnego zadanego $x_N = x_f \in \Re_+^n$.

Twierdzenie 2. Dodatni układ (1) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N$, jeżeli rząd macierzy D_N o postaci (8) jest równy n oraz

$$D_N^{\mathrm{T}}[D_N D_N^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{n(h+1)\times n}. \tag{11}$$

Jeżeli zachodzi (11), to wektor $\tilde{x}_0$, dla którego rozwiązanie równania (1) dla $i = N$ jest równe zadanemu stanowi, $x_N = x_f \in \Re_+^n$ można wyznaczyć ze wzoru

$$\tilde{x}_0 = D_N^{\mathrm{T}}[D_N D_N^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f. \tag{12}$$

Dowód. Jeżeli rząd $D_N = n$, to $\det(D_N D_N^{\mathrm{T}}) \neq 0$ i macierz $D_N^{\mathrm{T}}[D_N D_N^{\mathrm{T}}]^{-1}$ jest dobrze zdefiniowana. Jeżeli zachodzi (11) i $x_f \in \Re_+^n$, to wtedy $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{n(h+1)}$ i $x_N = D_N \tilde{x}_0 = D_N D_N^{\mathrm{T}}[D_N D_N^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f = x_f$. ■

Przeciwieństwem punktowej zupełności jest punktowa degeneracja. Dodatni układ (1) nie jest punktowo zupełny, jeżeli nie są spełnione warunki twierdzenia 1. Zauważmy, że rząd $D_N = n$ jest tylko warunkiem koniecznym punktowej zupełności. Oznacza to, że dla dodatniego układu (1) definicję punktowej degeneracji nie możemy sformułować w sposób podobny do podanego w definicji 2.

Definicja 4. Dodatni układ (1) z warunkiem początkowym (2) nazywamy punktowo zdegenerowanym, jeżeli istnieje przynajmniej jeden stan $x_f \in \Re_+^n$, który nie może być osiągnięty z dowolnego warunku początkowego (2), tzn. nie istnieje liczba naturalna N i warunek początkowy (2), taki, że $x_N = x_f$.

Z lematu 1 wynika, że prosty warunek dostateczny punktowej degeneracji ma postać rząd $D_N < n$. Jest on też warunkiem koniecznym w przypadku ogólnym układów dyskretnych z opóźnieniami [2]. W pracy [2] pokazano ponadto, że jeżeli rząd $D_N < n$ dla ustalonego $N \geq h$, to rząd $D_{N+k} < n$ dla dowolnego $k \in Z_+$.

Zauważmy, że dodatni układ (1) może być układem punktowo zdegenerowanym przy spełnieniu warunku (10), w sytuacji gdy istnieje wektor $x_N \in \Re_+^n$, dla którego nie można znaleźć wektora warunków początkowych $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{(h+1)n}$ spełniającego zależ-

ność (7). Z powyższego i twierdzenia 1 wynika następujący warunek konieczny i wystarczający punktowej degeneracji.

Twierdzenie 3. Dodatni układ (1) jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $D_N < n$ lub z macierzy D_N nie można wybrać n liniowo niezależnych kolumn, takich że macierz $\overline{D}_N$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji.

3. Przykład

Należy zbadać punktową zupełność dodatniego układu (1) z jednym opóźnieniem ($h = 1$) o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Dla rozpatrywanego układu macierz $D_1 = [D_0(1), D_1(1)] = [A_0, A_1]$ ma $n = 3$ liniowo niezależne kolumny, przy czym w każdej z nich tylko jeden element jest niezerowy. Z twierdzenia 1 wynika zatem, że układ jest punktowo zupełny.

Łatwo sprawdzić, że warunek (11) dla rozpatrywanego układu nie jest spełniony. Nie możemy więc warunku początkowego wyznaczyć ze wzoru (12).

Warunek ten można natomiast wyznaczyć na podstawie wzoru (7) przy $N = 1$, przekształcając go do postaci $x_1 = [\overline{D}_1, \hat{D}_1]\hat{\tilde{x}}_0$, gdzie $\overline{D}_1$ jest uogólnioną macierzą permutacji, utworzoną z $n = 3$ liniowo niezależnych kolumn macierzy $D_1 = [A_0, A_1]$.

Niech $x_f = [x_{f1}\ x_{f2}\ x_{f3}]^{\mathrm{T}} \in \Re_+^3$. Po odpowiednich przekształceniach ze wzoru (7) przy $N = 1$ otrzymamy, że dla rozpatrywanego układu stan początkowy $\tilde{x}_0$, dla którego rozwiązanie równania stanu dla $i = N = 1$ spełnia warunek $x_N = x_f$, ma postać $\tilde{x}_0 = [x_{01}\ x_{02}\ x_{03}\ x_{-11}\ x_{-12}\ x_{-13}]^{\mathrm{T}}$, gdzie $x_{01} \geq 0$, $x_{03} = x_{-13} = 0$, $x_{02} = x_{f1}$, $x_{-11} = x_{f2}$, $x_{-12} = 0.5x_{f3}$.

4. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych dodatnich układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami, opisanych równaniem stanu (1) przy założeniu (6). Sformułowano podstawowe definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji. Podano prosty warunek wystarczający punktowej zupełności oraz metodę wyznaczania nieujemnych warunków początkowych, dla których trajektoria stanu rozpatrywanych układów przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy.

Rozważania można uogólnić na dodatnie układy bez opóźnień (ciągłe i dyskretne) oraz na dodatnie ciągłe układy z opóźnieniami.

***

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

LITERATURA

1. Busłowicz M.: Cotrollability of linear discrete-delay systems. Proc. Intern. Conf. Functional Differential Systems and Related Topics, Błażejewko 1981, p.47-51.
2. Busłowicz M.: O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. Zesz. Nauk. PB, Elektrotechnika nr 1, 1983, s.17-29.
3. Choundhury A. K.: Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems. Int. J. Control, vol. 16, no. 6, 1972, p. 1083-1100.
4. Olbrot A.: On degeneracy and related problems for linear constant time-lag systems. Ricerche di Automatica, vol. 3, no. 3, 1972, p. 203-220.
5. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London 2002.
6. Kaczorek T., Busłowicz M.: Reachability and minimum energy control of positive discrete-time linear systems with multiple delays in state and control. Pomiary Automatyka Kontrola 2006 (w druku).
7. Popov V. M.: Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations. J. Diff. Equation, vol. 11, 1972, p. 541-561.
8. Weiss L.: Controllability for various linear and nonlinear systems models. Lecture Notes in mMathematics, vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer Verlag, 1970, p. 250-262.

Recenzent: Dr hab. inż. Adam Czornik

Abstract

The paper considers the problem of pointwise completeness and pointwise degeneracy of the positive discrete-time linear systems with delays, described by homogeneous equation (1) with assumption (6). Definitions of the pointwise completeness and pointwise degeneracy of these systems have been introduced (Definitions 3 and 4) and the necessary and sufficient conditions for pointwise completeness and pointwise degeneracy have been given in Theorems 1 and 3.

The presented considerations can be extended for positive continuous-time and discrete-time linear systems without delays and for positive continuous-time linear systems with delays.