ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 145 Nr kol. 1728

Adam CZORNIK, Piotr JURGAŚ
Politechnika Śląska

O STABILNOŚCI DYSKRETNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH

Streszczenie. Rozważamy tutaj skończone zbiory macierzy $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ takie, że promień spektralny każdej macierzy takiego zbioru jest mniejszy niż 1. Następnie formułujemy twierdzenie pokazujące, że dla takiego zbioru możemy zawsze skonstruować zbiór $\Sigma' = \{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}, \ldots, A_n^{l_n}\}$ $(l_1, l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{N})$ taki, że promień spektralny tego zbioru jest mniejszy niż 1 $(\rho(\Sigma') < 1)$.

STABILITY OF DISCRETE LINEAR SYSTEMS

Summary. We consider finite sets of matrices $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ such that spectral radius of each matrix that belongs to such set is less than 1. Then we formulate the theorem that shows that for such set we can always construct the set $\Sigma' = \{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}, \ldots, A_n^{l_n}\}$ $(l_1, l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{N})$ such that spectral radius o this set is less than 1 $(\rho(\Sigma') < 1)$.

1. Wstęp

Mimo że podstawy teorii opisującej zachowanie zmiennych w czasie układów liniowych zostały sformułowane już pod koniec XIX i na początku XX wieku, między innymi przez Floqueta [1], Lapunowa [3] i Bohla [2], to jednak w teorii tej jest jeszcze ciągle wiele problemów pozostających bez rozwiązania. Jednym z takich problemów jest zagadnienie asymptotycznej stabilności układów liniowych, które w ostatnich latach znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki od modelowania ewolucji populacji prostych organizmów o zadanym genotypie po opis natłoku, pojawiającego się w sieciach opartych na protokole TCP/IP (por. [7]). Wszystkie te zjawiska mogą zostać opisane za pomocą stanu początkowego reprezentowanego przez pewien wektor przestrzeni o skończonej ilości wymiarów oraz przez zbiór macierzy, odpowiadających bodźcom, mogącym mieć wpływ na zmianę stanu tego układu.

Rozważmy skończony zbiór macierzy Σ, w którym wszystkie macierze są wymiaru $l \times l$. Zdefiniujmy związany z tym zbiorem niestacjonarny dyskretny układ liniowy o postaci

$$\begin{cases} x(t+1) = f(t)x(t) \\ f : \mathbb{N} \to \Sigma \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Rozwiązanie tego układu będziemy oznaczali symbolem $x(t, f, x_0)$. Będziemy też mówili, że układ (1) jest absolutnie stabilny, jeżeli dla każdej funkcji f i każdego wektora x_0 zachodzi równość

$$\lim_{t\to\infty} x(t, f, x_0) = 0.$$

Absolutna stabilność jest najsilniejszym typem stabilności dyskretnych układów liniowych. Jeżeli układ jest absolutnie stabilny, to jest również stabilny w każdy inny sposób (np.: okresowo lub markowsko, por. [4]). W związku z tym warto jest znać kryterium, pozwalające na orzekanie o tym, czy dany układ jest absolutnie stabilny, oraz na budowę takich układów. Wiadomo, że niestacjonarny dyskretny układ liniowy związany ze zbiorem Σ jest absolutnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(\Sigma) < 1$ (por. [4]), gdzie $\rho(\Sigma)$ jest promieniem spektralnym zbioru Σ i dla zbiorów ograniczonych (w tym również skończonych) można go opisać między innymi za pomocą wzorów

$$\rho(\Sigma) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{A\in\Sigma^n} \rho(A)^{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

i

$$\rho(\Sigma) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{A\in\Sigma^n} \rho(A)^{\frac{1}{n}}, \tag{3}$$

gdzie

$$\Sigma^n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \Sigma \right\}$$

i

$$\rho(A) = \{\max |\lambda_i| : \lambda_i \text{ jest wartością własną macierzy } A\}.$$

Wyznaczenie dokładnej wartości promienia spektralnego zbioru macierzy w oparciu o znane algorytmy jest procesem o dużej złożoności obliczeniowej (por. [5]) i może się nie zakończyć w skończonej ilości kroków (por. [6]). Intuicyjnie można postawić hipotezę o tym, że stabilność wszystkich macierzy $A \in \Sigma$ jest warunkiem wystarczającym występowania absolutnej stabilności całego układu. Poniższy przykład pokazuje jednak, że tak nie jest.

Przykład 1: Niech $\Sigma = \{A, B\}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dla powyższych macierzy zachodzą związki $\rho(A) = \rho(B) = \frac{1}{2} < 1$. Natomiast

$$\rho(AB) = \rho\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{9}{8} \end{bmatrix}\right) = \frac{5}{4} > 1.$$

Z powyższego na podstawie wzoru (3) można wyciągnąć wniosek o tym, że

$$\rho(\Sigma) \geqslant \sqrt{\frac{5}{4}} > 1,$$

z czego wynika, że dyskretny układ liniowy związany ze zbiorem Σ nie jest absolutnie stabilny.

Przykład 2: Równie dobry i z powodu kompletnego pominięcia aparatu matematycznego bardziej przemawiający do wyobraźni przykład przedstawiono w szkicu pracy [7]. Przykład ten pokazuje, że przełączając się między dwoma stanami prowadzącymi do rozwiązania zadanego problemu, można nie osiągnąć zamierzonego celu.

Rozważmy samochód, który z powodu usterki może jedynie skręcać skrajnie w lewo lub skrajnie w prawo. Samochód ten jest ustawiony tyłem do celu, do którego ma trafić, i stoi w takiej odległości, że uruchamiając silnik i wykonując tylko skręt w lewo albo tylko skręt w prawo docieramy do celu. Z drugiej jednak strony, szybkie naprzemienne stosowanie dostępnych środków, czyli skrętu w lewo i prawo, jest niemal tożsame z prostą jazdą przed siebie, co w tym przypadku oznacza ustawiczne oddalanie się od zadanego celu.

2. Główny wynik

Niestabilność układu (1), dla którego wszystkie macierze $A \in \Sigma$ są stabilne, powodowana jest dynamiką przełączeń. Można zatem przypuszczać, że jeżeli dynamika ta jest dostatecznie wolna, tzn. kiedy układ pozostaje w każdym stanie dostatecznie długo, to zjawisko niestabilności nie może mieć miejsca. Następujące twierdzenie uzasadnia słuszność tej hipotezy.

Twierdzenie 1. *Niech $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ i $\rho(A_i) < 1$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$. Wtedy istnieją takie liczby naturalne $l_1, l_2, \ldots, l_k$, że dla*

$$\Sigma' = \left\{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}, \ldots, A_k^{l_k}\right\}$$

zachodzi nierówność

$$\rho(\Sigma') < 1.$$

Dowód: Dla każdego i

$$\rho(A_i) = \inf_{||\cdot||} ||A_i||$$

(por. [8]) i

$$\rho(A_i) < 1.$$

Zatem, dla każdego i istnieje norma $||\cdot||_i$, taka że $||A_i||_i < 1$. Wybierzmy teraz liczbę $\gamma_i \in (||A_i||_i, 1)$. Taki wybór wymusza prawdziwość nierówności

$$||A_i||_i < \gamma,$$

gdzie $\gamma = \max\{\gamma_i\}$. Przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} ||A_i||_i^n < \lim_{n\to\infty} \gamma^n = 0.$$

Korzystając z własności normy macierzowej, można napisać, że

$$0 \leqslant ||A_i^n||_i \leqslant ||A_i||_i^n,$$

więc również

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} ||A_i^n||_i \leqslant \lim_{n\to\infty} ||A_i||_i^n = 0,$$

czyli dla każdego i prawdą jest, że

$$\lim_{n\to\infty} ||A_i^n||_i = 0,$$

a stąd na mocy równoważności norm w skończenie wymiarowej przestrzeni wynika, że dla każdego i i każdej ustalonej normy $||\cdot||_*$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} ||A_i^n||_* = 0$$

Zatem, dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0(i)$ takie, że dla każdego $n > n_0(i)$

$$||A_i^n||_* < \epsilon.$$

Wybierzmy teraz liczbę $\epsilon_0 \in (0, 1)$ i związane z nią liczby $l_i = n_0(i) + 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, tak by

$$||A_i^{l_i}||_* < \epsilon_0 < 1$$

i stwórzmy zbiór

$$\Sigma' = \left\{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}, \ldots, A_k^{l_k}\right\}.$$

Wartość promienia spektralnego zbioru Σ' można oszacować w następujący sposób:

$$\rho(\Sigma') = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup\left\{\rho(A) : A \in \Sigma'^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup\left\{\rho\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) : A_i \in \Sigma'\right\}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup\left\{\inf_{||\cdot||} \left\|\prod_{i=1}^{n} A_i\right\| : A_i \in \Sigma'\right\}\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup \left\{ \inf_{\|\cdot\|} \prod_{i=1}^{n} \|A_i\| : A_i \in \Sigma' \right\} \right]^{\frac{1}{n}} = \\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup \left\{ \prod_{i=1}^{n} \inf_{\|\cdot\|} \|A_i\| : A_i \in \Sigma' \right\} \right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup \left\{ \prod_{i=1}^{n} \|A_i\|_* : A_i \in \Sigma' \right\} \right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup \left\{ \prod_{i=1}^{n} \epsilon_0 \right\} \right]^{\frac{1}{n}} = \\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}} (\epsilon_0^n)^{\frac{1}{n}} = \epsilon_0 < 1.
\end{aligned}
$$

Zatem $\rho(\Sigma') < 1$, co kończy dowód.

■

3. Podsumowanie

Z przedstawionego powyżej twierdzenia wynika, że jeżeli dostatecznie wolno będziemy przełączać się między stanami reprezentowanymi przez macierze należące do zbioru Σ, w którym wszystkie macierze są stabilne, to związany z tym zbiorem dyskretny układ liniowy będzie zachowywał się w stabilny sposób. Wolne tempo zmian stanów jest tutaj utożsamiane z odpowiednio dużymi wartościami wykładników potęg macierzy opisanych w twierdzeniu 1. Osobnym problemem jest pytanie o możliwość istnienia górnego ograniczenia na wartości tych wykładników. Problem ten pozostaje jednak otwarty.

LITERATURA

1. Floquet G.: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Ann. École Norm. Supérieure, 12 (1883), p. 47–89.
2. Bohl P.: Über Differentialgleichungen. J. Reine Angew. Math., 144 (1913), p. 284–313.
3. Lyapunov A.M.: Probléme général de la stabilité du mouvement. Ann. Fac. Sci. Toulouse, 9 (1907), p. 203–474.
4. Gurvits L.: Stability of discrete linear inclusions. Linear Algebra Appl., 231 (1995), p. 47–85.
5. Tsitsiklis J.N., Blondel V.D.: The spectral radius of a pair of matrices is hard to compute. 35th Conference on Decision and Control, Kobe Japan, December 1996.

6. Blondel V.D., Theys J., Vladimirov A.A.: An elementary counterexample to the finitness conjecture. SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 24, No. 4, p. 963–970.
7. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulff K., King Ch.: Stability criteria for switched and hybrid systems - Draft.
8. Horn R.A., Johnson C.R.: Matrix Analysis. Cambridge Uni. Press, Cambridge 1985.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Abstract

We consider finite sets of matrices $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ such that spectral radius of each matrix that belongs to such set is less than 1. Then we formulate the theorem that shows that for such set we can always construct the set $\Sigma' = \{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}, \ldots, A_n^{l_n}\}$ $(l_1, l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{N})$ such that spectral radius o this set is less than 1 $(\rho(\Sigma') < 1)$.