

Krzysztof FUJAREWICZ, Sebastian MAZER
Politechnika Śląska

STROJENIE EKSTRAPOLATORA UŁAMKOWEGO RZĘDU

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki gradientowej optymalizacji parametru β ekstrapolatora ułamkowego rzędu dla układu regulacji złożonego z obiektu typu inercja z opóźnieniem i dyskretnego regulatora PID. Otrzymano odwzorowanie optymalnej wartości parametru β na płaszczyźnie stała czasowa/opóźnienie. Stwierdzono, że jedynie ujemna wartość β powoduje istotną poprawę jakości regulacji w porównaniu z układem regulacji z ekstrapolatorem zerowego rzędu w sensie całkowo-kwadratowego wskaźnika jakości.

SETTING OF A FRACTIONAL ORDER HOLD

Summary. The work presents results of a gradient-based optimization of a parameter β of a fractional order hold in a control system composed of an inertia with delay and PID controller. The mapping of the optimal value of the parameter β on the time constant/delay plane has been obtained. We observed that only negative value of the parameter β causes substantial improvements of the control quality in comparison to the control system with the zero order hold in sense of the integral-quadratic performance index.

1. Wprowadzenie

Najczęściej stosowanym elementem podtrzymującym sygnał sterujący w regulacji dyskretniej w czasie obiektami ciągłymi jest ekstrapolator zerowego rzędu (ZOH). Innym, rzadziej stosowanym, choć często omawianym w literaturze dotyczącej układów z próbkowaniem, jest ekstrapolator pierwszego rzędu (FOH). Bardzo interesującym zagadnieniem, szeroko dyskutowanym w literaturze, jest wpływ rodzaju ekstrapolatora i okresu próbkowania na postać transmitancji dyskretniej układu powstałego z szeregowego połączenia ekstrapolatora, układu ciągłego w czasie i elementu próbkującego. Często spotykanym podejściem [1, 2, 3, 9, 11, 14] jest analiza położenia zer takiego układu dyskretnego, ze szczególnym uwzględnieniem tzw. zer granicznych dla okresu próbkowania $T_s \rightarrow 0$. Badanie zer powstałego układu dyskretnego ma szczególne uzasadnienie, w przypadku gdy stosowane są algorytmy regulacji polegające na skreślaniu zer i biegunów układu otwartego. Pożądane jest

wtedy otrzymanie jak najbardziej stabilnych zer, tzn. leżących wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie z , najbliższej jego środka. W pracy [8] porównano układy z próbkowaniem zawierające ekstrapolatory ZOH i FOH. Wykazano, że element FOH nie jest lepszy od ZOH pod względem ulokowania zer. W pracach [12, 13] jako alternatywę zaproponowano ekstrapolator ułamkowego rzędu (FROH). Wykazano, że przy użyciu elementu FROH można ulokować zera układu dyskretnego w kole jednostkowym dla układów ciągłych, dla których nie da się tego zrobić przy użyciu ZOH. Natomiast w pracy [10] pokazano, że element FROH z parametrem $-1 < \beta < 0$ lokuje wszystkie zera układu dyskretnego w kole jednostkowym dla szerszej klasy układów ciągłych niż ekstrapolator ZOH.

Dotychczasowe prace prace innych autorów dotyczące tego zagadnienia bazują na analizie położenia granicznych zer otwartego układu dyskretnego złożonego z ekstrapolatora, układu ciągłego i elementu próbkującego połączonych szeregowo. W naszych wcześniejszych pracach zastosowano odmienne podejście do optymalizacji parametru ekstrapolatora FROH, bazujące na bezpośredniej minimalizacji kwadratowego lub całkowo-kwadratowego wskaźnika jakości. Minimalizację przeprowadzano w oparciu o gradient wyznaczany za pomocą tzw. strukturalnych metod analizy wrażliwości. W pracach [4, 5], korzystając z tych metod, skonstruowano modele wrażliwościowe pracujące on-line i generujące gradient kwadratowego wskaźnika jakości względem parametru β oraz dodatkowo względem parametrów regulatora. Jedną z niedogodności takiego podejścia był fakt, że należało symulować jednocześnie tyle modeli wrażliwościowych, ile było optymalizowanych parametrów. W pracy [7] pokazano, jak skonstruować tzw. zmodyfikowany układ sprzężony dla ekstrapolatora ułamkowego rzędu. Podejście takie umożliwia generowanie off-line gradientu wskaźnika jakości względem wszystkich optymalizowanych parametrów i/lub sygnałów dla układu zawierającego ekstrapolator ułamkowego rzędu za pomocą jednego układu sprzężonego. Podczas konstruowania ww. układu sprzężonego wykorzystano strukturalne reguły konstrukcji takich układów, sformułowane dla układów ciągło-dyskretnych i przedstawione w pracy [6]. Reguły te łączą w sobie znane z literatury reguły tworzenia układów sprzężonych dla układów ciągłych i dyskretnych, oraz dodatkowo, określają, czym zastąpić w zmodyfikowanym modelu wrażliwościowym impulsator idealny i element próbkujący (klucz). W pracy [7] układ sprzężony zastosowano do jednoczesnej optymalizacji parametru β ekstrapolatora ułamkowego rzędu włączonego na wejście układu ciągłego oraz dyskretnego sygnału sterującego, przy całkowym, kwadratowym wskaźniku jakości. Układ optymalizowany był układem otwartym, dla którego znano *a priori* trajektorię zadaną.

W niniejszej pracy optymalizowany jest zamknięty układ regulacji dyskretny w czasie z ekstrapolatorem FROH. Jako obiekt wybrano inercję pierwszego rzędu z opóźnieniem, która jest dobrym przybliżeniem wielu obiektów regulowanych, występujących w rzeczywistości. Regulatorem jest dyskretny regulator PID. Optymalizowane są jednocześnie nastawy regulatora i parametr ekstrapolatora przy całkowo-kwadratowym wskaźniku jakości, w którym funkcja podcałkowa jest kwadratem ciągłego w czasie błędu regulacji. Optymalizacji tej dokonano dla różnych kombinacji wartości: stała czasowa T i opóźnienie T_0 obiektu oraz okresu

próbkowania T_s . Umożliwiło to przedstawienie optymalnej wartości parametru ekstrapolatora na płaszczyźnie $(T/T_s, T/T_0)$, co z kolei umożliwiło sformułowanie wniosków, dotyczących zasadności stosowania ekstrapolatora FROH z dodatnimi i ujemnymi wartościami parametru.

2. Ekstrapolator ułamkowego rzędu i jego optymalizacja

Element FROH jest elementem podtrzymującym generującym na wyjściu ciągły w czasie sygnał $x(t)$ na podstawie dyskretnego w czasie sygnału wejściowego $u(kT_s)$, zgodnie ze wzorem

$$x(t) = u(kT_s) + \beta \left[\frac{u(kT_s) - u((k-1)T_s)}{T_s} \right] (t - kT_s) \quad (1)$$

$$kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

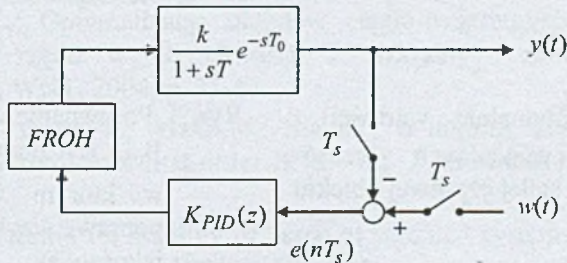
gdzie T_s jest okresem próbkowania, a β jest liczbą rzeczywistą.

Ekstrapolatory ZOH i FOH są szczególnymi przypadkami ekstrapolatora FROH dla parametru odpowiednio $\beta = 0$ i $\beta = 1$.

Rozważmy układ regulacji dyskretny obiektem ciągłym przedstawiony na rysunku 1. Obiektem regulowanym jest inercja pierwszego rzędu z opóźnieniem. W układzie włączony jest dyskretny regulator PID, z którego sygnał sterujący trafia na wejście ekstrapolatora ułamkowego rzędu, pełniącego rolę elementu podtrzymującego. Zadanie regulacji optymalnej polega na dobraniu optymalnych nastaw regulatora k_p , k_i , k_d oraz parametru β ekstrapolatora, tak aby zminimalizować całkowo-kwadratowy wskaźnik jakości:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} e^2(t) dt \quad (2)$$

w którym $e(t) = w(t) - y(t)$ jest ciągłym w czasie błędem regulacji. Zakłada się zatem,

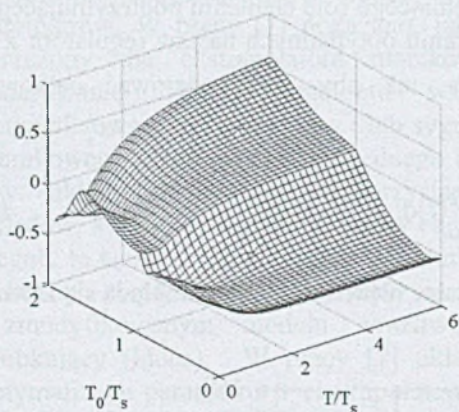


Rys. 1. Układ regulacji dyskretny obiektem ciągłym, w którym elementem podtrzymującym dla dyskretnego sygnału sterującego jest ekstrapolator ułamkowego rzędu

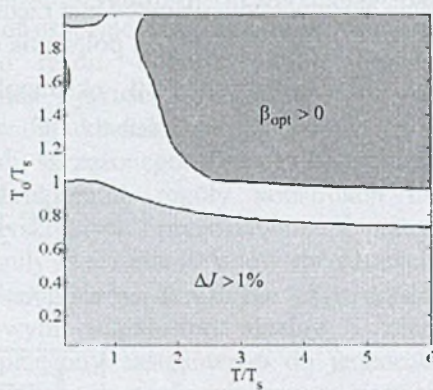
że na etapie optymalizacji układu regulacji dysponujemy informacją o sygnałach ciągłych w czasie występujących w układzie. Umożliwia to zdefiniowanie całkowego

wskaźnika jakości zamiast najczęściej stosowanego wskaźnika sumowego, co pozwala na uwzględnienie przebiegu błędu regulacji pomiędzy chwilami impulsowania. Optymalne wartości parametrów regulatora i parametru β ekstrapolatora otrzymano na drodze bezpośredniej minimalizacji wskaźnika (2) przy użyciu gradientu generowanego w tzw. zmodyfikowanym układzie sprzężonym. Reguły jego konstrukcji przedstawione są w pracy [6], a układ sprzężony dla samego ekstrapolatora FROH zawiera praca [7].

Ponieważ dla różnych parametrów k , T , T_0 i T_s otrzymuje się różne optymalne wartości k_p , k_i , k_d i β , występuje problem prezentacji i analizy wyników w przestrzeni czterowymiarowej. Dokładniejsza jednak analiza występujących zależności prowadzi do wniosku, że wzmocnienie inercji wpływa jedynie na optymalną wartość całego regulatora i nie jest ciekawa z punktu widzenia optymalizacji β . Ponadto, jednoczesne zwiększenie / zmniejszenie czasów T , T_0 i T_s daje tę samą optymalną wartość β i kształt przebiegów regulacji – zmienia się jedynie skala czasu. Dzięki temu możliwe było wykreślenie jednoznacznej optymalnej wartości β dla względnych wartości: T/T_s i T_0/T_s przyjmujących wartości odpowiednio z przedziałów: (0.2, 6) oraz (0.02, 2). Aby pokryć zakresy zmienności argumentów, wykonano $35 \times 51 = 1785$ niezależnych optymalizacji wszystkich parametrów. Otrzymana zależność przedstawiona jest na rysunku 2.



Rys. 2. Wykres optymalnej wartości β w funkcji względnych czasów opóźnienia i stałej czasowej obiektu



Rys. 3. Porównanie obszaru, w którym β_{opt} jest dodatnie, z obszarem, w którym występuje istotna poprawa względnego wskaźnika jakości (3)

Jak widać z rysunku, otrzymano zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości β_{opt} . Charakterystyczne załamanie charakterystyki związane jest ze zmianą rzędu transmitancji dyskretnego układu otwartego.

Interesujące jest przy tym zbadanie, czy otrzymana optymalna wartość β_{opt} rzeczywiście poprawia w istotny sposób wartość wskaźnika jakości (2).

Zdefiniujmy zatem względny wskaźnik

$$\Delta J = \frac{\hat{J}_{ZOH} - \hat{J}_{FROH}}{\hat{J}_{ZOH}} \cdot 100\% \quad (3)$$

będący procentową miarą tego, na ile optymalny układ regulacji z ekstrapolatorem zerowego rzędu jest gorszy od optymalnego układu z ekstrapolatorem FROH. Rysunek 3 przedstawia na wspólnym wykresie obszar, w którym otrzymano ujemną wartość β_{opt} oraz obszar, w którym względny wskaźnik jakości (3) jest większy niż 1%. Jak widać z rysunku, obszary te są rozłączne. Wynika z tego, że jedynie ujemna wartość prowadzi do wyraźnej poprawy jakości regulacji w analizowanym układzie. Należy podkreślić, że dotyczy jedynie układu regulacji, w którym obiektem jest inercja z opóźnieniem, a wartość zadana przyjmuje postać skoku jednostkowego. Otrzymany wynik jest zbliżony z wynikami znanymi z literatury [9, 12, 13], w których bazuje się na analizie położenia zer transmitancji dyskretnego układu otwartego.

LITERATURA

1. Åström K.J., Hagander P., Sternby J.: Zeros of sampled systems. *Automatica*, vol. 20 (1), 1984, p. 31-38.
2. Błachuta M. J.: On zeros of pulse transfer function. *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 44 (6), 1999, p. 1229-1234.
3. Fu Y., Dumont G.A.: Choice of samplings to ensure minimum-phase behavior. *IEEE Trans. Aut. Contr.* vol. 5, 1989, p. 560-563.
4. Fujarewicz K.: Gradient optimization of a fractional order hold, *Proc. of Seminar on Electrical Engineering. Poland, Istebna 2002.*
5. Fujarewicz K.: On-line gradient optimization of a fractional order hold. *Proc. of The 11th Mediterranean Conf. on Contr. and Automation. Rhodes 2003.*
6. Fujarewicz K., Gałuszka A.: Generalized Backpropagation Through Time for Continuous Time Neural Networks and Discrete Time Measurements. *Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2004, p. 190 -196.*
7. Fujarewicz K.: Optymalizacja układów ciągle-dyskretnych z ekstrapolatorem uławkowego rzędu. w: R. Gessing, T. Szkodny, *Automatyzacja procesów dyskretnych*, WNT, 2004, p. 35-43.
8. Hagiwara T., Yuasa T., Araki M.: Stability o limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds. *Int. J. of Control*, vol. 58 (6), 1993, p. 1325-1346.
9. Ishitobi M.: Criteria for stability of zeros of sampled systems. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 141 (6), 1994, p. 396-402.
10. Ishitobi M.: Stability of zeros of sampled systems with fractional order hold. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 143 (3), 1996, p. 296-300.
11. Keviczky L., Kumar K.S.P.: On the applicability of certain optimal control methods. *Proc. 8th IFAC World Congress*, vol. 1, Japan, Kyoto 1981, p. 47 - 480.

12. Passino K.M., P.J. Antsaklis: Inverse stable sampled low-pass systems. *Int. J. Control*, vol. 47 (6), 1988, p. 1905-1913.
13. Phillips C.L., H.T. Nagle Jr: *Digital control system analysis and design*, Prentice-Hall, 1984.
14. Tuschak R.: Relations between transfer and pulse transfer functions of continuous processes. *Proc. 8th IFAC World Congress*, vol. 1, Japan, Kyoto 1981, p. 429-433.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Abstract

This work deals with a problem of optimization of a fractional order hold (FROH) parameter. All approaches known from literature and related to this problem are based on location of limiting zeros of open loop discrete system composed of a hold device, continuous-time system and a sampler in series. A commonly used approach is an analysis of zero location of such a system with special attention paid on so called limiting zeros obtained when the sampling time tends to zero. It was shown that the FROH element with the parameter $-1 < \beta < 0$ locates all zeros of the sampled system in the unit circle for larger class of continuous time systems than the ZOH and FOH devices. The present work describes results of a gradient-based optimization of a parameter β of a fractional order hold (FROH) in a control system composed of an inertia with delay and PID controller. The mapping of the optimal value of the parameter β w.r.t. the time constant and the delay has been obtained. We observed that only negative value of the parameter β causes substantial improvements of the control quality in comparison to the control system with the zero order hold in sense of the integral-quadratic performance index. The result confirms results known from the literature and based on location of zeros.