ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 145 Nr kol. 1728

Ryszard GESSING
Politechnika Śląska

REALIZOWALNOŚĆ REGULACJI STAŁOWARTOŚCIOWEJ I CZĘŚCIOWE ODSPRZĘGANIE OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH

Streszczenie. Sformułowano konieczne warunki realizowalności regulacji stałowartościowej dla obiektów wielowymiarowych bez całkowania i z całkowaniem. Wprowadzono pojęcia łącznego wzmocnienia i stopnia niezależności wyjść obiektu w stanie ustalonym. Rozpatrzono częściowe odsprzęganie stanów ustalonych i szybkich przebiegów przejściowych. To ostatnie bazuje na przekształceniu transmitancji macierzowej obiektu do postaci zawierającej w każdym wierszu na przekątnej element o najmniejszym rzędzie względnym transmitancji. Pokazano także, że przez odpowiedni dobór wartości nasyceń sterowania można częściowo zachować własność odsprzęgania szybkich przebiegów przejściowych.

IMPLEMENTABILITY OF REGULATION AND PARTIAL DECOUPLING OF MIMO PLANTS

Summary. Some necessary conditions of implementability of regulation of MIMO plant without and with integrators are formulated and proved in the paper. The notions of the join gain and degree of independence of the outputs of the plant in steady state are introduced. Partial decoupling of steady states and of fast transients are considered. The latter is based on an original approach consisting in transforming the decoupled matrix transfer function (MTF) of the plant to the form having on its diagonal the elements with smallest relative order in each row. It is also shown that by the appropriate choice of the control saturations the decoupling of fast transients may be partially retained.

1. Wprowadzenie

Charakterystyczną własnością układów wielowymiarowych ze sprzężeniem zwrotnym jest występowanie interakcji pomiędzy poszczególnymi pętlami regulacji. W porównaniu do układów jednowymiarowaych interakcja wprowadza dodatkowe trudności w analizie i projektowaniu takich układów, co jest szczegółowo omawiane w literaturze, np. [6], [7]. Wymienione monografie i książka [5] reprezentują aktualny stan wiedzy w tej dziedzinie.

Niniejsza praca dotyczy trzech zagadnień: pierwsze – to realizowalność regulacji stałowartościowej obiektów wielowymiarowych, drugie – to częściowe odsprzęganie stanów ustalonych i szybkich przebiegów przejściowych i trzecie – to wpływ nasyceń sterowania.

Pierwsze zagadnienie dotyczy możliwości realizowania dowolnych założonych wartości ustalonych wyjść obiektu wielowymiarowego. W związku z tym sformułowano w pracy konieczne warunki realizowalności regulacji stałowartościowej zarówno dla obiektów wielowymiarowych bez całkowania, jak i z całkowaniem. Bliskie temu zagadnieniu są rozważania pracy [1], w której rozpatrzono zagadnienie odwracalności układu w stanie ustalonym (steady state invertibility) dla układów bez całkowania. Należy podkreślić, że bez spełnienia sformułowanych w niniejszej pracy warunków żaden rodzaj regulacji stałowartościowej (ani w układzie zamkniętym, ani w układzie otwartym) nie może być zrealizowany.

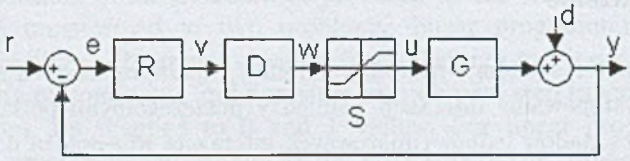
Odsprzęganie jest innym zagadnieniem szeroko dyskutowanym w literaturze, gdzie rozróżnia się odsprzęganie statyczne i dynamiczne [5], [2], [4]. Rozpatrywane w niniejszej pracy odsprzęganie stanów ustalonych jest zmodyfikowanym odsprzęganiem statycznym rozpatrywanym w [5]. Wprowadzona modyfikacja pozwala na zachowanie tej samej wartości dla wprowadzonego w niniejszej pracy *łącznego wzmocnienia* obiektu pierwotnego i obiektu odsprzężonego. Zastosowano natomiast oryginale podejście do odsprzęgania szybkich przebiegów nieustalonych, wykorzystujące rząd względny elementów transmitancji obiektu.

Trzecim zagadnieniem jest uwzględnienie nasyceń sterowania. Pokazuje się, że chociaż pojawienie się nasyceń przeważnie rozstraja odsprzęganie przebiegów szybkich, to jednak poprzez odpowiedni dobór nasyceń poszczególnych sterowań to odsprzęganie może być częściowo zachowane.

Do oryginalnych wyników pracy należy: sformułowanie i udowodnienie koniecznych warunków realizowalności regulacji stałowartościowej obiektów wielowymiarowych bez i z całkowaniem; modyfikacja odsprzęgania stanów ustalonych i zaproponowanie nowej metody odsprzęgania szybkich przebiegów przejściowych; pokazanie, że poprzez odpowiedni dobór wartości nasyceń sterowania można otrzymać częściowe odsprzężenie przebiegów szybkich.

2. Układ wielowymiarowy

Przedmiotem rozważań będzie układ wielowymiarowy, którego schemat blokowy przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Schemat blokowy układu wielowymiarowego

Załóżmy, że obiekt G o wielu wejściach i wielu wyjściach opisany jest przez

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad (d = 0) \tag{1}$$

gdzie $Y(s) = [Y_1(s), ..., Y_p(s)]'$, $U(s) = [U_1(s), ..., U_p(s)]'$ są transformatami Laplace'a odpowiednio wektorów wyjścia y i wejścia u; podobnie jak c, v, w i d są one p-wymiarowe; r i d oznaczają odpowiednio wartość zadaną i zakłócenie wyjścia obiektu; $G(s)$ jest $p \times p$ transmitancją macierzową (TM) określoną przez

$$G(s) = [G_{ij}(s)] \quad i, j = 1, 2, ..., p \tag{2}$$

gdzie $G_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, ..., p$ są elementami macierzy $G(s)$. Oczywiście, $G_{ij}(s)$ jest transmitancją skalarną pomiędzy j-tym wejściem $U_j(s)$ i i-tym wyjściem $Y_i(s)$. Załóżmy, że

$$G_{ij}(s) = \frac{b_0^{ij} s^{m_{ij}} + b_1^{ij} s^{m_{ij}-1} + ... + b_{m_{ij}}^{ij}}{a_0^{ij} s^{n_{ij}} + a_1^{ij} s^{n_{ij}-1} + ... + a_{n_{ij}}^{ij}} \tag{3}$$

gdzie m_{ij}, n_{ij}, $m_{ij} < n_{ij}$, i, $j = 1, 2, ..., p$ są odpowiednio stopniami wielomianów licznika i mianownika transmitancji $G_{ij}(s)$.

Przyjmujemy, że regulator R opisany jest diagonalną TM:

$$R(s) = diag[R_1(s), ..., R_p(s)], \quad R_i(s) = k_i Q_i(s) \tag{4}$$

gdzie k_i i $Q_i(s)$, $i = 1, 2, ..., p$ określają odpowiednio wzmocnienie i dynamikę i-tego regulatora.

Blok D wykorzystamy do częściowego odsprzęgania układu i dla poszczególnych przypadków będzie określony w dalszym ciągu. Blok S uwzględnia nasycenia sygnału sterowania (wejścia) u, które będzie rozważane w rozdziale 6 pracy.

Będziemy mówić, że element $G_{ij}(s)$ nie posiada całkowania (lub posiada całkowanie), jeżeli odpowiednio $b_{m_{ij}}^{ij} \neq 0, a_{n_{ij}}^{ii} \neq 0$ (lub $b_{m_{ij}}^{ij} \neq 0, a_{n_{ij}}^{ij} = 0, a_{n_{ij}-1}^{ij} \neq 0$. Przypadek występowania podwójnego lub wyższego rzędu całkowania nie będzie rozważany w niniejszej pracy.

3. Realizowalność regulacji stałowartościowej

Warunkiem koniecznym pracy układu wielowymiarowego jest jego stabilność. Zapewnienie stabilności jest podstawowym wymaganiem sprawdzanym zazwyczaj przy projektowaniu układu. Stabilność układu nie będzie analizowana w niniejszej pracy, chociaż zakładamy, że rozważany układ jest stabilny. Natomiast zgodnie z wiedzą autora niniejszej pracy warunek realizowalności regulacji stałowartościowej obiektów wielowymiarowych, w postaci analizowanej w niniejszej pracy nie był rozpatrywany w literaturze, chociaż bez jego spełnienia żaden układ wielowymiarowy nie może właściwie pracować. Jak to będzie pokazane poniżej, warunek ten jest ściśle związany z właściwościami obiektu wielowymiarowego.

Należy zauważyć, że w [1] rozpatrywano zagadnienie odwracalności układu w stanie ustalonym (steady state invertibility), przy wykorzystaniu opisu w postaci równań

stanu. Dla przypadku układów bez całkowania, do których ograniczono się w [1], zagadnienie to jest bliskie rozpatrywanemu w niniejszej pracy warunkowi realizowalności. W niniejszej pracy rozpatrywany jest także przypadek obiektów z całkowaniem, a ponadto posługujemy się opisem w postaci transmitancji macierzowych (TM), co prowadzi do uproszczenia rozważań.

Definicja. Mówimy, że regulacja stałowartościowa obiektu wielowymiarowego jest realizowalna, jeżeli dla założonych dowolnych stałych wartości wyjść y_i $i = 1, 2, ..., p$ można dobrać takie stałe wartości wejść u_j (lub w przypadku obiektów z całkowaniem odpowiednich funkcji $u_j(t) \to const$, gdy $t \to \infty$), że w stanie ustalonym wyjścia y_i przyjmują założone wartości.

3.1. Obiekty bez całkowania

Lemat 1. Załóżmy, że elementy obiektu $G(s)$ nie zawierają całkowania, tzn. $k_{ij} = G_{ij}(0) = b^{ij}_{m_{ij}}/a^{ij}_{n_{ij}} < \infty, i, j = 1, 2, ..., p$. Wtedy warunkiem koniecznym realizowalności regulacji stałowartościowej jest

$$detG(0) \neq 0 \tag{5}$$

Dowód. Łatwo zauważyć, że jeżeli warunek (5) nie jest spełniany, to nie jest możliwy dobór stałych wejść u_j $j = 1, 2, ..., p$, dla dowolnie założonych stałych wyjść y_i $i = 1, 2, , ..., p$, gdyż wiersze macierzy wzmocnień $G(0)$ są liniowo zależne.

□

W [5] podkreśla się, że warunek (5) jest warunkiem odsprzęgania statycznego (static decoupling) dla obiektów bez całkowania.

3.2. Obiekty z całkowaniem

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy niektóre elementy $G_{ij}(s)$ TM obiektu $G(s)$ mają całkowanie, tzn. dla pewnych i, j $b^{ij}_{m_{ij}} \neq 0$, $a^{ij}_{n_{ij}} = 0$, $a^{ii}_{n_{ij}-1} \neq 0$.

Dla elementów $G_{ij}(s)$ bez całkowania oznaczmy

$$k^0_{ij} = \frac{b^{ij}_{m_{ij}}}{a^{ij}_{n_{ij}}} \quad \text{gdy} \quad b_{m^{ij}_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} \neq 0 \tag{6}$$

a dla elementów $G_{ij}(s)$ z całkowaniem

$$k^I_{ij} = \frac{b^{ij}_{m_{ij}}}{a^{ij}_{n_{ij}-1}} \quad \text{gdy} \quad b_{m^{ij}_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} = 0, \quad a^{ij}_{n_{ij}-1} \neq 0 \tag{7}$$

Niechaj G^{0I} jest $p \times p$ macierzą zawierającą w i-tym wierszu i j-tej kolumnie wzmocnienie określone przez (6) lub (7). Niechaj G^0 jest macierzą wynikającą z G^{0I} przez podstawienie w miejsce k^I_{ij} zera; podobnie niechaj G^I jest macierzą wynikającą z G^{0I} przez podstawienie w miejsce k^0_{ij} zera. Tak więc macierze G^0 i G^I zawierają tylko odpowiednio wzmocnienia k^0_{ij} i k^I_{ij}, oraz

$$G^0 + G^I = G^{0I} \tag{8}$$

Zauważmy, że w stanie ustalonym, gdy $y_i = const$, $i = 1, 2, ..., p$, wejścia u_j, $j = 1, 2, ..., p$ obiektu muszą spełniać zależność

$$G^I u = 0 \tag{9}$$

Rzeczywiście, w stanie ustalonym i-te wyjście y_i spełnia zależność

$$y_i = g_i^0 u + \int_0^\infty g_i^I u(t)dt = const \tag{10}$$

gdzie g_i^0 i g_i^I jest i-tym wierszem odpowiednio macierzy G^0 i G^I. Aby otrzymać określoną wartość całki występującej w (10), musi być $g_i^I u(t) \to 0$, gdy $t \to \infty$, zatem w stanie ustalonym musi być $g_i^I u = 0$, co uzasadnia (9).

Załóżmy, że *rząd* $G^I = l \leq p$ i $U = \{u : G^I u = 0\}$. Wtedy wartości u w stanie ustalonym należą do $(p-l)$-wymiarowej podprzestrzeni U. Gdy $l = p$, wtedy $u = 0$, co wynika z zależności $G^I u = 0$ i *rząd* $G^I = l$.

Bez ograniczenia ogólności rozważań załóżmy, że l pierwszych wierszy G^I jest liniowo niezależnych. Oznaczmy przez G_l^I macierz $l \times p$, utworzoną z l pierwszych wierszy macierzy G^I. Niechaj

$$G_l^I = [G_{ll}^I \;\; G_{l(p-l)}^I] \tag{11}$$

gdzie G_{ll}^I i $G_{l(p-l)}^I$ są macierzami blokowymi odpowiednio $l \times l$ i $l \times (p-l)$-wymiarowymi. Załóżmy, że macierz G_{ll}^I jest nieosobliwa. Niechaj $u = [\underline{u}, \bar{u}]$, gdzie $\underline{u} = [u_1, ..., u_l]'$, $\bar{u} = [u_{l+1}, ..., u_p]'$. Wtedy z (9) i (11) wynika

$$G_{ll}^I \underline{u} + G_{l(p-l)}^I \bar{u} = 0 \tag{12}$$

$$\underline{u} = -(G_u^I)^{-1} G_{l(p-l)}^I \bar{u} \tag{13}$$

Z zależności (10) otrzymujemy

$$G^0 u + G^I z = y \tag{14}$$

gdzie $z = [z_1, ..., z_p]'$, oraz

$$z_i = \int_0^\infty \hat{u}_i(t)dt, \quad i = 1, 2, ..., p, \quad \hat{u}_i(t) = u_i(t) - u_i \tag{15}$$

przy czym

$$g_i^I z = \int_0^\infty g_i^I u(t)dt \tag{16}$$

co wynika z określenia $\hat{u}(t)$ i z (9). Ważne jest, że z_i określone przez (15) powinno być skończone, podczas gdy $\int_0^\infty u_i(t)dt$ może być nieskończona. Uwzględniając (13) w (14) otrzymujemy

$$G^0 \cdot \begin{bmatrix} -(G_{ll}^I)^{-1} G_{l(p-l)}^I \\ I_{p-l} \end{bmatrix} \bar{u} + G^I z = y \tag{17}$$

gdzie I_{p-l} jest $(p-l)\times(p-l)$ – wymiarową macierzą jednostkową.

Z (17) wynika następujący lemat.

Lemat 2. Dla obiektu wielowymiarowego $G(s)$ zawierającego elementy z całkowaniem, dla którego rząd $G^I = l$ i G^I_{ll} jest macierzą nieosobliwą, warunkiem koniecznym realizowalności regulacji stałowartościowej jest

$$rzad\left[\, G^0 \cdot \begin{bmatrix} -(G^I_{ll})^{-1}G^I_{l(p-l)} \\ I_{p-l} \end{bmatrix} \; G^I \,\right] = p \tag{18}$$

□

W przypadku ogólnym występująca w (18) macierz ma wymiary $p\times(2p-l)$. W przypadku szczególnym, gdy elementy z całkowaniem występują tylko w l pierwszych kolumnach macierzy $G(s)$, kolumny zerowe macierzy G^I występującej w (18) można skreślić i wymiar otrzymanej w ten sposób macierzy występującej w (18) jest $p\times p$.

3.2.1. Przypadki szczególne

Dla pewnych przypadków szczególnych warunek konieczny realizowalności regulacji stałowartościowej może być prostszy, co pokazują poniższe lematy.

Lemat 3. Załóżmy, że elementy z całkowaniem występują tylko w l kolumnach macierzy $G(s)$ i *rząd* $G^I = l \le p$. Oznaczmy

$$G' = [k'_{ij}], \quad i,j = 1,2,...,p, \tag{19}$$

gdzie

$$k'_{ij} = k^I_{ij}, \quad \text{gdy} \quad b^{ij}_{m_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} = 0, a_{n_{ij}-1} \neq 0; \tag{20}$$

$$k'_{ij} = 0, \quad \text{gdy } b^{ij}_{m_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} \neq 0, \tag{21}$$

i w j-tej kolumnie występuje element z całkowaniem;

$$k'_{ij} = k^0_{ij}, \quad \text{gdy } b^{ij}_{m_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} \neq 0, \tag{22}$$

i w j-tej kolumnie nie występuje element z całkowaniem. Wtedy warunkiem koniecznym realizowalności regulacji stałowartościowej dla obiektu $G(s)$ jest

$$detG' \neq 0 \tag{23}$$

Dowód. Z założeń wynika, że jeżeli w j-tej kolumnie występuje co najmniej jeden element całkujący, wtedy w stanie ustalonym $u_j = 0$, co uzasadnia podstawienie (21). Gdy warunek (23) nie jest spełniony, wtedy wiersze macierzy G' są zależne liniowo i dla dowolnych założonych stałych wartości wyjść y_i, $i = 1,2,...,p$ nie można znaleźć takich stałych wejść u_j i $z_j = \int_0^\infty u(t)dt$ (te ostatnie dla j-ów z całkowaniem), dla których wyjścia y_i, $i = 1,2,...,p$ w stanie ustalonym przyjmują założone wartości.

□

Lemat 4. Załóżmy, że jeżeli w i-tym wierszu występuje element z całkowaniem, to wszystkie elementy i-tego wiersza zawierają element z całkowaniem. Oznaczmy

$$G'' = [k''_{ij}], \quad i,j = 1,2,...,p \tag{24}$$

gdzie

$$k''_{ij} = k^I_{ij}, \quad \text{gdy } b_{m_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} = 0, a_{n_{ij}-1} \neq 0 \tag{25}$$

$$k''_{ij} = k^0_{ij}, \quad \text{gdy } b_{m_{ij}} \neq 0, a^{ij}_{n_{ij}} \neq 0 \tag{26}$$

Wtedy warunkiem koniecznym realizowalności regulacji stałowartościowej dla obiektu $G(s)$ jest

$$detG'' \neq 0 \tag{27}$$

□

Dowód lematu 4 wynika z (9) i z poprzednich rozważań.

4. Wskaźniki dla obiektów bez całkowania

Dla obiektu $G(s)$ bez elementów z całkowaniem macierz $G(0)$ zawiera wzmocnienie k_{ij} poszczególnych kanałów i w stanie ustalonym dla stałych wartości wejść u_j i wyjść u_i mamy

$$G(0) = [k_{ij}], \quad y_i = k_{ij}u_j, \quad i,j = 1,2,...,p \tag{28}$$

Wydaje się, że celowe jest wprowadzenie wskaźnika charakteryzującego własności obiektu w stanie ustalonym w postaci *łącznego wzmocnienia* obiektu określonego przez

$$\kappa = |detG(0)| \tag{29}$$

Łączne wzmocnienie obiektu zależy zarówno od wzmocnień k_{ij} poszczególnych kanałów obiektu, jak i od stopnia niezależności jego wyjść y_i.

Z punktu widzenia regulacji obiektów wielowymiarowych stopień niezależności liniowej wyjść y_i jest szczególnie interesujący. Aby określić ten stopień, wprowadzimy oznaczenie

$$G(0) = [k^1, k^2, ..., k^p] \tag{30}$$

gdzie k^i jest i-tą kolumną macierzy $G(0)$. Niechaj $\|k^i\|$ oznacza normę euklidesową wektora k^i (która określa długość wektora k^i).

Dla *stopnia niezależności* ι proponujemy następujące określenie

$$\iota = \frac{|detG(0)|}{\|k^1\| \cdot \|k^2\| \cdot ... \cdot \|k^p\|} \tag{31}$$

Zatem *stopień niezależności* ι jest unormowanym łącznym wzmocnieniem κ obiektu.

Oba wprowadzone pojęcia *łącznego wzmocnienia* i *stopnia niezależności* można uzasadnić za pomocą rozważań algebraicznych prowadzących do geometrycznej interpretacji wielkości $|detG(0)|$ jako objętości równoległościanu o krawędziach określonych przez wektory k^i, $i = 1, 2, ..., p$. Można udowodnić, że $0 \leq \imath \leq 1$. Dla $\imath = 0$ wyjścia y_i $i = 1, 2, ..., p$ obiektu w stanie ustalonym są liniowo zależne, a dla $\imath > 0$ wyjścia obiektu są liniowo niezależne. Dla $\imath = 1$ obiekt jest statycznie odsprzężony.

5. Częściowe odsprzęganie

Dla częściowego odsprzęgania będziemy wykorzystywać odpowiednio dobraną macierz opisującą blok D z rys. 1. Ponieważ ograniczamy się tutaj do macierzy o stałych elementach, możemy otrzymać tylko częściowe odsprzężenie. Rozważania części 5 niniejszej pracy dotyczą przypadków, gdy obiekt $G(s)$ nie ma elementów z całkowaniem i nie występują nasycenia sygnału u, tzn. na rys. 1 $u = w$.

5.1. Odsprzęganie stanów ustalonych

Bez ograniczenia ogólności rozważań załóżmy, że $\det G(0) > 0$ (może to być osiągnięte przez odpowiednią zmianę znaków niektórych wejść u_j). Zastosujemy tutaj podobne podejście jak w [5], zmodyfikujemy go jednak w ten sposób, że łączne wzmocnienie κ obiektu odsprzężonego statycznie zostanie niezmienione. Aby to otrzymać, blok D z rys. 1 powinien być opisany przez następującą macierz

$$D_s = [G(0)]^{-1}[detG(0)]^{1/p}, \qquad detD_s = 1 \tag{32}$$

Rzeczywiście, odsprzężony obiekt zastępczy jest wtedy opisany przez

$$\begin{aligned} &\bar{G}_s(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = G(s)D_s, \qquad (d = 0) \\ \text{i} \quad &det\bar{G}_s(0) = detG(0)det(D_s) = detG(0), \end{aligned} \tag{33}$$

tak więc łączne wzmocnienie κ obiektu odsprzężonego pozostaje niezmienione.

Gdybyśmy zastosowali wzór (32) bez współczynnika $[detG(0)]^{1/p}$, jak to się robi w [5], wtedy mogłoby to spowodować znaczną zmianę łącznego wzmocnienia κ odsprzężnonego obiektu. Na przykład, dla macierzy $G(0)$ malejącej duże wartości wzmocnień na przekątnej macierz $[G(0)]^{-1}$ miałaby małe wzmocnienia i łączne wzmocnienie $\kappa = 1$ odsprzężnego obiektu $\bar{G}_s(0)$ byłoby wtedy znacznie mniejsze od łącznego wzmocnienia obiektu $G(0)$. W takim przypadku porównywanie uchybów w stanie ustalonym układu z obiektem $G(s)$ i obiektem odsprzężonym $\bar{G}_s(s)$ (w obu przypadkach z tym samym regulatorem R) byłoby nieuzasadnione, ponieważ takie odsprzężenie zmieniłoby znacznie łączne wzmocnienie obiektu.

5.2. Osprzęganie szybkich przebiegów przejściowych

Przedstawmy tutaj oryginalne podejście bazujące na TM obiektu i częściowo zainspirowane przez [8].

Interesujemy się teraz prędkością zmian odpowiedzi czasowej transmitancji $G_{ij}(s)$ występującej bezpośrednio po nagłej (skokowej) zmianie sterowania u_j. Zauważmy, że

prędkość zmian odpowiedzi skokowej transmitancji $G_{ij}(s)$ w chwilach początkowych jest zależna od rzędu względnego transmitancji $G_{ij}(s)$. Dla mniejszego rzędu względnego - otrzymujemy szybsze zmiany początkowe. Ostanie spostrzeżenie może być uzasadnione, jak następuje. Niechaj $G'(s)$ i $G''(s)$ są skalarnymi transmitancjami o rzędzie względnym odpowiednio l' i l'', $l' < l''$. Niechaj $g'(t)$ i $g''(t)$ są odpowiedziami skokowymi obu transmitancji, a $g'^{(l')}(t)$ i $g''^{(l')}(t)$ ich pochodnymi l'-tego rzędu. Wtedy $g'^{(l')}(0^+) \neq 0$, a $g''^{l'}(0^+) = 0$, co uzasadnia stwierdzenie o szybszych początkowych zmianach przebiegu $g'(t)$.

Oznaczmy przez l_{ij} rząd względny transmitancji $G_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, ..., p$. Niechaj $l_i = \min_j l_{ij}$. Tak więc l_i określa minimalny rząd względny transmitancji $G_{ij}(s)$ występujących w i-tym wierszu. Dla różnych wierszy i minimalny rząd względny l_i może być różny. Oznaczmy przez G_f macierz wzmocnień dla szybkich zmian, określoną jak następuje

$$G_f = [k^*_{ij}], \quad i, j = 1, 2, ...p, \tag{34}$$

gdzie

$$k^*_{ij} = \frac{b_0^{ij}}{a_0^{ij}} \quad \text{dla tych } ij, \text{ dla ktrych } l_{ij} = l_i \tag{35}$$

$$k^*_{ij} = 0 \quad \text{dla tych } ij, \text{ dla ktrych } l_{ij} > l_i \tag{36}$$

Zatem w i-tym rzędzie elementy niezerowe macierzy G_f występują tylko w tych miejscach ij, w których rząd względny $G_{ij}(s)$ jest równy l_i. Pozostałe elementy i-tego rzędu są zerowe.

Zauważmy, że macierz G_f pokrywa się z macierzą B^* z pracy [3]. Macierz B^* otrzymana jest tam przy zastosowaniu opisu w postaci równań stanu i wzory do jej wyznaczenia wymagają bardziej pracochłonnych obliczeń (wielokrotnego wykonania mnożenia macierzy). Założenie o nieosobliwości B^* wykorzystywane jest w [3] do otrzymania w pełni odsprzężonego układu.

Załóżmy, że macierz G_f jest nieosobliwa. Oznaczmy

$$D_f = G_f^{-1}(detG_f)^{1/p}, \qquad detD_f = 1 \tag{37}$$

wtedy $G_f D_f = diag[\delta, \delta, ..., \delta]$ $\delta = (detG_f)^{1/p}$ i możemy sformułować następujący lemat.

Lemat 5. Załóżmy, że istnieje G_f^{-1}. Wtedy w i-tym wierszu TM $\bar{G}_f(s) = G(s)D_f$ element leżący na przekątnej ma rząd względny l_i, który jest mniejszy od rzędu względnego innych elementów i-tego wiersza (różne elementy na przekątnej mogą zawierać elementy z różnymi rzędami względnymi l_i). Dodatkowo $det\bar{G}_f(0) = detG(0) = \kappa$, tzn. łączne wzmocnienie odsprzężonego obiektu $\bar{G}_f(s)$ jest takie same jak obiektu $G(s)$.

□

Można przypuszczać, że odsprzężenie szybkich przebiegów przejściowych można otrzymać, jeżeli w schemacie z rys. 1 blok D jest opisany przez macierz D_f określoną przez (37). Rzeczywiście, w tym przypadku najszybsze zmiany początkowe występują w każdej i-tej pętli układu, tzn. regulator R_i silniej oddziałuje na szybkie zamiany wyjścia y_i

niż inne regulatory R_j, $j = i$. To spostrzeżenie zostało potwierdzone w przeprowadzonych badaniach symulacyjnych.

W przypadku ogólnym stopień niezależności i obiektu odsprzężonego $\bar{G}_f(s) = G(s)D_f$ jest zazwyczaj różny od stopnia niezależności obiektu $G(s)$. Oznacza to, że odsprzężenie przebiegów szybkich może poprawić lub pogorszyć dokładność układu w stanie ustalonym.

5.3. Pełne odsprzęganie

Interesującą własność mają obiekty o TM $G(s)$, których elementy $G_{ij}(s)$ mają następującą własność

$$G_{ij}(s) = c_{ij}G_i(s) \tag{38}$$

gdzie $G_i(s)$ jest transmitancją opisującą "wspólną" dynamikę i-tego wiersza (która może być różna dla różnych wierszy i), a c_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., p$ są danymi współczynnikami.

Oznaczmy

$$G_c = [c_{ij}], \quad i, j = 1, 2, ..., p, \quad D_c = G_c^{-1}(detG_c)^{1/p} \tag{39}$$

Wtedy

$$G(s) = diag[G_1(s), ..., G_p(s)]G_c \tag{40}$$

$$G(s)D_c = (detG_c)^{1/p}diag[G_1(s), ..., G_p(s)] \tag{41}$$

Wniosek 1. Gdy elementy $G_{ij}(s)$ mają postać (38), a macierz G_c (39) jest nieosobliwa, wtedy maciearz D_c określona przez (39) daje obiekt w pełni odsprzężony, dla którego TM (41) zawiera zera poza przekątną.

□

6. Uwzględnienie nasyceń sterowania

Jak to wynika z przeprowadzonych badań symulacyjnych, po nagłej zmianie pobudzeń układu występują bardzo duże wartości sterowania, co w praktyce może być nierealizowalne. Dlatego też teraz rozpatrzymy przypadek, w którym sygnały sterujące u_j $j = 1, 2, ..., p$ mają nasycenie. Uwzględnione to jest w schemacie blokowym na rys. 1 za pomocą bloku S o wejściu $w = [w_1, w_2, ..., w_p]'$ i wyjściu $u = [u_1, u_2, ..., u_p]'$ opisanym przez

$$u_i = \begin{cases} u_i^{mx} & \text{dla} \quad w_i \geq u_i^{mx} \\ w_i & \text{dla} \quad u_i^{min} \leq w_i \leq u_i^{mx}, \quad i = 1, 2, ...p \\ u_i^{min} & \text{dla} \quad w_i \leq u_i^{min} \end{cases} \tag{42}$$

gdzie u_i^{min} i u_i^{mx} oznaczają wartości dolnych i górnych nasyceń sygnału u_i.

Jeżeli w układzie występują nasycenia sygnałów sterujących, wtedy odsprzęganie przebiegów szybkich zazwyczaj zostaje rozstrojone. Zostało to potwierdzone w badaniach

symulacyjnych. Ale w pewnych przypadkach przez odpowiedni dobór nasyceń sygnałów sterujących można częściowo zachować odsprzężenie przebiegów szybkich.

Załóżmy, że chcemy usunąć wpływ wybranego j^*-tego wejścia v_{j^*} na wyjścia y_i, $i = 1, 2, ..., p$, $i \neq j^*$. Załóżmy, że macierz G_f (34) jest nieosobliwa. Oznaczmy przez $k_i^* = [k_{i1}^*, k_{i2}^*, ..., k_{ip}^*]$ i $d_{j^*} = [d_{1j^*}, d_{2j^*}, ..., d_{pj^*}]'$ i-ty wiersz i j-tą kolumnę odpowiednio macierzy G_f i D_f. Ponieważ $i \neq j^*$, więc

$$k_i^* d_{j^*} = 0 \tag{43}$$

Z (43) wynika, że przy sterowaniu u bez nasyceń występuje pomijalny wpływ nagłej (np. skokowej) zmiany sygnału v_{j^*} na szybką początkową zmianę wyjść y_i, $i = 1, 2, ..., p$, $i \neq j^*$.

Wybierzmy teraz wartość nasyceń sterownia, tak że dla tych i, dla których $d_{ij^*} \neq 0$, wartości u_i^{mx} są proporcjonalne do $|d_{ij^*}|$, tzn.

$$\begin{gathered} u_i^{mx} = c|d_{ij^*}|, \quad c \in R^+ \quad \text{gdy} \quad d_{ij^*} \neq 0 \\ \text{i} \quad u_i^{min} = -u_i^{mx} \end{gathered} \tag{44}$$

Zauważmy, że dla tych i, dla których $d_{ij^*} = 0$, wejście v_{j^*} generuje $u_i = 0$ i wybór u_i^{mx} nie ogrywa wtedy żadnej roli.

Transmitancje $G_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, ..., p$ można rozwinąć w szeregi o postaci

$$G_{ij}(s) = \sigma_1^{ij} s^{-l_i} + \sigma_2^{ij} s^{-(l_i+1)} + ... \tag{45}$$

gdzie σ_1^{ij}, σ_2^{ij},... są współczynnikami rozwinięcia w szereg, a l_i jest najmniejszym rzędem względnym transmitancji $G_{ij}(s)$ i-tego wiersza. Zauważmy, że $\sigma_1^{ij} = k_{ij}^*$, $i, j = 1, 2, ..., p$, a zatem najszybsze zmiany początkowe odpowiedzi impulsowej transmitancji $G_{ij}(s)$ są opisane przez pierwszy wyraz szeregu (45) (odpowiadający l_i-krotnemu całkowaniu).

W układzie z rys. 1, z blokiem D opisanym przez macierz D_f, szybkie początkowe zmiany wielkości $y_i^{(l_i-1)}(t)$ wynikające z pierwszego wyrazu szeregu (45) są opisane przez

$$y_i^{(l_i-1)}(t) = \sum_{j=1}^{p} k_{ij}^* \int_0^t u_j(\tau) d\tau \tag{46}$$

Niechaj $v_{j^*}(t)$ przyjmuje duże wartości w pewnym przedziale $0 < t < \tau_s$ w wyniku nagłej zmiany pobudzenia j^*-tego wyjścia y_{j^*} w chwili $t = 0$. Wtedy sterowania $u_j(t)$ osiągają nasycenia (44), tzn. $u_j(t) = u_j^{mx} sgn d_{jj^*} = c d_{jj^*}$, dla $0 < t < \tau_s$, $j = 1, 2, ..., p$. Uwzględniając to i (43) w (46), otrzymujemy

$$y_i^{(l_{i^*}-1)}(t) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < t < \tau_s, \tag{47}$$

co oznacza, że występuje pomijalny wpływ dużych wartości v_{j^*} na szybkie zmiany wyjść y_i, $i \neq j^*$. Własność ta została potwierdzona na drodze symulacyjnej. Jeden z przykładów opisany jest poniżej.

Wniosek 2. Załóżmy, że w układzie z rys. 1 blok D jest opisany przez macierz D_f (37) oraz że dla wybranego j^* wartości nasyceń sterowania u spełniają zależności (44), wtedy w układzie występuje częściowe odsprzężenie przebiegów szybkich; Ostatnie stwierdzenie oznacza, że wpływ j^*-tego sterowania v_{j^*} na szybkie przebiegi przejściowe wyjść y_i, $i \neq j^*$ jest pomijalnie mały.

□

7. Przykład

Rozważmy układ z rys. 1, w którym TM $G(s)$ jest opisana przez

$$G_{11} = \frac{5}{2s+1}, \quad G_{12} = \frac{4}{2s+1}$$
$$G_{21} = \frac{3.5}{s^2+2s+4}, \quad G_{22} = \frac{s+6}{s^2+s+4} \tag{48}$$

Zatem, macierz $G(0)$ jest nieosobliwa i dla obiektu (48) regulacja stałowartościowa może być zrealizowana.

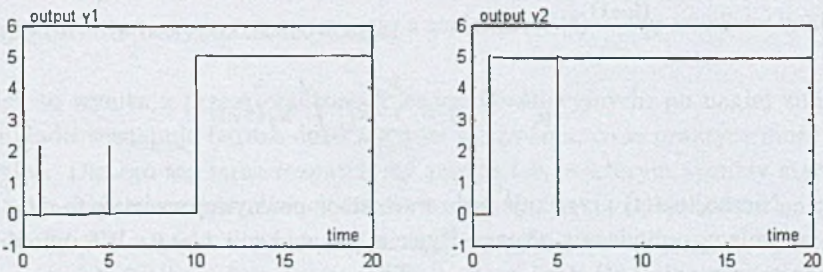
Załóżmy, że regulator $R(s)$ jest opisany przez

$$R(s) = diag[200, 200] \tag{49}$$

tzn. w obu pętlach zastosowano regulatory P.

Załóżmy, że wektory wartości zadanej i zakłócenia są opisane odpowiednio przez $r = [5 \cdot 1(t-10), 5 \cdot 1(t-1)]'$ i $d = [0, -5 \cdot 1(t-5)]'$.

Przebiegi odpowiedzi czasowych układu z rys. 1 bez odsprzęgania D ($D = I_2$ - macierz jednostkowa) i bez nasyceń (tzn. $u = w$) otrzymane przy zastosowaniu programu SIMULINK pokazane są na rys. 2. W wyniku interakcji na wykresie wyjścia y_1 występują podobne do impulsów szybkie przebiegi przejściowe (dla $t \approx 1$ i dla $t \approx 5$) oraz brak zauważalnego przebiegu przejściowego na wykresie y_2 (dla $t \approx 10$).



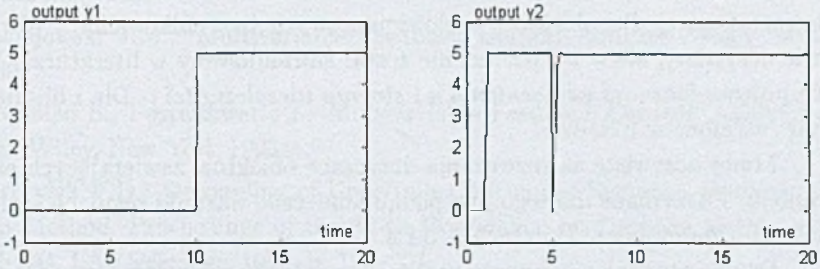
Rys. 2. Wykresy przebiegów czasowych wyjść y_1 i y_2 bez odsprzęgania i bez nasyceń

Aby otrzymać układ z odsprzęganiem przebiegów szybkich, obliczamy z (34), (37) i (48)

$$G_f = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} 0.6325 & -1.2649 \\ 0 & 1.5811 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

W układzie z rys. 1, w którym $D = D_f$ i nasycenia nie występują (tzn. w którym $u = w$), na wykresie y_1 znikają podobne do impulsów przebiegi szybkie, ale w sterowaniu u_1 i u_2 dla $t \approx 1, t \approx 5, t \approx 10$ pojawiają się bardzo wysokie impulsy (od 620 do ponad 1600). Takie sterowania w praktyce są nierealizowalne.

Aby otrzymać realizowalne sterowanie, rozważmy układ z rys. 1, w którym $D = D_f$ i nasycenia S zgodnie z (44) i (50) przyjmują wartości $u_1^{mx} = 12.649$ i $u_2^{mx} = 15.811$ (proporcjonalnie do drugiej kolumny macierzy D_f) oraz $u_1^{min} = -u_1^{mx}$ i $u_2^{min} = -u_2^{mx}$. Wykresy odpowiedzi czasowych przedstawione są na rys. 3. Widać, że podobne do impulsów przebiegi szybkie w wykresie y_1 zniknęły. Można zauważyć, że odsprzężenie przebiegów szybkich można otrzymać dla różnych wartości u_1^{mx} i u_2^{mx}, byleby tylko spełniały one warunek $u_2^{mx}/u_1^{mx} = 1.5811/1.2649 = 1.25$. Na przykład, w układzie występuje również odsprzężenie przebiegów szybkich dla $u_1^{mx} = 10$ i $u_2^{mx} = 12.5$. Oczywiście, większe wartości u_1^{mx} i u_2^{mx} dają szybszy powrót przebiegu y_2 do wartości zadanej po pojawieniu się zakłócenia w chwili $t = 5$.



Rys. 3. Wykresy przebiegów czasowych wyjść y_1 i y_2 z odsprzęganiem $D = D_f$ i nasyceniach $u_1^{mx} = 12.649$, $u_2^{mx} = 15.811$

Interesujące jest to, że wybrane w ten sposób nasycenia powodują zniknięcie szybkich impulsów na wykresie y_1, także w układzie bez zastosowania macierzy odsprzęgającej D_f (tzn. gdy na rys. 1 $w = v$). Wynika to z faktu, że sam układ zamknięty powoduje występowanie odpowiednio dużych impulsów w sterowaniu o odpowiednich znakach, które obcinane przez dobrane nasycenia powodują częściowe odsprzęganie przebiegów szybkich. To zjawisko zaobserwowano również w innych przykładach.

Aby wyznaczyć dokładność układu w stanie ustalonym, zauważmy, że nasycenie S nie ma wpływu na tę dokładność (pod warunkiem że nasycenia u_1^{mx} i u_2^{mx} są większe od modułów sterowań u_1 i u_2 w stanie ustalonym). Załóżmy, że wartość zadana r przyjmuje daną stałą wartość, a $d = 0$. Wtedy w układzie bez odsprzęgania ($w = v$) uchyb e w stanie ustalonym jest określony przez

$$e = [I_2 + 200 \cdot G(0)]^{-1} r = \begin{bmatrix} 0.0019 & -0.0050 \\ -0.0011 & 0.0062 \end{bmatrix} r \tag{51}$$

Aby zastosować odsprzęganie stanów ustalonych obliczamy z (48) i (32)

$$G(0) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0.875 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0.75 & -2 \\ -0.4375 & 2.5 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Dla układu, w którym $D = D_s$, zależność uchybu e od wartości zadanej r w stanie ustalonym ma postać

$$e = [I_2 + 200 \cdot G(0) \cdot D_s]^{-1} r = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.0025 \end{bmatrix} r \tag{53}$$

Z porownania wzorów (51) i (53) widać, że macierz D_s powoduje istotne zmniejszenie uchybów ustalonych.

8. Wnioski końcowe

W pracy rozpatrzono pewne problemy związane z układami wielowymiarowymi przy zastosowaniu modeli w postaci transmitancji macierzowych.

Po pierwsze, w lemacie 1 sformułowano konieczny warunek realizowalności regulacji stałowartościowej dla obiektów wielowymiarowych bez całkowania. Warunek ten jest prawie oczywisty, ale w tej postaci nie został sformułowany w literaturze. Wprowadzono także pojęcia *łącznego wzmocnienia* κ i *stopnia niezależności* ι. Dla ι bliskiego zeru rosną uchyby ustalone w układzie.

Mniej oczywiste są rozważania dotyczące obiektów zawierających elementy z całkowaniem. Otrzymane dla tego przypadku konieczne warunki regulacji stałowartościowej zostały sformułowane w lematach 2, 3 i 4.

Drugie zagadnienie dotyczy częściowego odsprzęgania stanów ustalonych i szybkich przebiegów przejściowych za pomocą odpowiednio macierzy D_s i D_f o stałych elementach. Zaproponowano zmodyfikowane w stosunku do [5] podejście do odsprzęgania stanów ustalonych, polegające na zachowaniu przez odsprzężony obiekt *łącznego wzmocnienia* κ. Odsprzęganie przebiegów szybkich bazuje na obserwacji, że elementy z niższym rzędem względnym transmitancji mają szybsze zmiany początkowe odpowiedzi skokowej. To spostrzeżenie zostało wykorzystane do oryginalnego odsprzęgania szybkich przebiegów przejściowych za pomocą macierzy D_f. Zauważono również, że dla pewnych obiektów macierz D_c o stałych elementach zależnych od parametrów obiektu daje pełne odsprzężenie.

Trzecie zagadnienie rozpatrywane w pracy to uwzględnienie nasyceń sterowania. Jest ono istotne z punktu widzenia możliwości zastosowań otrzymanych rozwiązań. Okazuje się, że występowanie nasyceń sterowania zazwyczaj rozstraja odsprzęganie przebiegów szybkich. Pokazano jednak także, że przez odpowiedni dobór nasyceń sterowania u możemy zachować pomijalny wpływ jednej wybranej pętli na pozostałe pętle układu regulacji.

Podziękowanie

Praca została zrealizowana w okresie 2005-2006 i była częściowo finansowana przez Komitet Badań Naukowych, grant nr 3T11A02928.

LITERATURA

1. Davison E.J.: The Steady State Invertibility and Feedforward Control of Linear Time-Invariant Systems. IEEE Trans. on AC, August 1976, p. 529–534.
2. Desoer C., Gündes A.: Decoupling linear multi-input multi-output plant by dynamic output feedback. An algebraic theory. IEEE Trans. on AC 31 (8), 1986, p. 744–750.
3. Falb P.L., Wolovich W.A.: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE Trans. on AC, vol. AC-12, No. 6, December 1967, p. 651–659.
4. Goodwin G.C., Feuer A., Gómez G.: A state space technique for the evaluation of diagonalizing compensator. System and Control Letters, 32 (3), 1997, p. 173–177.
5. Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E.: Control Systems Design. Prentice Hall, New Jersey 2001.
6. Maciejowski J.M.: Multivariable Feedback Design. Addison-Wesley, Wokingham 1989.
7. Skogested S., Postlethwaite I.: Multivariable Feedback Control, Analysis and Design. Wiley, New York 1996.
8. Yurkevich V.D.: Decoupling of Uncertain Continuous Systems: Dynamic Contraction Method. Proceedings of the 34-th Conference on Decision and Control, New Orleans, LA-December, 1995, p. 196–201.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Abstract

Some necessary conditions of implementability of regulation of MIMO plant without and with integrators are formulated and proved in the paper. The notions of the join gain and degree of independence of the outputs of the plant in steady state are introduced. Partial decoupling of steady states and of fast transients are considered. The latter is based on an original approach consisting in transforming the decoupled matrix transfer function (MTF) of the plant to the form having on its diagonal the elements with smallest relative order in each row. It is also shown that by the appropriate choice of the control saturations the decoupling of fast transients may be partially retained.