ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 145 Nr kol. 1728

Mariusz KALETA
Politechnika Warszawska

METODA ALOKACJI KOSZTÓW INFRASTRUKTURALNYCH BILANSOWANIA RYNKU BEZ DOTACJI

Streszczenie. W przypadku złożonych struktur rynkowych mogą występować ograniczenia w swobodnym obrocie towarami, które wynikają z fizycznych właściwości infrastruktury niezbędnej do organizacji i prowadzenia handlu. W pracy jest przedstawiona nowa metoda alokacji kosztów, będących skutkiem tych ograniczeń na podmioty odpowiedzialne za ograniczenia w taki sposób, aby podmioty nie były zachęcane do zaostrzania i wprowadzania nowych ograniczeń. Problem alokacji wolnej od dotacji jest sprowadzony do wielokryterialnego zadania optymalizacji. Spośród rozwiązań efektywnych jest wybierane rozwiązanie jednakowo traktujące ograniczenia o takim samym lub zbliżonym wpływie w oparciu o relację preferencji wyrównująco racjonalnej.

A METHOD FOR INFRASTRUCTURE COSTS ALLOCATION FREE FROM SUBSIDIES DURING MARKET BALANCING

Summary. On complex market structures the limitations for free commodity trade related to physical properties of necessary infrastructure occur. The infrastructure costs arise as a result of these limitations. In the paper we present a new method for infrastructure costs allocation to make an incentives for market participants to mitigate the limitations. Allocation free form subsidies can be achieved by solving multicriteria linear programm. The concept of equitable rational preference relation is used to find nondominated allocation fairly treating the constraints of the same or similar strength.

1. Wprowadzenie

Rozważamy zagadnienie obrotu pojedynczym towarem w strukturze rynkowej. Uczestnicy rynku składają oferty handlowe kupna lub sprzedaży towaru. W określonym momencie na podstawie zgłoszonych ofert następuje rozstrzygnięcie gry rynkowej (zbilansowanie rynku) prowadzące do ustalenia cen rynkowych towarów, wymiany towarów oraz przepływów finansowych. Poprzez obrót towarami podmioty wspólnie wypracowują globalne korzyści ekonomiczne $\hat{Q}$, które następnie są rozdzielane pomiędzy uczestników.

Zakładamy, że do realizacji zawieranych umów niezbędne są zasoby związane z infrastrukturą, która zazwyczaj może być w uproszczony sposób reprezentowana w postaci grafu. Fizyczne ograniczenia w obrocie towarem mogą być modelowane przez przepustowości w łukach grafu (minimalne i maksymalne) oraz poziomów dostaw i odbiorów w poszczególnych węzłach grafu. Rozstrzygnięcia dotyczące wolumenów akceptowanych ofert mogą być wyznaczone poprzez rozwiązanie problemu obrotu pojedynczego towaru (OPT) [3].

Problem OPT:

$$\hat{Q} = \max_{p,d}[Q = (\sum_{m \in B} e_m d_m - \sum_{l \in S} s_l p_l)] \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{l \in S} p_l \geq \sum_{m \in B} d_m \tag{2}$$

$$f_i(p,d) \geq b_i^* \qquad i \in N \tag{3}$$

$$0 \leq d_m \leq d_m^{max} \qquad m \in B \tag{4}$$

$$0 \leq p_l \leq p_l^{max} \qquad l \in S \tag{5}$$

Oferta l-ta ze zbioru ofert sprzedaży S jest opisywana przez maksymalny oferowany wolumen p_l^{max} oraz cenę jednostkową s_l. Liczbę przyjętego towaru w ramach oferty l określa zmienna decyzyjna p_l. Oferta m-ta ze zbioru ofert kupna B jest opisywana przez maksymalny oferowany wolumen d_m^{max} oraz cenę jednostkową e_m. Liczbę przyjętego towaru w ramach oferty m określa zmienna decyzyjna d_m. Funkcja celu Q jest globalną nadwyżką z wymiany towarów, tzw. dobrobytem ekonomicznym. Nierówność (3) reprezentuje dodatkowe ograniczenia zasobowe, tworzące zbiór N ograniczeń, gdzie b_i^* jest dostępnością zasobu i-tego, a funkcja f_i opisuje wymogi na zasób i-ty i jest afiniczną funkcją wektorów p i d. Fakt występowania ograniczonych zasobów N powoduje powstanie kosztu $c(N)$ równego różnicy globalnych korzyści $\hat{Q}$, wyznaczonych w przypadku zasobów nieograniczonych oraz w przypadku zasobów ograniczonych. Przyjmujemy, że za poszczególne ograniczenia zasobów są odpowiedzialne podmioty, które w szczególności mogą być również uczestnikami rynku. Koszty infrastrukturalne $c(N)$ związane z ograniczeniami zasobowymi muszą zostać pokryte przez podmioty odpowiedzialne za ograniczenia ze zbioru N. Praktycznym przykładem omawianego zagadnienia może być rynek bilansujący energii elektrycznej, gdzie obrót towarami jest ograniczony, m.in. przez specyfikę jednostek wytwórczych, np. minimalny poziom mocy jednostki wytwórczej w przypadku akceptacji jej oferty lub minimalna liczba przyjętych do pracy jednostek wytwórczych z danego podzbioru jednostek.

Naturalnym podejściem do problemu alokacji kosztów związanych ze wspólną działalnością wielu podmiotów jest zamodelowanie problemu jako gry kooperacyjnej [5]. W tego typu podejściach zakłada się jednak, że funkcja charakterystyczna gry $c(S)$, $S \subseteq N$, reprezentująca koszt infrastrukturalny przy założeniu wystąpienia jedynie podzbioru ograniczeń S, jest funkcją subaddytywną. W typowych problemach założenie to jest naturalną konsekwencją sformułowania problemu, wynikającą z faktu dobrowolności uczestnictwa podmiotów we wspólnym przedsięwzięciu. W rozważanym w referacie problemie ograniczenia zasobowe zazwyczaj są wynikiem zaistniałego stanu technicznego lub fizycznego i w danej chwili muszą zostać spełnione. Ograniczenia mogą być usuwane poprzez inwestycje w infrastrukturę, co wymaga przeznaczenia pewnych nakładów przez podmioty w perspektywie nie tylko pojedynczego rozstrzygnięcia na rynku, ale dłuższego horyzontu czasu i nie są ujawniane w funkcji kosztów $c(S)$ dla danego rozstrzygnięcia rynku. W tym przypadku funkcja kosztów $c(S)$ może nie spełniać warunku subaddytywności.

Klasyczne teoriogrowe metody alokacji kosztów, takie jak wartość Shapleya, wycena Aumanna-Shapleya, metoda SCRB (ang. Separable Cost Remaining Benefits) bazują na założeniu subaddytywności funkcji $c(S)$ [5]. Co więcej, nawet dla pewnych postaci subaddytywnej funkcji $c(S)$ mogą one prowadzić do rozwiązań, w których występuje zjawisko dotacji. Przez dotacje rozumiemy sytuację, w której podmiot włączający się do wspólnego przedsięwzięcia powoduje przyrost kosztów większy niż koszt, jakim zostanie obarczony w wyniku alokacji kosztów. Wówczas inne podmioty pokrywają część kosztu powstałego na skutek włączenia się tego podmiotu. Tam, gdzie występuje zjawisko dotacji, otwiera się naturalne pole dla strategii spekulacyjnych, pasożytniczych, ograniczających efektywne funkcjonowanie i rozwój rynku.

2. Teoriogrowy model problemu alokacji

Niech $N = 1, 2, \ldots, n$ będzie zbiorem ograniczeń zasobowych postaci (3). W trakcie bilansowania systemu ograniczeń zasobowe muszą zostać spełnione przy prawej stronie ograniczeń równej b_i^*, $i \in N$. Bilans jest dokonywany przy uwzględnieniu wszystkich ograniczenia zasobowych, a następnie podmioty odpowiedzialne za ograniczenia zasobowe są obarczane kosztami ich uwzględniania. Rozważany problem polega na określeniu wysokości opłat za uwzględnianie w trakcie bilansowania każdego z ograniczeń. Opłaty muszą być wyznaczane na podstawie kosztów, jakie ograniczenia generują podczas bilansowania systemu oraz powinny zniechęcać podmioty do wykorzystywania ograniczeń jako narzędzia uzyskiwania (nieuzasadnionej ekonomicznie) siły rynkowej.

Rozważany problem może być opisany przez grę kooperacyjną n graczy, odpowiadających $n \in N$ ograniczeniom. Jest to "sztuczna" gra w tym sensie, że decyzje graczy są znane, a teoria gier może jedynie logiczne uzasadniać przyjętą alokację. Celem jest znalezienie takich reguł gry, przy których znane a priori decyzje graczy tworzą punkt równowagi.

Niech funkcja $c(S)$ będzie łącznym kosztem uwzględniania ograniczeń ze zbioru $S \subseteq N$, określona na wszystkich podzbiorach N. Należy znaleźć regułę alokacji - funkcję $\varphi(c, N) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{|N|}$, gdzie x_i jest kosztem zaalokowanym na ograniczenie i, wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{|N|}$ jest alokacją. Oznaczmy problem przez (c, N), a regułę alokacji określającą alokację dla tego problemu przez $\varphi(c, N)$.

Większość znanych w literaturze metod alokacji kosztów, w tym wartość Shapleya, wycena Aumanna-Shapleya, metoda SCRB, jądro gry, zakłada, że alokacja musi być *dokładna* (ang. *break-even property*). Alokacja x jest *alokacją dokładną*, gdy spełniony jest warunek

$$\sum_{i \in N} x_i = c(N). \tag{6}$$

Znane są decyzje graczy, ale alokacja kosztów bazuje na hipotetycznych zachowaniach graczy, którzy potencjalnie mogli usunąć związane z nimi ograniczenia. Rozważamy wszystkie potencjalne sytuacje, odpowiadające wszystkim podzbiorom zbioru N oznaczającym ograniczenia nie usunięte. Gracze tworzą grupę graczy S zwaną *koalicją*, jeżeli nie decydują się na likwidację swoich ograniczeń. *Koalicja* S jest zachęcana do rozwiązania, jeżeli zaalokowany koszt na koalicję S jest nie mniejszy niż zysk marginalny z rozwiązania koalicji S:

$$a(S) \geq c(N) - c(N \setminus S), \tag{7}$$

gdzie $a(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Jedynie w tym przypadku zaalokowane na ograniczenia koszty są dostatecznie silnym bodźcem motywującym graczy do usuwania (co najmniej do niezaostrzania) ograniczeń. Załóżmy, że warunek (7) nie jest spełniony dla pozdzbioru S. Usunięcie ograniczeń S ujawnia koszty $c(N) - c(N \setminus S)$. Jednakże, gdy alokacja $a(S)$ jest mniejsza niż $c(N) - c(N \setminus S)$, a całkowity koszt $c(N)$ jest pokryty, to koalicja S musi być subsydiowana przez innych graczy.

Lemat 1. Nie istnieje dokładna reguła alokacji, która byłaby wolna od dotacji dla dowolnej postaci funkcji c.

Dowód. Podzielmy zbiór N na m rozłącznych podzbiorów $S_1, S_2, \ldots, S_m$, $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = N$, $S_j \cap S_k = \emptyset$, $\forall j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$. Alokacja jest wolna od dotacji zgodnie z (7), jeśli następujące warunki są spełnione

$$c(N) - c(N \setminus S_i) \leq a(S_i) \quad i = 1, \ldots, m \tag{8}$$

Dodając stronami nierówności (8), uzyskujemy

$$mc(N) - \sum_{i=1}^{m} c(N \setminus S_i) \leq \sum_{i=1}^{m} a(S_i) \quad i = 1, \ldots, m \tag{9}$$

Alokacja jest dokładna, jeżeli spełnia warunek $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i=1}^{m} a(S_i) = c(N)$. Podstawiając tę równość do nierówności (9), otrzymujemy

$$c(N) \leq [\sum_{i=1}^{m} c(N \setminus S_i)]/(m-1) \tag{10}$$

Jeżeli alokacja jest dokładna, to aby możliwe było zachowanie wolności od dotacji, funkcja c musi spełniać warunek (10). Zauważmy, że dla $m = 2$ warunek ten sprowadza się do definicji subaddytywności, a dla $m > 2$ jest bardziej rygorystyczny. W ogólnym przypadku, a szczególnie w przypadku funkcji c niesubaddytywnej nie istnieje dokładna alokacja wolna od dotacji. □

Teoretycznie uzyskanie alokacji wolnej od dotacji jest łatwe do osiągnięcia – jak można pokazać, wystarczy graczy obarczyć dostatecznie dużymi opłatami. W praktyce, interesuje nas znalezienie jak najniższych opłat, które zapewniłyby wolność od dotacji. Ponieważ większość znanych w literaturze reguł alokacji prowadzi do alokacji dokładnych, więc w rozważanym przypadku nie umożliwiają one znalezienia alokacji wolnych od dotacji.

3. Metoda alokacji MASIT

Wychodząc z założenia, iż test przyrostu kosztu (7) musi zostać spełniony dla każdej koalicji, otrzymujemy układ nierówności, które muszą być spełnione dla alokacji wolnej od dotacji:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S) \quad \forall S \subseteq N \tag{11}$$

Każdy z podmiotów odpowiedzialnych za ograniczenia żąda obarczenia go jak najmniejszym kosztem. Otrzymujemy w ten sposób problem optymalizacji wielokryterialnej MASIT (ang. *minimal allocation satysfing incremental cost test*).

Problem MASIT:

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \tag{12}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S) \quad \forall S \subseteq N \tag{13}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in N \tag{14}$$

Dla uproszczenia rozważań w dalszej części będziemy używać zmiennych $\bar{x} = -x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Zbiór warunków testu przyrostu kosztów tworzy sympleks, w obszarze którego rozwiązanie zadania minimalizacji z funkcją celu (12) zazwyczaj nie jest jednoznaczne. Zastosowanie prostych funkcji skalaryzujących, np. minimalizacji średniej z alokacji lub minimalizacji maksymalnej alokacji może prowadzić do wyników łatwych do zakwestionowania z punktu widzenia ogólnie rozumianej sprawiedliwości alokacji. W szczególności dwóch graczy mających taki sam wpływ na koszty globalne może zostać obarczonych różnymi kosztami przy minimalnej wartości funkcji skalaryzującej. W tym wypadku, jeżeli możliwe jest równe potraktowanie takich graczy przy zachowaniu tej samej wartości skalaryzującej funkcji celu, to rozwiązanie takie powinno być preferowane. Prowadzi to do koncepcji relacji preferencji wyrównująco racjonalnej. Relacja ta bazuje na aksjomacie przesunięć wyrównujących Pigou-Daltona. Przesunięcie wyrównujące polega na pogorszeniu lepszej (niższej) alokacji $\bar{x}_i$ i jednoczesnym zmniejszeniu wyższej alokacji $\bar{x}_j$ o pewną niewielką wartość $\varepsilon > 0$. Wektor alokacji otrzymany w wyniku przesunięć wyrównujących $\bar{x} - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j$ jest ściśle preferowany w stosunku do oryginalnego wektora $\bar{x}$. Wektor alokacji $\bar{x}'$ dominuje wyrównująco wektor alokacji $\bar{x}''$, jeżeli jest ściśle preferowany, zgodnie z racjonalną relacją preferencji $\bar{x}' \succ_w \bar{x}''$.

Wprowadźmy operator $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ porządkujący niemalejąco współrzędne wektora $\bar{x}$, to znaczy $\Theta(\bar{x}) = (\Theta_1(\bar{x}), \Theta_1(\bar{x}), \ldots, \Theta_n(\bar{x}))$, gdzie $\Theta_1(\bar{x}) \leq \Theta_2(\bar{x}) \leq \ldots \leq \Theta_n(\bar{x})$. Wprowadźmy dalej operator skumulowanego uporządkowania $\bar{\Theta} = (\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2, \ldots, \bar{\Theta}_n)$, gdzie $\bar{\Theta}_i = \sum_{l=1}^{i} \Theta_l(\bar{x})$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Kolejne współrzędne wektora $\bar{\Theta}(\bar{x})$ oznaczają z przeciwnym znakiem największą alokowaną wartość, sumę dwóch największych alokowanych wartości, sumę trzech największych alokowanych wartości itd. Rozwiązanie dopuszczalne x problemu (12)-(14) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem następującego problemu wielokryterialnego [1]:

$$\max\{\bar{\Theta}(\bar{x})\} \tag{15}$$

przy ograniczeniach (13) i (14) oraz $\bar{x} = -x$. Zadanie to może być rozwiązane poprzez sprowadzenie zadania do problemu jednokryterialnego, stosując ważenie ocen, co jest równoważne zastosowaniu agregacji OWA (ang. *ordered weighted average*) do zadania maksymalizacji $\Theta(x)$ przy ograniczeniach (13) i (14) [4]. Agregację OWA można przedstawić w wygodnej obliczeniowo postaci maksymalizacji liniowej kombinacji skumulowanych uporządkowanych ocen zapisanych w postaci liniowej. W wyniku otrzymujemy zadanie programowania liniowego:

Problem MASIT_OWA:

$$\max \sum_{k=1}^{n} w_k (k v_k - \sum_{i=1}^{n} d_{ki}) \tag{16}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S) \quad \forall S \subseteq N \tag{17}$$

$$v_k + x_i \leq d_{ki} \quad \forall i, k \in N \tag{18}$$

$$d_{ki}, x_i \geq 0 \quad \forall i, k \in N \tag{19}$$

gdzie występują współczynniki $w_k \geq 0$, nieograniczone zmienne v_k oraz nieujemne zmienne d_{ki}, reprezentujące dolne odchylenie od wartości v_k.

Zauważmy, że z własności wyrównująco racjonalnej relacji preferencji wynika, że rozwiązanie problemu (16)-(19) spełnia warunek symetryczności (anonimowości) alokacji, a więc jest niewrażliwe na przenumerowanie ograniczeń. Z ograniczeń (17) wynika spełnienie warunku przyrostu kosztu, a także warunek alokacji niezerowych kosztów na gracza istotnego oraz braku alokacji na gracza nieistotnego (ang. *dummy player*). Zgodnie z warrunkiem (7) alokacja będąca rozwiązaniem problemu (16)-(19) jest wolna o dotacji.

4. Przykład obliczeniowy

Rozważmy prosty przykład obrotu pojedynczym towarem pomiędzy czterema sprzedawcami a jednym kupującym. Dane ofertowe zostały przedstawione w tabeli 1. Rozstrzygnięcie gry rynkowej jest rezultatem rozwiązania modelu OPT (1)-(5), gdzie ograniczenia (3) przyjmują następującą postać:

$$-p_1 \geq -50 \tag{20}$$

$$p_3 \geq 100 \tag{21}$$

$$p_4 \geq 50 \tag{22}$$

$$p_1 + p_3 \geq 140 \tag{23}$$

Przy pominięciu ograniczeń zasobowych (20)-(23) osiągany jest dobrobyt w wysokości 13 tys., a po uwzględnieniu ograniczeń zasobowych dobrobyt spada do wartości 9 tys. Zagregowany koszt infrastrukturalny wynoszący 4 tys. zgodnie z wartością Shapleya zostałby zaalokowany w wysokości (1; 1,066; 1,8; 0,133)$*10^3$ odpowiednio na kolejne z

Tabela 1

Dane ofertowe

l	p_l^{max}	s_l
1	100 MWh	80 zł/MWh
2	50 MWh	100 zł/MWh
3	100 MWh	120 zł/MWh
4	100 MWh	140 zł/MWh
m	d_m^{max}	e_m
1	200 MWh	160 zł/MWh

ograniczeń (20)-(23). Zauważmy, że np. dla ograniczenia trzeciego jego usunięcie powoduje wzrost dobrobytu o 2 tys., podczas gdy opłata za to ograniczenie wynosi tylko 1,8 tys. Mogą pojawić się tutaj zachęty do wprowadzania tego ograniczenia, gdyż na rynku różnica 0,2 tys. zostaje przechwycona przez pewne podmioty. Jeżeli gracz odpowiedzialny za ograniczenie trzecie przechwytuje dobrobyt w wysokości co najmniej 1.8 tys. oraz niezerową część z nadwyżki 0,2 tys. bezpośrednio lub pośrednio w wyniku zmowy z innymi graczami, to jest zachęcany do wprowadzania i zaostrzania ograniczenia.

Zauważmy również, że istnieje wiele wektorów alokacji będących rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego MASIT, np. alokacje (1; 1,2; 2; 0,8), (1,2; 1; 2; 0,8), (1,1; 1,1; 2; 0,8). Ponieważ ograniczenia pierwsze i drugie są redundantne względem siebie, więc można się spodziewać, iż zostaną obarczone zbliżonymi kosztami, o ile przy innych koalicjach ich wpływ istotnie się nie różni. Dlatego alokacja (1,1; 1,1; 2; 0,8) jest preferowana nad pozostałymi dwoma. Alokacja ta jest jednocześnie rozwiązaniem zadania MASIT_OWA (16)-(19) i jest rozwiązaniem symetrycznie wyrównującym dla dowolnych współczynników w_k.

5. Podsumowanie

W praktyce mogą pojawiać się problemy alokacji, w których funkcja charakterystyczna $c(S)$ nie jest subaddytywna. Wówczas znane metody alokacji, zakładające zazwyczaj dokładny podział zagregowanych kosztów, prowadzą do alokacji, w których może wystąpić zjawisko dotacji. Alokację wolną od dotacji, ale nie dokładną w sensie (6) można uzyskać rozwiązując zaproponowany w referacie wielokryterialny model MASIT. Spośród rozwiązań efektywnych problemu MASIT preferowane są rozwiązania jednakowo traktujące podmioty o podobnym wpływie na koszty infrastrukturalne. Uzyskanie takich rozwiązań jest możliwe dzięki zastosowaniu wyrównująco racjonalnej relacji preferencji. W praktyce obliczeniowej problem ten można sprowadzić do wielokryterialnego zadania programowania liniowego MASIT_OWA, którego rozwiązania efektywne są rozwiązaniami wyrównującymi.

LITERATURA

1. Kostreva M.M., Ogryczak W.: Linear Optimization with Multiple Equitable Criteria. RAIRO Rech. Opér., 33, 1999, p. 275–297.
2. Luss H.: On Equitable Resource Allocation Problems: A Lexicographic Minimax Approach. Operations Research, 47, 1999, p. 361–378.
3. Toczyłowski E.: Optymalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach. Akademicka Oficyna Wydawnicza, wydanie II, Warszawa 2003.
4. Yager R.R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. IEEE Tr. Sys. Man Cyber., 18, p. 183–190.
5. Young H.P.: Cost Allocation: Methods, Principles, Applications. Elsevier Science Publishers B.V., 1985.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni Niederliński

Abstract

On complex market structures the limitations for free commodity trade related to physical properties of necessary infrastructure occur. The infrastructure costs arise as a result of these limitations. In the paper we present a new method for infrastructure costs allocation to make an incentives for market participants to mitigate the limitations. Allocation free form subsidies can be achieved by solving multicriteria linear programm. The concept of equitable rational preference relation is used to find nondominated allocation fairly treating the constraints of the same or similar strength.