

Andrzej RUSZEWSKI  
Politechnika Białostocka

## STABILIZACJA ZA POMOCĄ REGULATORÓW PID DYSKRETNYCH UKŁADÓW REGULACJI

**Streszczenie.** W pracy rozpatrzono problem stabilizacji za pomocą regulatorów typu PID liniowych dyskretnych układów regulacji. Podano prostą komputerową metodę wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności w przestrzeni parametrów rozpatrywanych regulatorów. Proponowana metoda oparta jest na klasycznej metodzie podziału D.

## STABILIZATION OF DISCRETE-TIME SYSTEMS BY PID CONTROLLERS

**Summary.** The stabilization problem of digital control systems by PID controllers is analyzed. Simple method for determining the asymptotic stability regions in the parameter space of controllers are given. The method proposed is based on the D partition method.

### 1. Wstęp

Podstawowym wymaganiem stawianym układom regulacji automatycznej jest ich asymptotyczna stabilność. Problemowi asymptotycznej stabilności ciągłego układu regulacji automatycznej z regulatorem typu PID czy PI jest poświęconych wiele prac (np. [1, 5-8]). W pracach [1, 8] przedstawiono metody wyznaczania zbiorów wartości parametrów regulatorów PID, dla których rozpatrywane układy są asymptotycznie stabilne. Metody te oparto na uogólnionym twierdzeniu Hermite-Biehlera. Inne podejście do problemu stabilności ciągłych układów regulacji z regulatorami PID zastosowano w pracach [5-7], w których na bazie metody podziału D podano komputerowe metody wyznaczenia obszarów asymptotycznej stabilności i D-stabilności w przestrzeni parametrów układów regulacji z obiektami z opóźnieniem.

Stabilność asymptotyczna dyskretnego układu regulacji automatycznej z regulatorami PID była badana między innymi w [2, 3, 4]. W pracach [2, 3] problem stabilności dyskretnego układu regulacji sprowadza się do problemu stabilności układu ciągłego poprzez zastosowanie przekształcenia biliniowego [2] i bikwadratowego [3] i wykorzystania rezultatów pracy [1].

W niniejszej pracy zostanie przedstawione podejście, w którym nie jest wymagane stosowanie transformacji biliniowej lub bikwadratowej do określenia wartości nastaw dyskretnego regulatora PID, które stabilizują układ regulacji. Zostanie

podana komputerowa metoda wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności w przestrzeni parametrów dyskretnego regulatora PID. Proponowane podejście oparte jest na metodzie podziału D.

## 2. Główny rezultat

Weźmy pod uwagę dyskretny układ regulacji automatycznej złożony z liniowego obiektu o dyskretnej transmitancji operatorowej

$$G(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m \leq n, \quad (1)$$

i szeregowego dyskretnego regulatora PID o transmitancji

$$C(z) = k_p + k_i \frac{1}{1-z^{-1}} + k_d \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}} = \frac{(k_p + k_i + k_d)z^2 - (k_p + 2k_d)z + k_d}{z^2 - z}, \quad (2)$$

objętych pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego.

Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego wielomian charakterystyczny

$$w(z) = [(k_p + k_i + k_d)z^2 - (k_p + 2k_d)z + k_d]L(z) + (z^2 - z)M(z) \quad (3)$$

jest asymptotycznie stabilny, tzn. wszystkie jego zera leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Przy ustalonej transmitancji obiektu (1) stabilność asymptotyczna wielomianu (3) zależy od wartości parametrów regulatora (2). W przestrzeni parametrów regulatora można wyznaczyć zbiór takich wartości jego parametrów, przy których wielomian charakterystyczny (3) ma wszystkie zera położone wewnątrz okręgu jednostkowego o opisie parametrycznym  $z = \exp(j\omega\pi)$ ,  $\omega \in [0, 2]$ , przy czym można ograniczyć się tylko do wartości  $\omega \in [0, 1]$ , ponieważ zespolone zera wielomianu (3) są parami sprzężone.

Granicami stabilności w przestrzeni parametrów regulatora są linie krzywe, na których wielomian charakterystyczny ma zera położone na okręgu jednostkowym. Mogą to być zera rzeczywiste lub zera zespolone sprzężone, otrzymamy wtedy odpowiednio granicę zer rzeczywistych i granicę zer zespolonych. Granice stabilności, zwane granicami podziału D, dzielą przestrzeń niepewnych parametrów na skończoną liczbę obszarów  $D(k)$ . Dowolny punkt w  $D(k)$  odpowiada takim wartościom parametrów regulatora, dla których wielomian (3) ma dokładnie  $k$  zer leżących na zewnątrz okręgu jednostkowego. W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem stabilności, należy zbadać asymptotyczną stabilność wielomianu (3) dla jednego punktu z tego obszaru, stosując np. kryterium Jury. Jeżeli obszar  $D(0)$  istnieje (nie jest pusty), to jest on obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej.

Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (3), który ma zero  $z = 1$  lub  $z = -1$ . Granice zer rzeczywistych wielomianu (3) mają opis parametryczny

$$k_i = 0 \text{ oraz } k_i = -2k_p - 4k_d - 2M(-1)/L(-1), \quad (4)$$

przy czym  $L(-1) \neq 0$ .

Granica zer zespolonych odpowiada takim wartościom  $k_p$ ,  $k_i$  i  $k_d$ , dla których wielomian (3) ma zera zespolone sprzężone na okręgu jednostkowym. Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując równanie  $w(\exp(j\omega\pi)) = 0$ , które otrzymuje się przyrównując do zera wielomian (3) przy  $z = \exp(j\omega\pi)$ . Stosując oznaczenia

$$L(\exp(j\omega\pi)) = U_L(\omega) + jV_L(\omega)\sin\omega\pi, \quad (5)$$

$$M(\exp(j\omega\pi)) = U_M(\omega) + jV_M(\omega)\sin\omega\pi \quad (6)$$

równanie zespolone  $w(\exp(j\omega\pi)) = 0$  można napisać w postaci układu dwóch równań rzeczywistych (w zapisie pominięto zależność  $U$  i  $V$  od  $\omega$ )

$$d_3 \cos^3(\omega\pi) + d_2 \cos^2(\omega\pi) + d_1 \cos(\omega\pi) + d_0 = 0, \quad (7a)$$

$$p_2 \cos^2(\omega\pi) + p_1 \cos(\omega\pi) + p_0 = 0, \quad (7b)$$

gdzie:

$$d_3 = p_2 = (k_p + k_i + k_d)2V_L + 2V_M,$$

$$d_2 = p_1 = (k_p + k_i + k_d)2U_L - (k_p + 2k_d)V_L - V_M + 2U_M,$$

$$d_1 = -(k_p + k_i + k_d)2V_L - (k_p + 2k_d)U_L - U_M - 2V_M,$$

$$d_0 = (k_p + 2k_d)V_L - (k_p + k_i)U_L + V_M - U_M,$$

$$p_0 = -(k_p + 2k_d)U_L - (k_p + k_i)V_L - U_M - V_M.$$

Rozwiązując układ równań (7) względem dwóch wybranych parametrów  $k_p$  i  $k_i$ , odpowiednio otrzymamy

$$k_p = \frac{r_3 \cos^3(\pi\omega) + r_2 \cos^2(\pi\omega) + r_1 \cos(\pi\omega) + r_0}{(\cos^2(\pi\omega) - 1)V_L^2 - U_L^2}, \quad (8a)$$

$$k_i = \frac{w_3 \cos^3(\pi\omega) + w_2 \cos^2(\pi\omega) + w_1 \cos(\pi\omega) + w_0}{(\cos^2(\pi\omega) - 1)V_L^2 - U_L^2}, \quad (8b)$$

gdzie:

$$r_3 = 2k_d V_L^2, \quad r_2 = -V_M V_L - 2k_d V_L^2, \quad r_1 = (-V_L^2 - U_L^2)2k_d + U_M V_L - U_L V_M,$$

$$r_0 = (V_L^2 + U_L^2)2k_d + (V_M - U_M)V_L + (U_M + V_M)U_L,$$

$$w_3 = -2k_d V_L^2, \quad w_2 = 2k_d V_L^2, \quad w_1 = (V_L^2 + U_L^2)2k_d - 2U_M V_L + 2U_L V_M,$$

$$w_0 = -(V_L^2 + U_L^2)2k_d + 2U_M V_L - 2U_L V_M.$$

Opisy parametryczne (4) i (8) granic podziału D zawierają trzy poszukiwane parametry regulatora. Obszary asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji możemy wyznaczyć na płaszczyźnie dwóch wybranych parametrów, przyjmując trzeci jako stały. Linia krzywa o opisie parametrycznym (8) przy ustalonej

wartości  $k_d$  wyznacza na płaszczyźnie  $(k_p, k_i)$  granicę zer zespolonych wielomianu (3). Krzywa ta wykreślona w funkcji parametru  $\omega \in (0, 1)$  oraz linie proste (4) dzielą płaszczyznę  $(k_p, k_i)$  na obszary  $D(k)$ . Interesujący nas obszar  $D(0)$ , jeśli istnieje, jest obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. Przyjmując we wzorach (4) i (8)  $k_d = 0$ , otrzymamy opis parametryczny granic podziału  $D$ , odpowiadający układowi regulacji z obiektem (1) i dyskretnym regulatorem PI.

### 3. Przykład

Należy wyznaczyć zbiór wartości parametrów regulatora PID, przy których układ zamknięty z obiektem opisanym transmitancją operatorową

$$G(z) = \frac{1.2z^3 + 0.4z^2 + 2z + 1}{z^4 + 2z^3 + 1.4z^2 + z + 0.5} \quad (9)$$

jest asymptotycznie stabilny.

Wielomian charakterystyczny układu regulacji złożonego z obiektu (9) i szeregowego regulatora (2) ma postać

$$w(z) = [(k_p + k_i + k_d)z^2 - (k_p + 2k_d)z + k_d](1.2z^3 + 0.4z^2 + 2z + 1) + (z^2 - z)(z^4 + 2z^3 + 1.4z^2 + z + 0.5). \quad (10)$$

Przyjmując np.  $k_d = 0.2$  z (4) otrzymamy linie proste o opisie parametrycznym

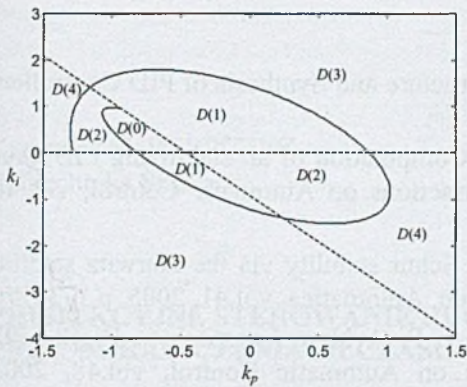
$$k_i = 0, \quad k_p = -2k_p - 0.91, \quad (11)$$

które tworzą na płaszczyźnie  $(k_p, k_i)$  granice zer rzeczywistych. Natomiast granica zer zespolonych wyznaczona z (8) ma opis parametryczny

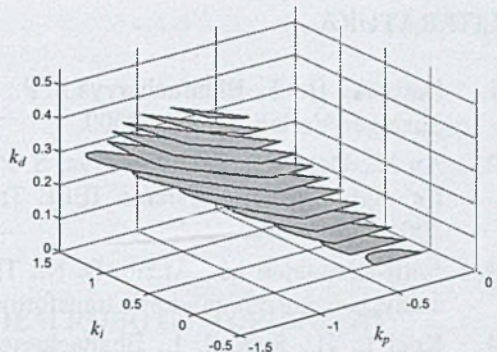
$$k_p = \frac{96 \cos^4(\pi\omega) - 304 \cos^3(\pi\omega) - 498.4 \cos^2(\pi\omega) + 2.4 \cos(\pi\omega) + 25.5}{240 \cos^3(\pi\omega) + 280 \cos^2(\pi\omega) - 16 \cos(\pi\omega) + 25}, \quad (12a)$$

$$k_i = \frac{-496 \cos^4(\pi\omega) - 296 \cos^3(\pi\omega) + 558.4 \cos^2(\pi\omega) + 257.6 \cos(\pi\omega) - 24}{240 \cos^3(\pi\omega) + 280 \cos^2(\pi\omega) - 16 \cos(\pi\omega) + 25}. \quad (12b)$$

Podział płaszczyzny  $(k_p, k_i)$  na obszary  $D(k)$  przy określonej wartości parametru  $k_d = 0.2$  jest pokazany na rysunku 1. Granica zer zespolonych (linia ciągła) została wyznaczona w funkcji parametru  $\omega \in (0, 1)$ . Na rysunku 1 linią przerywaną zaznaczono granice zer rzeczywistych. Granice podziału  $D$  dzielą przestrzeń  $(k_p, k_i)$  na obszary  $D(k)$ , dla których wielomian (10) ma  $k$  zer położonych na zewnątrz okręgu jednostkowego. Interesujący nas obszar  $D(0)$  jest obszarem stabilności. Wybierając dowolny punkt leżący wewnątrz obszaru stabilności, otrzymamy wartości nastaw regulatora, dla których rozpatrywany układ regulacji jest asymptotycznie stabilny.



Rys. 1. Podział płaszczyzny  $(k_p, k_i)$  na obszary  $D(k)$ ,  $k_d = 0.2$



Rys. 2. Obszary stabilności wielomianu (10) w przestrzeni  $(k_p, k_i, k_d)$

Na rysunku 2 pokazano obszary asymptotycznej stabilności wyznaczone w przestrzeni trójwymiarowej  $(k_p, k_i, k_d)$  dla  $k_d$  zmieniającego się od 0 do 0.55 z krokiem 0.05. Przypadek dla  $k_d = 0$  odpowiada obszarowi stabilności układu regulacji z dyskretnym regulatorem PI.

#### 4. Uwagi końcowe

Praca jest poświęcona problemowi stabilizacji dyskretnego układu regulacji automatycznej za pomocą regulatorów PID. Wykorzystując metodę podziału D, podano komputerową metodę wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności w przestrzeni parametrów rozpatrywanych regulatorów. Dowolny punkt z wyznaczonego obszaru odpowiada stabilności asymptotycznej układu regulacji, tzn. wszystkie bieguny położone są w okręgu jednostkowym. Zaprezentowane w niniejszej pracy podejście może być wykorzystane do wyznaczenia zbiorów takich wartości parametrów regulatora, przy których wszystkie bieguny układu zamkniętego będą leżały w określonych podobszarach zawartych w okręgu jednostkowym.

Do wyznaczenia obszarów stabilności rozpatrywanych układów regulacji automatycznej wykorzystano programy komputerowe opracowane w środowisku systemu MATLAB i MATHCAD.

*Pracę wykonano w ramach pracy własnej W/WE/2/05 finansowanej przez Ministerstwo Edukacji i Nauki.*

## LITERATURA

1. Datta A., Ho T., Bhattacharyya S. P.: Structure and Synthesis of PID Controllers. Springer-Verlag, London 2000.
2. Xu H., Datta A., Bhattacharyya, S. P.: Computation of all stabilizing PID gains for digital control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, 2001, p.647–652.
3. Jalili-Kharaajoo M., Araabi B. N.: The Schur stability via the Hurwitz stability analysis using a biquadratic transformation. Automatica, vol.41, 2005, p.173–176.
4. Keel L. H., Rego J. I., Bhattacharyya S. P. A New Approach to Digital PID Controller Design. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.48, 2003, p.687–692.
5. Busłowicz M., Ruszewski A.: Stabilizacja za pomocą regulatorów PI liniowych układów pierwszego rzędu z opóźnieniem. Mat. XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, Zielona Góra 2002, s. 89-94.
6. Ruszewski A.: Obszary D-stabilności układów regulacji z obiektem pierwszego rzędu z opóźnieniem. Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, Warszawa 2005, s. 183-188.
7. Shafiei Z., Shenton A. T.: Tuning of PID-type controllers for stable and unstable systems with time delay. Automatica, vol.30, 1994, p. 1609-1615.
8. Silva G. J., Datta A., Bhattacharyya S. P.: PID Controllers for Time-Delay Systems. Birkhauser, Boston 2005.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

**Abstract**

In this paper, the problem of stabilizing of a given linear discrete-time system with transfer function (1) by a digital PID controller (2) is analysed. The closed loop system is asymptotically stable if the characteristic polynomial (3) is Schur stable (i.e. all its roots lie inside the unit circle in the complex plane).

An effective computational method to determine the complete set of stabilizing controllers is proposed. The results are based on classical D partition method. In this method, the controller parameter space is partitioned into regions  $D(k)$  where each region corresponds to a set of characteristic polynomials (3) with a fixed number  $k$  of zeros outside the unit circle. The stabilizing regions are chosen by testing an arbitrary point from each region. Hence, region  $D(0)$  (if it exists) is the asymptotic stability region of polynomial (3). The stability region can be displayed in the  $(k_p, k_i)$  plane for fixed  $k_d$  (Fig. 1) or in the three-dimensional graphics by sweeping over  $k_d$  (Fig. 2). Example illustrates the applicability of the proposed method.