

Tomasz TATOŃ

Studium Doktoranckie Informatyki, Politechnika Śląska

## ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA OGRANICZENIOWEGO W LOGICE DLA PROBLEMU AUKCJI KOMBINATORYCZNYCH

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia główne założenia aukcji kombinatorycznej. Umieszczono w nim opis modelu matematycznego dla aukcji kombinatorycznej wielu jednostek wielu towarów. Przedstawiono rozwiązanie problemu w CHIP'ie za pomocą programowania ograniczeniowego w logice. Rozwiązanie to zilustrowano na konkretnym przykładzie oraz omówiono otrzymane wyniki. Autor zwraca uwagę na zagadnienia ograniczeń występujących w aukcjach kombinatorycznych, a w szczególności ograniczeń komplementarnych i substytucyjnych.

## CONSTRAINT LOGIC PROGRAMMING FOR A COMBINATORIAL AUCTION

**Summary.** A combinatorial auction problem is formulated and solved using constraint logic programming in CHIP. Building of own declarative application, pointing out the optimum combination of bids in multi-unit combinatorial auction has been discussed in detail. The received results were introduced the concrete example of auction, and talked over

### 1. Wprowadzenie

Aukcja jest to zorganizowana forma sprzedaży. Celem przeprowadzenia aukcji jest uzyskanie maksymalnego zysku ze sprzedaży oferowanych towarów. Przedmiotem aukcji mogą być dowolne towary lub usługi oferowane przez agenta lub agentów prowadzących aukcję. Uczestnicy aukcji (ang. bidders) mogą składać oferty cenowe na poszczególne towary lub na dowolnie konfigurowane zbiory tych towarów. Wartość cenowa takich zbiorów towarów może różnić się od sumy wartości poszczególnych jego elementów składowych. Wyróżnić można wiele rodzajów aukcji, najbardziej znane aukcje jawne, w których proponowane ceny wszystkich uczestników są znane oraz aukcje niejawne, w których uczestnicy składają kopertowe, nie znane innym uczestnikom oferty cenowe. Najpopularniejsze aukcje jawne to aukcja angielska i aukcja duńska. Różnią się one tym, że w aukcji angielskiej cena wywoławcza jest stopniowo podwyższana przez uczestników aukcji aż do momentu, gdy pozostanie jedna osoba licytująca, natomiast w aukcji duńskiej początkowa cena

wywoławcza jest dużo wyższa od cen ofertowych, a następnie cena ta jest stopniowo obniżana aż do momentu, gdy jeden z uczestników aukcji zgodzi się na aktualnie proponowaną cenę. Aukcje podzielić można również ze względu na wystawione na niej zasoby towarów – wyróżnić możemy aukcje jednostkowe wielu towarów (ang. single-unit combinatorial auction) oraz aukcje wielu jednostek wielu towarów (ang. multi-unit combinatorial auction). Badania nad problemem aukcji jako pierwszy rozpoczął w 1961 roku William Spencer Vickrey [14] późniejszy laureat nagrody Nobla (1996 r.). Teoria aukcji [5] od kilkunastu lat bardzo dynamicznie rozwija się. Przykładami tego mogą być między innymi prace: podział częstotliwości radiowej [1], sprzedaż ropy naftowej [11], rynek nieruchomości [11], rynek energii elektrycznej [13].

W niniejszej pracy przedstawiono metodę rozwiązywania problemu aukcji kombinatorycznych wielu jednostek wielu towarów z zastosowaniem ograniczeń komplementarnych i substytucyjnych za pomocą programowania ograniczeniowego w logice.

## 2. Aukcja kombinatoryczna wielu jednostek wielu towarów – model matematyczny

Omawiane zagadnienie aukcji kombinatorycznej wielu jednostek wielu towarów jest kombinatorycznym problemem decyzyjnym dającym się opisać za pomocą zmiennych dyskretnych przyjmujących wartości 0 – dany zbiór towarów oferty zostaje odrzucony, 1 – dany zbiór towarów oferty zostaje przyjęty. Wyznaczenie kombinacji ofert maksymalizującej funkcję celu jest w ogólnym przypadku zagadnieniem NP-trudnym.

### Stosowane oznaczenia:

Zbiór nazw  $T_i = \{T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{i\ell}, \dots, T_{iL_i}\}$  jest  $i$ -tą zgłoszoną ofertą kupna, jest on podzbiorem wszystkich zgłoszonych ofert kupna, oznaczonym symbolem  $OFERTY$ ,  $T_i \in OFERTY$ .  $T_{i\ell}$  jest nazwą  $\ell$ -tego towaru w  $i$ -tej ofercie. Jeżeli dowolna oferta ma zawierać więcej niż jedną jednostkę tych samych towarów, to każdy z tych towarów powinien występować w oddzielnej ofercie  $T_i$ . Wiąże się to ze sposobem rozwiązania problemu (pkt 4.).

$L_i$  jest liczbą wszystkich towarów w ofercie  $T_i$ . Zbiór liczb naturalnych  $C_i = \{C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i\ell}, \dots, C_{iL_i}\}$  jest zbiorem cen w ofercie  $T_i$ . Cena  $\ell$ -tego towaru z  $i$ -tej oferty określa maksymalną cenę zgłoszoną przez kontrahenta i jest ona oznaczona symbolem  $C_{i\ell}$ .

Zbiór ofert  $T_i$  będziemy nazywać optymalnym rozwiązaniem aukcji kombinatorycznej, jeżeli odpowiadająca jej wartość  $C_i$  będzie maksymalną ceną uzyskaną ze sprzedaży dla wszystkich możliwych ofert ze zbioru  $OFERTY$ , a także zbiór  $T_i$  spełni następujące ograniczenia:

a) zbilansowanie ofert maksymalizujących funkcję celu:

$$\max_{T_i \in OFERTY} \sum_{\ell=1}^{L_i} C_{i\ell} X_i \quad (1)$$

gdzie  $X_i$  jest  $i$ -tą decyzją przyjęcia lub odrzucenia  $i$ -tej oferty  $X_i \in \{0,1\}$ ,

b) ograniczenia substytucyjne ofert:

$$X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_m \vee \dots \vee X_M = 1 \quad (2)$$

gdzie  $M$  jest liczbą ofert substytucyjnych,

c) ograniczenia komplementarne:

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_l \cup \dots \cup X_L = Y \quad (3)$$

gdzie  $Y$  jest dostępną liczbą jednostek towaru  $i$ .

### 3. Ograniczenia

Występujące ograniczenia w omawianym problemie aukcji kombinatorycznych możemy podzielić na:

- Ograniczenie ofert wykluczających się, to znaczy takich, które zawierają te same towary lub usługi. Przyjęcie jednej z ofert, zawierającej pewien towar skutkuje tym, że nie może zostać przyjęta żadna inna oferta, zawierająca dany towar, o ile liczba dostępnych jednostek danego towaru równa jest 1.
- Kolejnym ograniczeniem jest niepodzielność ofert. Ograniczenie to bezpośrednio wiąże się z zagadnieniem komplementarności – oznacza to, że nie można dzielić na oferty jednostkowe wielu towarów otrzymanych ofert kupna, zawierających więcej niż jeden towar, a więc ofert wielu towarów. Otrzymana oferta musi zostać rozpatrzona jako całość. W przykładzie (pkt 5.) przedstawiono ograniczenia ofert komplementarnych, zawierających dwa towary.
- Ostatnim typem ograniczeń są ograniczenia substytucyjne. Mówią one o tym, że osoba biorąca udział w aukcji i składająca pewne oferty kupna może zastrzec sobie chęć kupna tylko jednej z przesłanych ofert. Przykładem może być zgłoszenie na aukcję cen dwóch ofert (pkt 5 ograniczenie c) i zastrzeżenie, że jesteśmy zainteresowani kupnem dowolnej, ale tylko jednej z nich.

### 4. Rozwiązanie problemu aukcji kombinatorycznych wielu jednostek wielu towarów za pomocą programowania ograniczeniowego w logice

Programowanie ograniczeniowe w logice jest programowaniem deklarytywnym, w którym występuje brak algorytmu rozwiązania, a dokładny opis problemu jest jego rozwiązaniem. Otrzymanie rozwiązania problemu odbywa się poprzez badanie ograniczeń i zależności logicznych modelu. Kompletny kod źródłowy aplikacji wyznaczającej kombinację ofert maksymalizującą funkcję celu, przy uwzględnieniu dodatkowych ograniczeń komplementarnych i substytucyjnych dla aukcji kombinatorycznej wielu jednostek i wielu towarów został umieszczony poniżej. Program został napisany dla środowiska *CHIP v5.2*, a prezentowane dane w kodzie źródłowym są zgodne z treścią przykładu (pkt 5).

Program rozpoczyna się od deklaracji zmiennych i domen. Domena *Decyzje* zawiera zmienne  $D1, D2, \dots, D8$ . Reprezentują one decyzje binarne przyjęcia lub odrzucenia otrzymanych w wyniku ogłoszenia aukcji ofert zakupu. Numer w nazwie zmiennej określa numer oferty.

```
Decyzje=[D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8],
Decyzje::0..1,
X::0..1000,
Zysk::0..1000,
```

W następnym kroku widnieje deklaracja wszystkich aktywnych ograniczeń. Zostały one zapisane jako oferty wykluczające się. Przykładem takiego ograniczenia może być zapis  $D1+D5+D6+D8\#=2$ , z którego można się dowiedzieć, że oferty  $D1$  ("A") i  $D5$  ("A,B") i  $D6$  ("A,D") i  $D8$  ("A,B,C") zawierają towar wykluczający się. Liczba 2 oznacza, że są dostępne dwie jednostki wykluczającego się w tych ofertach towaru ("A"), w związku z czym mogą zostać przyjęte tylko dwie z czterech ofert. W taki sam sposób możemy zapisywać ograniczenia ofert substytucyjnych, na przykład  $D1+D4\#=1$  oznacza, że z ofert  $D1$  i  $D4$  może zostać przyjęta tylko jedna.

```
D1+D5+D6+D8#= 2,
D2+D5+D7+D8#= 1,
D3+D7+D8#= 2,
D4+D6#= 1,
D1+D4#= 1,
D2+D3#= 1,
```

Funkcja celu o nazwie *Zysk* została zapisana jako suma poszczególnych iloczynów otrzymanych w ofertach cen i wartości decyzji.

```
Zysk #= 4*D1+3*D2+5*D3+4*D4+8*D5+9*D6+8*D7+11*D8,
```

Optymalizacja i wyznaczenie rozwiązania generowane jest przez standardowy predykat `min_max`, a na koniec wypisanie wyników.

```
X + Zysk #= 1000,
min_max(labeling(Decyzje),X),
writeln(Decyzje),
write('Zysk maksymalny: '),
write(Zysk).
```

Podczas wykonywania optymalizacji wykonywane zostaje również ukonkretnienie wartości zmiennych domeny *Decyzje* przez predykat `labeling`.

```
labeling([H|T]):-
indomain(H),
```

labeling(T).

labeling([]).

Omawiana aplikacja rozwiązuje problem aukcji kombinatorycznych wielu jednostek i wielu towarów. Można ją zastosować wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia ze sprzedażą towarów w formie aukcyjnej. Prosta budowa i duża możliwość konfiguracji, a także możliwość implementacji dodatkowych ograniczeń komplementarnych i substytucyjnych sprawia, że rozwiązanie to jest uniwersalne. Dostosowanie programu do rozwiązania innego problemu aukcji sprowadza się tylko do zmiany ograniczeń poprzez odpowiednią budowę modelu oraz zmiany wartości w funkcji celu.

## 5. Przykład

Ogłoszono aukcję na następujące towary:

- towar "A" w liczbie dwóch jednostek,
- towar "B" w liczbie jednej jednostki,
- towar "C" w liczbie dwóch jednostek,
- towar "D" w liczbie jednej jednostki.

Otrzymane oferty kupna przedstawiono w tabeli 1. Należy wyznaczyć oferty, których sprzedaż przyniesie maksymalny zysk przy spełnieniu następujących ograniczeń:

- a) otrzymane oferty kupna są niepodzielne,
- b) każda z ofert (tabela 1) zawiera chęć kupna pojedynczej lub pojedynczych jednostek towarów,
- c) uczestnik aukcji zgłaszający oferty numer 1 i 4 poinformował, że jest zdecydowany kupić tylko jedną z tych ofert, uczestnik aukcji zgłaszający oferty numer 2 i 3 poinformował, że jest zdecydowany kupić tylko jedną z tych ofert.

Tabela 1

Dane

Nr oferty	Nazwy towarów w ofercie	Proponowana cena
1	A	4
2	B	3
3	C	5
4	D	4
5	A,B	7
6	A,D	9
7	B,C	8
8	A,B,C	11

W wyniku działania aplikacji opisanej w pkt 4 otrzymano wyniki przedstawione w tabeli 2. Wygenerowana kombinacja ofert spełnia wszystkie postawione ograniczenia, suma cen uzyskanych z ich sprzedaży wynosi 26. Jest to optymalna kombinacja maksymalizująca funkcję celu (zysk ze sprzedaży towarów) przy

postawionych w treści zadania ograniczeniach. W tym miejscu warto zwrócić uwagę na fakt, że otrzymane rozwiązanie zgodne jest z ograniczeniami komplementarnymi i substytucyjnymi.

Tabela 2

## Otrzymane wyniki

Nr oferty	Nazwy towarów w ofercie	Przyjęte ceny
1	A	4
3	C	5
6	A,D	9
7	B,C	8

Omawiane rozwiązanie jest rozwiązaniem charakterystycznym ze względu na fakt, że zawiera ono wszystkie towary wraz z odpowiadającymi im liczbami jednostek. Umożliwia ono zatem sprzedaż wszystkiego, co zostało na aukcji wystawione. W praktyce nie zawsze jest to możliwe - wiąże się to z podażą i popytem na dany towar, a także innymi czynnikami ekonomicznymi, a nie z kombinatoryką i programowaniem ograniczeniowym w logice.

## 6. Wnioski

Znane rozwiązywania problemu aukcji kombinatorycznych opierają się na algorytmach dokładnych, takich jak CASS i VSA[3], CAMUS[4] lub algorytmach przybliżonych zmiennego przeszukiwania lokalnego (VNS) [2]. Deklaratywność i brak algorytmu w programowaniu ograniczeniowym w logice umożliwia tworzenie bardzo efektywnych aplikacji rozwiązujących wiele problemów kombinatorycznych, w tym omówiony problem aukcji kombinatorycznych. Omawiane w pkt 3 ograniczenia substytucyjne i komplementarne doskonale dają się implementować w napisaną aplikację (pkt 4). Prostota tej aplikacji zaskakuje, krótki zwięzły kod źródłowy programu nie stwarza problemu w jego zrozumieniu, a łatwa i prosta implementacja zmian danych powodują, że można ją skonfigurować dla dowolnej aukcji kombinatorycznej wielu jednostek i wielu towarów. Zaproponowane przeze mnie rozwiązanie znacznie ogranicza czas potrzebny na wyznaczenie rozwiązania dzięki wbudowanym w kompilatorze języka Chip heurystykom (*Looking Ahead, Forward Checking*). Zastosowanie w aplikacji standardowego predykatu `min_max` umożliwia ciągłą obserwację procesu wyznaczania optymalnego rozwiązania. Dzięki temu w przypadku bardzo dużej liczby sprzedawanych towarów i ofert złożonych na aukcji osoba decydująca o końcowym przyjęciu kombinacji ofert może nie czekać na otrzymanie optymalnego wyniku końcowego, lecz zdecydować się na przyjęcie rozwiązania pośredniego.

## LITERATURA

1. Cramton P., Shoham Y., Steinberg R.: Combinatorial Auctions. MIT Press, 2006.
2. Fleszar K., Toczyłowski E.: Algorytmy przybliżonego rozwiązywania problemu aukcji kombinatorycznej. Materiały XV Krajowej Konferencji Automatyki, Warszawa 2005.
3. Fujishima Y., Leyton-Brown K., Shoham Y.: Taming the computational complexity of combinatorial auctions: Optimal and approximate approaches. 1999, [http://robotics.stanford.edu/~kevinlb/cass\\_vsa.pdf](http://robotics.stanford.edu/~kevinlb/cass_vsa.pdf)
4. Leyton-Brown K., Shoham Y., Tennenholtz M.: An algorithm for multi-unit combinatorial auctions. 2000, <http://www.cs.ubc.ca/~kevinlb/publications.html>
5. Leyton-Brown K.: Auctions, Auction Theory, and Hard Computational Problems in Auctions. 2001, <http://www.cs.ubc.ca/~kevinlb/publications.html>.
6. Lipski W.: Kombinatoryka dla programistów. WNT, Warszawa 2004.
7. Niederliński A.: Constraint logic programming - from Prolog to Chip. Proceedings of the PDC'99 Workshop on Constraint Programming for Decision and Control. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999, p. 27-34.
8. Niederliński A.: A Tutorial CLP Example In CHIP. Proceedings of the CPDC'2003 Workshop on Constraint Programming for Decision and Control. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2003, p. 31-34.
9. Nissan N.: Bidding and allocation in combinatorial auction. 2000, <http://www.cs.huji.ac.il/~noam/mkts.html>.
10. Parkes D.K.: Iterative combinatorial auctions: achieving economic and computational efficiency. PhD Dissertation, 2001, <http://www.eecs.harvard.edu/~parkes/>.
11. Schrage L.: Solving Multi-object Auctions with LP/IP. 2001, <http://www.lindo.com/library/mauction.pdf>.
12. Sysło M.M., Deo N., Kowalik J.S.: Algorytmy optymalizacji dyskretnej. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
13. Toczyłowski E.: Optymalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2002.
14. Vickrey W.: Counterspeculations, auctions, and competitive sealed tenders. Journal of Finance, 16, 1961, p.8-37.

**Podziękowania**

*Autor chciałby podziękować Panu Prof. A. Niederlińskiemu za pomoc przy opracowaniu tego artykułu.*

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Banaszak

**Abstract**

The combinatorial multi-auction problem has been formulated as an combinatorial optimization problem. It has been shown how to formulate and solve it using a constraint logic approach as implemented in the CHIP programming environment. The solution has been illustrated with an example. Particular attention has been drawn to the problem of constraints present in combinatorial auction, particularly to complementary constraints and substitutive constraints.