Seria: GÓRNICTWO z. 186 Nr kol. 1073

Prot Ł. ZIAJA

Instytut Mechanizacji Górnictwa
Politechniki Śląskiej

WARIACYJNE FORMUŁY NIELINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI TAŚM PRZENOŚNIKOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM POPRZECZNYCH ODKSZTAŁCEŃ

Streszczenie. W artykule przedstawiono cząstkę większej pracy wprowadzającą do zagadnień parametryzacji średniej płaszczyzny ze złożonymi granicami i złożoną geometrią pozwalającą sprowadzać rozwiązanie zadań teorii sprężystości do rozwiązywania jednego równania funkcji naprężenia. Wykorzystanie wariacyjnych formuł nieliniowej teorii sprężystości do obliczania wytrzymałości wieloprzekładkowych taśm przenośników taśmowych, stanowi do tego zagadnienia wprowadzenie.

Wektor przemieszczenia w punkcie o współrzędnych (x^i, z) będziemy uwzględniać w modelu odkształceniowym Timoszenki w postaci:

$$\bar{u}^z = \bar{\vartheta} + \bar{\gamma}\, z, \quad \bar{u}^z_{(+)} = \bar{\vartheta} + h\,\bar{\gamma}, \quad \bar{u}_{(-)} = \bar{\vartheta} - h\,\bar{\gamma} \tag{1.12}$$

gdzie:

$\bar{\gamma} = \bar{m}_* - \bar{m}$ - wektor prostopadłego zwrotu elementu,

$\bar{u}^z$ - wektor przemieszczenia taśmy określony zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Love.

Stąd elementy deformacji będą miały postać:

$$\varepsilon^z_{ik} = \varepsilon_{ik} + z\,\chi_{ik}, \quad \varepsilon^z_{i3} = \varepsilon_{i3} + \tfrac{1}{2} z\, \partial_i\, \varepsilon_3, \quad 2\,\varepsilon_3 = 2\,\bar{m}\,\bar{\gamma} + (\bar{\gamma})^3 \tag{1.16}$$

gdzie:

ε_{ik} - składowe deformacji średniej powierzchni określone formułą

$$\begin{aligned} 2\,\varepsilon_{ik} &= \bar{r}_i\,\partial_k \bar{\vartheta} + \bar{r}_k\,\partial_i \bar{\vartheta} + \partial_i \bar{\vartheta}\,\partial_k \bar{\vartheta} \\ &= e_{ik} + e_{ki} + e_i e_{kj} + \omega_i\,\omega_k = \\ &= e_{ik} + e^*_{ki} = e_{ki} + e^*_{ik} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\partial_i \bar{\vartheta} = \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x^i}$$

ε^z_{i3} - poprzeczne odkształcenia,
ε_3 - zgniecenie,
χ_{ik} - składowe tensora skrzywienia,

$$2\chi_{ik} = \bar{r}^*_i \, \partial_k \bar{\gamma} + \bar{r}^*_i \, \partial_i \bar{\gamma} - b^j_i e_{kj} - b^j_k e_{ij} \tag{1.17}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_{ik} &= \chi^o_{ik} + \Delta^*_i \varepsilon_{k3} + \Delta^*_k \varepsilon_{i3} - b_{ik}\varepsilon \\ \chi^o_{ik} &= b_{ik} - b^*_{ik} \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\varepsilon_{i3} &= (\bar{m} + \bar{\gamma})\, \bar{r}^*_i \\ \varepsilon &= \varepsilon_3 - 2\varepsilon_{i3}\varepsilon^{i3} \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Zasada możliwych przemieszczeń posiada postać:

$$\delta A = \iint_{\sigma} (S^{ik}\delta\varepsilon_{ik} + M^{ik}\,\delta\chi_{ik} + 2N^i\delta\varepsilon_{i3} + N^i_1\nabla_i\,\delta\varepsilon_3 + N^3\,\delta\varepsilon_3)d\sigma$$

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_{\sigma} (\bar{X}\,\delta\bar{\vartheta} + M^k \bar{r}^*_k\,\delta\bar{\gamma} + M^3\delta\varepsilon_3) + \\ &+ \int_{c} \left[\Phi^s\delta\bar{\vartheta} + (G^s\,\bar{n}_* - H^s\tau_*)\delta\bar{\gamma} + M^3_n\,\delta\,\varepsilon_3\right] ds \end{aligned} \tag{1.20}$$

Skąd wynikają równania równowagi:

$$F^k = \nabla_i R^{ik} + A^k_{ij} R^{ij} - b^{*k}_i N^i + X^k = 0 \tag{1.21}$$

$$F_3 = \nabla_i R^{i3} + b^*_{ik} R^{ik} + X^3 = 0 \tag{1.22}$$

$$M^k = \nabla_i M^{ik} + A^k_{ij} M^{ij} - N^k + M^k = 0 \tag{1.23}$$

gdzie: R^{ik} i R^{i3} - składowe wektora siły $\bar{R}^i$

$$\bar{R}^i = R^{ik}\bar{r}^*_k + R^{i3}m_* = S^{ik}\bar{r}^*_k + M^{ik}(\partial_k\bar{\gamma} - \bar{r}_j b^j_k) + N^i(\bar{m} + \bar{\gamma}) \tag{1.24}$$

$$R^{ij} = S^{ij} + M^{ik}(\chi^j_k + \nabla_k\varepsilon^{j3} - \nabla^j\varepsilon_{k3}) + 2N^i\varepsilon^{j3} \tag{1.25}$$

$$R^{i3} = N^i + 2b^*_{kj}\,\varepsilon^{j3} M^{ik} \tag{1.27}$$

Z równości:

$$\overline{R}^{i} = R^{ik}\,\overline{r}^{*}_{k} + R^{i3}\,\overline{m}_{*} = C^{ik}\,\nabla_{k}\,\overline{\varphi}$$

znajdujemy:

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}^{ik} &= C^{ij}\,(\nabla^{*}_{j}\,\varphi^{k} - b^{*k}_{j}\,\varphi) \\ R^{i3} &= C^{ik}\,(\nabla_{k}\varphi + b^{*j}_{k}\,\varphi_{j}) \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

przyrównując prawe części równości (1.25) i (1.27) z prawymi stronami równości (1.49) otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2S^{ik} &+ M^{ij}(\chi^{k}_{j} + \nabla_{j}\,\varepsilon^{k3} - \nabla^{k}\,\varepsilon_{j3}) + M^{kj}(\chi^{i}_{j} - \nabla_{j}\,\varepsilon^{i3} - \nabla^{i}\,\varepsilon_{j3}) + \\ &+ 2\,N^{i}\,\varepsilon^{k3} + 2\,N^{k}\,\varepsilon^{i3} = C^{ij}(\nabla^{*}_{j}\,\varphi^{k} - b^{*k}_{j}\,\varphi) + \\ &+ C^{kj}(\nabla^{*}_{j}\,\varphi^{i} - b^{*i}_{j}\,\varphi) \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$N^{i} = C^{ik}(\nabla_{k}\varphi + b^{*j}_{k}\,\varphi_{j}) \tag{1.28}$$

gdzie: M^{ij} wyraża się formułami (1.8)

$$M^{ik}\,I^{1/2} = (C^{it}\,C^{ks} - \tfrac{1}{2}\,C^{ik}\,C^{ts})\,\Psi_{ts} \tag{1.5}$$

a φ^{i} i φ - formułami (1.4)

$$\varphi^{i} = C^{ik}_{*}\,\Psi_{k} \qquad 2\varphi = C^{ik}_{*}\,\Psi_{ik} \tag{1.4}$$

Do ogólnych rozwiązań danych równaniami (1.26) i (1.28) można dołączyć rozwiązania cząstkowe S^{ik}_{o}, N^{i}_{o}, M^{ik}_{o} niejednorodnych równań równowagi (1.21 - 1.23)

$$F^{k} = \nabla_{i}\,R^{ik} + A^{k}_{ij} - b^{*k}_{i}\,N^{i} + X_{k} = 0 \tag{1.7}$$

$$F_{3} = \nabla_{i}\,R^{i3} + b^{*}_{ik}\,R^{ik} + X^{3} = 0 \tag{1.22}$$

$$M^{k} = \nabla_{i}\,M^{ik} + A^{k}_{ij}\,M^{ij} - N^{k} + M = 0) \tag{1.23}$$

Siły R^{i3} znajdujemy z równań (1.27) i (1.28)

$$R^{i3} = N^{i} + 2\,b^{*}_{*j}\,\varepsilon^{j3}\,M^{ik} \tag{1.27}$$

$$N^{i} = C^{ik}\,(\nabla_{k}\varphi + b^{*j}_{k}\,\varphi_{j}) \tag{1.28}$$

w postaci

$$R^{i3} = C^{ik} (\nabla_k \varphi + b_k^{*j} \varphi_j) + 2 b^*_{kj} \varepsilon^{j3} M^{ik} \tag{1.29}$$

gdzie M^{ik} wyraża się równaniem:

$$M^{ik} I^{1/2} = (C^{it} C^{ks} - \frac{1}{2} C^{ik} C^{ts}) \Psi_{ts} \tag{1.6}$$

Oprócz tego z równania (1.20) wynika pięć statycznych równań równowagi:

$$\overline{R}^i n_i = \overline{\Phi}^s \qquad G = M^{ik} n_i n_k = G^s \qquad H = - M^{ik} n_i \tau_k = H^s \tag{1.30}$$

a także szóste równanie równowagi i warunki graniczne (1.13)

$$\begin{aligned} &\nabla_i N^i_1 - N^3 + M^{ik} b^*_{ik} + M^3 = 0 && \text{(wewnątrz } 6\text{)} \\ &N^i_1 n_i = M^3_n && \text{(na S)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

dla określenia N^3, skalarnym równaniom (1.21) i (1.22) odpowiada wektorowe równanie równowagi:

$$\nabla_i \overline{R}^i + \overline{X} = 0 \tag{1.31}$$

b) wariacyjna formuła (1.11):

$$\delta A = \delta \iiint\limits_{(V)} (6^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u}^z}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \overline{u}^z}{\partial x^\beta} 6^{\alpha\beta}) d6 \tag{1.11}$$

która po redukcji na środkową powierzchnię 6 przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \delta \iint\limits_{6} \Big[\overline{X}\,\overline{\vartheta} + \overline{M}^k \overline{r}^*_k\, \overline{\gamma} + M^3(\overline{m} + \overline{\gamma})\overline{\gamma}\Big] d6 + \delta \int\limits_{C} \Big[\overline{\Phi}^S \overline{\vartheta} + (G^s \overline{n}_* - H^s \overline{\tau}_*)\overline{\gamma} + \\ + M^3_n (\overline{m} + \overline{\gamma})\overline{\gamma}\Big] ds = \\ = \delta \iint\limits_{6} \Big[\varepsilon_{ik} S^{ik} + \chi_{ik} M^{ik} + 2 \varepsilon_{i3} N^i + N^i \nabla_i \varepsilon_3 + \varepsilon_3 N^3 + \\ + \frac{1}{2} \nabla_i \overline{\vartheta} \cdot \nabla_k \overline{\vartheta} \cdot S^{ik} + \nabla_i \overline{\vartheta} \cdot \nabla_k \overline{\gamma} \cdot M^{ik} + \nabla_i \overline{\vartheta} \cdot \overline{\gamma} \cdot N^i + \\ + \nabla_i \overline{\gamma} \cdot \overline{\gamma} \cdot N^i_1 + \frac{1}{2} (\overline{\gamma})^2 N^3\Big] d6 \end{aligned}$$

$$\nabla_i \overline{\vartheta} = \partial_i \overline{\vartheta} = \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x^i}$$

$$\nabla_i \overline{\gamma} = \partial_i \overline{\gamma}$$

Podstawiając M^3 z szóstego równania równowagi (1.13) można wyznaczyć N_1^i i N^3. Wówczas poprzednie równanie przyjmie postać:

$$\delta A' = \delta \iint_{\sigma} (\bar{X}\bar{\vartheta} + M^k \bar{r}^*_k \bar{\gamma}) d\sigma + \delta \int_C \left[\bar{\Phi}^S \vartheta + (G^S \bar{n}_* - H^S \bar{\tau}_*)\bar{\gamma}\right] dS =$$

$$= \delta \iint_{\sigma} \Big[(\varepsilon_{ik} + \tfrac{1}{2}\, \partial_i \bar{\vartheta}\, \partial_k \vartheta) S^{ik} + (\chi_{ik} + \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot \nabla_k \bar{\gamma}) M^{ik} +$$

$$+ b^*_{ik} (\bar{m} + \bar{\gamma})\bar{\gamma}\, M^{ik} + (2\,\varepsilon_{i3} + \nabla_i \bar{\vartheta}\,\bar{\gamma}) N^i\Big] d\sigma \tag{1.32}$$

gdzie: $(\bar{m} + \bar{\gamma})\bar{\gamma} \approx \bar{m}_* \bar{\gamma}$ przy $\varepsilon \ll 1$

Jeżeli rozłożyć wektor $\bar{\gamma}$ na podstawowe wektory odkształcanej płaszczyzny:

$$\bar{\gamma} = \gamma^*_i \bar{r}^i_* + \gamma_* \bar{m}_*$$

to otrzymamy:

$$\bar{r}^*_i \nabla_k \bar{\gamma} = \nabla^*_k \gamma^*_i - b^*_{ik} \gamma_k$$

Przy przekształceniu (1.32), przyjmując do wiadomości równość:

$$(\varepsilon_{ik} + \tfrac{1}{2} \nabla_i \bar{\vartheta} \nabla_k \bar{\vartheta}) S^{ik} = \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot \bar{r}^*_k S^{ik}$$

$$(\chi_{ik} + \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot \nabla_k \quad) M^{ik} - b^*_{ik} (\bar{m} + \bar{\gamma})\bar{\gamma}\, M^{ik} =$$

$$= (\nabla_i \bar{\vartheta} \cdot \nabla_k \bar{\gamma} - b^j_k \bar{r}_j \nabla_i \bar{\vartheta} + \bar{r}^*_k \partial_i \bar{\gamma} + b^*_{ik} \gamma_*) M^{ik}$$

gdzie: χ_{ik} - wyznaczone z (1.17) przy założeniu, że

$$b^j_k e_{ij} = b^j_k \bar{r}_j \nabla_i \bar{\vartheta}$$

$$b^*_{ik} (\bar{m} + \bar{\gamma})\bar{\gamma} \approx \bar{m}_* b^*_{ik}$$

$$(2\,\varepsilon_{i3} + \nabla_i \bar{\vartheta}_* \bar{\gamma}) N^i = (\bar{m} + \bar{\gamma})\, \bar{r}^*_i N^i + \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot \bar{\gamma}\, N^i =$$

$$= (\bar{m} + \bar{\gamma}) \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot N^i + (\bar{m} + \bar{\gamma})\, \bar{r}_i N^i + \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot \bar{\gamma} \cdot N^i =$$

$$= (\bar{m} + \bar{\gamma}) \nabla_i \bar{\vartheta} \cdot N^i + \bar{r}^*_i \bar{\gamma}\, N_i$$

otrzymamy:

$$\delta A' = \delta \iint_{\sigma} (\nabla_i \cdot \bar{\vartheta} \cdot \bar{R}^i + M^{ik} \nabla^*_i \gamma^*_k + \gamma^*_k N^k)\, d\sigma \tag{1.33}$$

całkując za pomocą formuły (1.10)

$$\iint\limits_{6} \nabla_i f^i \, d6 = \int\limits_{c} f^i \eta_i \, ds \tag{1.10}$$

otrzymamy składniki zawierające $\bar{R}^i$ i M^{ik}, które zmieniając otrzymany wariacyjną formułę mieszanego typu przy granicznych warunkach (1.37) i (1.38)

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \int\limits_{C_1} \left[\bar{\Phi}^S - \bar{\Phi})\delta\bar{\vartheta} + (G^S - G)^{\delta}\gamma_n - (H^S - H)\delta\gamma_{\tau_*}\right] ds + \\
& + \int\limits_{C_2} \left[\bar{\vartheta}_S - \bar{\vartheta})\delta\Phi + (\gamma^S_{n_*} - \gamma_{n_*})dG - (\gamma^S_{\tau_*} - \gamma_{\tau_*})\delta H\right] ds + \\
& + \iint\limits_{6} \left[(\nabla_i \cdot \bar{R}^i + \bar{X})\delta\bar{\vartheta} + (\nabla_i M^{ik} + A^k_{ij} M^{ij} - N^k)\delta\gamma^*_k\right] d6 + \\
& + \iint\limits_{6} \left[\bar{\vartheta}\nabla_i \, \delta\bar{R}^i + \gamma^*_k(\nabla_i \delta M^{ik} + A^k_{ij} \, \delta M^{ij} - \delta N^k)\right] d6 = 0
\end{aligned} \tag{1.34}$$

gdzie:

$$\gamma_{n_*} = \bar{n}_* \bar{\gamma}$$

$$\gamma_{\tau_*} = \bar{\tau}_* \bar{\gamma}$$

warunek $\delta\Pi = 0$ rozpada się na równania Eullera - Lagrange'a odpowiadające zasadzie możliwych przemieszczeń i równanie Eullera - Lagrange'a zasady Castigliano.

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int\limits_{C_1} \left[(\bar{\Phi}^S - \bar{\Phi})\delta\bar{\vartheta} + (G^S - G)\delta\gamma_{n_*} - (H^S - H)\delta\gamma_{\tau_*}\right] d6 + \\
& + \iint\limits_{6} \left[(\nabla_i \bar{R}^i + \bar{X})\delta\bar{\vartheta} + (\nabla_i M^{ik} + A^k_{ij} . M^{ij} - N^k + M^k)\delta\gamma^*_k\right] d6 = 0
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
\delta K = & \int\limits_{C_2} \left[(\bar{\vartheta}_S - \bar{\vartheta})\delta\Phi + (\gamma^S_{n_*} - \gamma_{n_*})\delta G - (\gamma^S_{\tau_*} - \gamma_{\tau_*})\delta H\right] dS + \\
& + \iint\limits_{6} \left[\bar{\vartheta}\nabla_i \, \delta\bar{R}^i + \gamma^*_k (\nabla_i \, \delta M^{ik} + A^k_{ij} \, \delta M^{ij} - \delta N^k)\right] d6 = 0
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Z (1.35) wynikają statyczne warunki graniczne:

$$\bar{\Phi} = \Phi^S \qquad G = G^S \qquad H = H^S \tag{1.37}$$

i równania równowagi (1.21 - 1.23), a z równania (1.36) geometryczne warunki graniczne.

$$\left.\begin{aligned} \bar{\vartheta} &= \bar{\vartheta}_S \\ \gamma_{n*} &= \gamma^S_{n*} \\ \gamma_{\tau*} &= \gamma^S_{\tau*} \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

i równania równowagi dla wariacji sił i momentów δS^{ik}, δN^i, δM^{ik}.
Przy braku sił i momentów powierzchniowych $\bar{X} = M^k = 0$ można wprowadzić funkcję sił φ i funkcję momentów za pomocą równości (1.5) dla $\bar{R}^i$

$$\bar{R}^i = c^{ik} \nabla_k \bar{\varphi} = c^{ik} \left[r^*_j (\nabla^*_k \varphi^j - b^{*j}_k \varphi) + \bar{m}_* (\nabla_k \varphi + b^{*r}_k \varphi_j) \right\} \tag{1.5}$$

i równości (1.35a)

$$\left.\begin{aligned} M^{ik}_* &= c^{ks}_* c^{it}_* (\nabla^*_t \Psi_S - b^*_{tS} \Psi) - c^{it}_* \varphi \\ N^k_* &= c^{kS}_* (\nabla^*_S \varphi + b^{*i}_S \varphi_i) \\ \varphi^i &= c^{it}_* (\nabla^*_t \Psi + b^{*j}_t \Psi_t) \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

dla M^{ik} i N^k.

Wówczas całka po 6 otrzymana z równania (1.36) zgadza się z odpowiednią całką (1.14a). Tak więc z warunku $\delta K = 0$ wynika wyrażenie (1.1) i (1.2).

$$\begin{aligned} L = c^{in} c^{jk} (\nabla_n \nabla_k \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{2} \chi_{ik} \chi_{nj} - \tfrac{1}{2} A^S_{ik} P_{S,jn}) - \\ - (2Ha^{ik} - b^{ik}) \chi_{ik} - Ka^{ik} \varepsilon_{ik} = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$L^j = c^{in} c^{jk} \left[\nabla_n \chi_{ik} - (b_{ns} - \chi_{ns}) A^S_{ik} \right] \tag{1.2}$$

dla parametrów pierwszej i drugiej formy kwadratowych deformacji środkowej powierzchni a^*_{ik} i b^*_{ik},
gdzie: H i K - to średnia gaussowska krzywizna powierzchni, a równania (1.1) i (1.2) to równania ciągłości skończonych deformacji.
Wspomniane odniesienia odpowiadają sobie niezależnie od przyjętych hipotez kinematycznych.

Aby otrzymać równania ciągłości deformacji z uwzględnieniem poprzecznych obciążeń i odkształceń (wręcz zgniotów) podstawiamy w (1.1) i (1.2) w miejsce $\chi_{ik} = b_{ik} - b^*_{ik}$, ich wyrażenia

$$\chi_{ik} - \nabla^*_i \ \varepsilon_{k3} - \nabla^*_k \ \varepsilon_{i3} + b_{ik}\varepsilon$$

wzięte z równań (1.18).

Przy $R^{i3} \approx N^i$ formuły (1.5) i (1.6) pozostają w mocy:

$$\overline{R}^i = c^{ik} \nabla_k \overline{\varphi} = c^{ik} \left\{ \overline{r}^*_j (\nabla^*_k \varphi^j - b^{*j}_k \varphi) + \overline{m}_*(\nabla_k \varphi + b^{*j}_k \varphi_j) \right\} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} 2 S^{ik} I^{1/2} = (c^{it} c^{ks} + c^{kt} c^{is}) \nabla^*_t \Psi_s + \big[b^{*k}_j (c^{it} c^{is} c^{ts}) + \\ + b^{*t}_j (c^{kt} c^{js} - c^{kj} c^{ts}) \big] \Psi_{ts} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\left.\begin{aligned} R^{ik} &= c^{it} (\nabla^*_t \varphi^k - b^{*k}_t \varphi) \\ N^i &= c^{ik} (\nabla_k \varphi - b^{*j}_k \varphi_j) \end{aligned}\right\} \quad (1.39)$$

$$M^{ik} = c^{it} c^{ks} \Psi_{ts} - c^{ik}\varphi \quad (1.40)$$

gdzie funkcje φ^i i φ wyrażone są przez Ψ i Ψ_i równaniem (1.28)

$$\left.\begin{aligned} \varphi^i &= c^{ik}_* \Psi_k \\ 2\varphi &= c^{ik}_* \Psi_{ik} \end{aligned}\right\} \quad (1.28)$$

Siły S^{ik} określamy równaniem (1.25) wprowadzając w nie R^{ik}, N^i, M^{ik} z równań (1.39) i (1.40).

W przypadku rozpatrywania odkształceń taśm przenośnikowych kowariantne pochodne w określeniach a_{ik} i a^*_{ik} nie odpowiadają sobie, nawet częściowo odpowiadające sobie wektory podstawowe także sobie nie odpowiadają.

$$\gamma^*_i \approx \gamma_i \qquad \gamma'_{n_*} \approx \gamma_n \qquad \gamma_{\tau_*} \approx \gamma_\tau \qquad \overline{m}_* \overline{\vartheta} \approx W \qquad U^*_i \approx U_i$$

Zasada możliwych przemieszczeń (1.16 - 1.20) przyjmie postać:

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= \iint_6 (S^{ik} \delta \ \varepsilon_{ik} + M^{ik} \ \delta X_{ik} + 2 N^i \delta \ \varepsilon_{i3}) d6 \\ \delta A &= \iint_6 (\overline{X} \delta \overline{\vartheta} + M^k \delta \gamma_k) \ d6 + \int_C (\overline{\Phi}^S \delta \overline{\vartheta} + G^S \delta \ \gamma_n - H^S \delta \ \gamma_\tau) dS \end{aligned}\right\} \quad (1.41)$$

$$\bar{\gamma}_n = \bar{n}\,\bar{\gamma}$$

$$\gamma_\tau = \bar{\tau}\,\bar{\gamma}$$

$$\gamma_k = \bar{r}_k\,\gamma$$

$$\left.\begin{aligned} 2\,\varepsilon_{ik} &= e_{ik} + e_k + \omega_i\,\omega_k \\ \chi_{ik} &= -\nabla_i\nabla_k\,w + \nabla_i\,\varepsilon_{k3} + \nabla_k\,\varepsilon_{i3} \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\,\varepsilon_{i3} &= \omega_i + \gamma_i \\ \omega_i &= \nabla_i\,W \\ e_{ik} &= \nabla_i\,u_k - b_{ik}\,W \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

Pełny funkcjonał (1.44) upraszcza się i przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \Pi = &\iint_{\sigma} (\bar{X}\,\bar{\vartheta} + M^k\,\gamma_k)\,d\sigma + \int_C (\bar{\Phi}^S\,\bar{\vartheta} + G^S\,\gamma_n - H^S\gamma_\tau)\,dS + \\ &- \iint_{\sigma} (S^{ik}\,\varepsilon_{ik} + M^{ik}\chi_{ik} + \tfrac{1}{2}\,\omega_i\,\omega_k\,S^{ik} + 2\,\varepsilon_{i3}\,N^i)\,d\sigma \end{aligned} \tag{1.44}$$

Z warunku $\delta\Pi = 0$ otrzymujemy równanie Eullera - Lagrange'a, zasadę możliwych przemieszczeń:

$$\begin{aligned} &\int_{C_1} \Big[(\Phi_n^S - T_n)\,\delta u_n + (\Phi_\tau^S - T_{n\tau})\,\delta u_\tau + (\Phi_m^S - \Phi_m)\,\delta W + (G^S - G)\,\delta\gamma_n - \\ &-(H^S - H)\,\delta\gamma_\tau\Big]dS = \iint_{\sigma}\Big[D\,\Delta(\Delta W - 2\,\nabla_i\,\varepsilon^{i3}) - S^{ik}(b_{ik} + \nabla_i\,\omega_k) + P\Big]\,\delta W\,d\sigma \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m &= N + T_n\,\omega_n + T_{n\tau}\,\omega_\tau \\ N &= N^i\,n_i \end{aligned}\right. \tag{1.46}$$

i zasadę Castigliano:

$$\begin{aligned} &\int_{C_2} \Big[U_n^S\,\delta T_n + U_\tau^S\,\delta T_{n\tau} + (W_3 - W)\,\delta\,\Phi_m + (\gamma_n^3 - \gamma_n)\,\delta G - \\ &- (\gamma_\tau^S - \gamma_\tau)\,\delta H\Big]\,dS = I_c' + \iint_{\sigma} L\,\delta\,\Psi\,d\sigma \end{aligned} \tag{1.47}$$

przy tym przyjęto, że:

$$W(\nabla_i \; \delta N^i + S^{ik} \; \delta b^*_{ik} + b^*_{ik} \; \delta S^{ik}) = 0$$

$$\iint_{\sigma} (\omega_i \; \delta N^i + S^{ik} \omega_k \delta \, \omega_i) d\sigma = \iint_{\sigma} (W \, b_{ik} - \omega_i \omega_k) \; \delta S^{ik} \, d\sigma +$$

$$+ \int_{C_2} W \left[\delta N + \delta (\omega_n \, T_n) + \delta (\omega_\tau T_{n\tau}) \right] dS$$

L odpowiada równaniu ciągłości (1.1), przy czym χ°_{ik} wchodzące w to wyrażenie wyznacza się na przegięciu W, które znajdujemy po uściśleniu teorii:

$$\chi^{\circ}_{ik} = - \nabla_i \nabla_k W$$

$$L = \frac{1}{E\,h} (\nabla \nabla \Psi + \chi^{01}_2 \; \chi^{02}_1 - \chi^{01}_1 \; \chi^{02}_2 - b^j_j \, a^{ik} - b^{ik}) \, \chi^{01}_{ik} \tag{1.48}$$

gdzie I'_c wyraża się formułą (1.15a), która pozwala sformułować warunki graniczne.
Z wariacyjnych formuł (1.45) i (1.9) widać, że różnią się one mało od odpowiadających im formuł klasycznej teorii odkształceń powłok (1.14) i (1.15).

Dla jednoczesnego spełnienia równań równowagi i równań ciągłości deformacji zbudowany został prost zy wariant funkcjonału mieszanego typu (1.11a) na podstawie hipotezy Kirchhoffa - Love, a także funkcjonał (1.33) na podstawie odkształceniowego modelu Timoszenki.

W pracy pokazano, że funkcjonał E.Reissnera także pozwala jednocześnie spełniać równania równowagi i równania ciągłości.
Niektóre aspekty tego przypadku były rozpatrzone w poprzednich artykułach.

LITERATURA

[1] Antoniak J., Ziaja P.: Próba zbudowania modelu matematycznego ugięcia taśmy przenośnikowej. Prace Naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej Nr 30/4/1978. Konferencja Międzynarodowa - referat.

[2] Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów. PWN, Warszawa 1977.

[3] Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1977.

[4] Nowacki W.: Postępy teorii sprężystości. PWN, Warszawa 1986.

[5] Timoszenko S.: Teoria płyt i powłok. PWN, Warszawa 1960.

[6] Ziaja P.: Matematyczna analiza własności sprężystych liny wyrównawczej okrągłej. The Pensylvania State University 1983. Konferencja Międzynarodowa - referat.

[7] Ziaja P.: Matematyczna teoria a dynamika okrągłej liny wyrównawczej w ujęciu wariacyjnym, topologicznym i teorii momentowej, tensorowej. Dynamika teznich zariezani CSVTS, Ostrava 1985. Konferencja Międzynarodowa - referat.

Recenzent: Doc. dr hab. Janusz Szopa

Wpłynęło do Redakcji w styczniu 1990

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КОНВЕЙЕРНЫХ ЛЕНТ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Р е з ю м е

Статья представляет собой часть работы, которая вводит в проблемы параметризации средней плоскости со сложными границами и в сложную геометрию, позволяющую свести решение задач теории упругости к решению одного уравнения функции напряжения. Использование вариационных формул нелинейной упругости для расчетов прочности многопрокладочных лент ленточных конвейеров является введением в эту проблему.

VARIATIONAL FORMULAS OF NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY OF CONVEYOR BELTS WITH DUE CONSIDERATION TO TRANSVERSE DEFORMATIONS

S u m m a r y

In the article has been presented a part of a larger elaboration introducing the problem of parametrization of the mean plane with complex boundaries and a complex geometry making passible the reducing of the solving of the problems of the theory of elasticity to the soliving of one equation of the stress function. The use of variation formulas of nonlinear elasticity in the calculation of the strength of a multi fitting belt of belt conveyors constitutes an introduction to this problem.