

Tadeusz CHMIELEŃSKI

Włodzimierz WRÓBLEWSKI

VERWENDUNG EINER DER METHODEN DES FINITEN VOLUMENELEMENTE
BEI DER LÖSUNG DER TRANSSONISCHEN STRÖMUNG IM TURBINENGITTER

Zusammenfassung. Im Artikel wurde ein Lösungsschema der ebenen transsonischen Strömung im Schaufelkanal einer Axialturbine dargestellt. Auch die Lösungsart eines Erhaltungsgleichungssystems mit Einsatz der zeitabhängigen Methode der finiten Volumenelemente wurde hier geschildert so wie die Bestimmungsart der Anfangs- und Randbedingungen beschrieben. Weiter wurden die aus den Berechnungen erhaltenen Ergebnisse dargestellt.

Wichtigere Bezeichnungen

- e - Gesamtenergie ($c_p T + \frac{w^2}{2}$)
p - Statischer Druck
 \vec{u} - Axialgeschwindigkeit
 \vec{v} - Umfangsgeschwindigkeit
 ρ - Dichte
 t - Zeit
 a - Schallgeschwindigkeit
 \vec{w} - Strömungsgeschwindigkeit
E - Innenenergie

1. Einführung

Für die Berechnung der transsonischen Strömung wendet man das Zeit-Schritt-Verfahren an. In dieser Methode bekam man der Lösung der stationären Strömung als das Ergebnis, das nach der Lösung der unstationären Gleichungen erhalten wurde. Der Lösungsvorgang der unstationären Gleichungen beginnt mit ungefähren Werten der Endlösung, die man weiter betrachtet als eine gewisse Störung, die sich unter bestimmten Randbedingungen entwickelt, bis zum Erreichen der Konvergenz. Ein Vorteil dieser unstationären Annäherung ist das Bewahren des hyperbolischen Gleichungstyps für jede Strömungsart, unterschall und überschall. Ein Nach-

teil dieser Methode ist das Beanspruchen langer Rechenzeiten zur Erhaltung der Konvergenz. Unter den Lösungsmethoden der unstationären Masse-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen kann man explizite und implizite Zeitschrittmethoden unterscheiden. In der Gruppe der expliziten Methoden, die am häufigsten angewandt werden, kann man zwei Approximationsmethoden beobachten. Die erste beruht der Anwendung des expliziten MacCormac Schemas, oder in der Form eines Differenzenverfahren für ein rechteckiges Berechnungsfeld, das man nach einer Koordinatentransformation erhält, oder in Form finiter Volumenelemente im physikalischen Strömungsgebiet. Das Schema ist von der zweiten Genauigkeitsordnung wenn es um die Zeit geht und erfordert die Anwendung einer zusätzlichen künstlichen Viskosität um genügend erfolgreich die Stosswelle zu "verschmieren". Andere Autoren ziehen die Anwendung des Schemas vor, die nur von der ersten Genauigkeitsordnung, wenn es um die Zeit geht, sind, aber sie führen während der Zeitschrittprozedur gewisse Dissipationseffekte ein, um die Rechnungen zu beschleunigen [1, 3, 4, 7, 8, 9]. Man führte einen künstlichen dissipativen Mechanismus ein, um ohne Stossanpassung einen glatten Stossübergang zu erzielen.

Die dissipative Mechanismen werden gezielt eingeführt, so dass die Diskontinuitätsfläche durch eine dünne Übergangssicht ersetzt wird, in der sich die Größen zwar sehr schnell, aber nicht un stetig ändern.

Im vorliegenden Artikel wird ein Schema der korrigierten Viskosität dargestellt [1, 2, 4], das zur zweiten Methode der aufgezählten Gruppen gehört. Das ist ein ein schritt explizites Schema, das aus dem originellen Lax Schema erhalten wurde. Es wurde auch eine unmittelbare Diskretisierung des Berechnungsgebietes mit Verwendung der Methode der finiten Volumenelemente angewandt. Diese Methode beruht auf der numerischen Gestalt der Erhaltungsgleichungen, die in Integralform geschrieben sind. Sie war zum ersten Mal von McDonald angewandt für die Turbinengitterströmung und ist jetzt oft gebraucht [5]. Das Kontrollvolumen, das bei den dargestellten Rechnungen gebraucht wurde ist gleich mit dem, das in [1, 2, 4], angewandt wurde, und ähnlich dem Volumenelement, das von Denton verwendet wurde [3]. Sein Vorteil ist das, dass zur Approximation der elementären Strömungen, an den Konturen des Kontrollvolumens nur vier Knoten benötigt werden. Es minimalisiert die Rechenzeit für die Bilanz eines Kontrollvolumens. Bei der Wahl der Berechnungsmethode richtete man sich noch den Möglichkeiten ihrer Erweiterung auf die dreidimensionale Probleme.

2. Erhaltungssätze in Differentialer Gestalt

Das Problem der nicht stationären Strömung im Turbinengitter beschreibt ein partielles Differenzialgleichungssystem, das in einer konservativen Form geschrieben ist:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

wo:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{Bmatrix}; \quad \underline{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(e + p/\rho) \end{Bmatrix}; \quad \underline{G} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(e + p/\rho) \end{Bmatrix}$$

Die Gleichungen (1) drücken in differenzieller Form den Masse-, Impuls-, und Energieerhaltungssatz aus. Um dieses System zu schliessen, ergänzen wir es mit einer Gasgleichung für ein ideales Gas. Das Gleichungssystem ist vom hyperbolischen Typ, wegen der Zeit für jede Strömungsart: unterschall wie auch überschall.

3. Anwendung des korrigierten Viskositätssystems

Berechnungen der Turbinengitterströmungen zeigen die Überlegenheit der Methode der finiten Volumenelemente über dem Differenzenverfahren. Ein wichtiger Faktor ist hier die Möglichkeit einer leichten Diskretisierung des Berechnungsgebietes, das in den Strömungsmaschinen angetroffen wird ohne die Notwendigkeit es zu transformieren zu einem Hilfsberechnungsgebiet. Aus diesem Gesichtspunkt ist die Methode der finiten Volumenelemente ähnlich elastisch wie die Methode der finiten Elemente. Für die Methode der finiten Volumenelemente schreibt man die Grundgleichungen (1) in Integralgestalt. Wird für das zweidimensionale Problem angenommen, dass S die Oberfläche einer der Kontrollelemente ist, L - ihrer Kontur und n ihre äussere Normalvektor zu L ist, dann führt die Integration der Gleichung (1) durch S zu folgender Integralgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \underline{U} \, dS = - \int_L (\underline{F} n_x + \underline{G} n_y) \, dl \quad (2)$$

Bei der Annahme, dass die Strömungsgrössen entlang der Ränder der Kontrollelemente konstant bleiben kann man die Integration der elementären Strömungen an Rändern mit ihrer Summe ersetzen. Das Zeitdifferential diskretisiert man mit Hilfe des Mittelwertes des korrigierten Viskositätsschemas.

Für die Turbinengitterströmung erhalten wir folgende Diskretisierungsgleichung [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{i,k}^{n+1} = & \frac{\Delta \bar{u}}{S} \sum (\text{Bestandströmungen auf dem Kontur}) + \\
 & + \frac{1}{4} (\bar{u}_{i-1,k}^{n+1} + \bar{u}_{i,k+1}^n + \bar{u}_{i+1,k}^n + \bar{u}_{i,k-1}^n) + \\
 & - \frac{\alpha}{4} (\bar{u}_{i-1,k}^* + \bar{u}_{i,k+1}^* + \bar{u}_{i+1,k}^* + \bar{u}_{i,k-1}^* - 4 \bar{u}_{i,k}^*) \quad (3)
 \end{aligned}$$

wo:

i, k - Kennziffern in Axial - und Umfangsrichtung, (Bild 1),

n - Zeitindex,

α - numerisches Viskositätskoeffizient vom Dichtegradient abhängig.

Glieder mit einem Stern gekennzeichnet werden geändert, jede N seitlicher Iteration. Das Schema ist stabil für die CFL Bedingung.

4. Diskretisierung des Berechnungsfeldes

Eine der Modifikationsrichtungen der Kontrollelemente ist das Streben zur maximalen Verkürzung der Rechenzeit. Dieses wird erreicht infolge einer Begrenzung zum unbedingten Minimum, der Knotenzahl, aus denen die Werte zur Bestimmung der Werte in den Berechnungsknoten ausgenutzt werden. Die besten Ergebnisse auf diesem Gebiet hatten Denton, Van Howe und Arts [1, 2, 3, 4]. Sie verwenden zur Berechnung Kontrollelemente, die sich bei Ausnutzung der Werte aus nur vier Knoten bilanzieren.

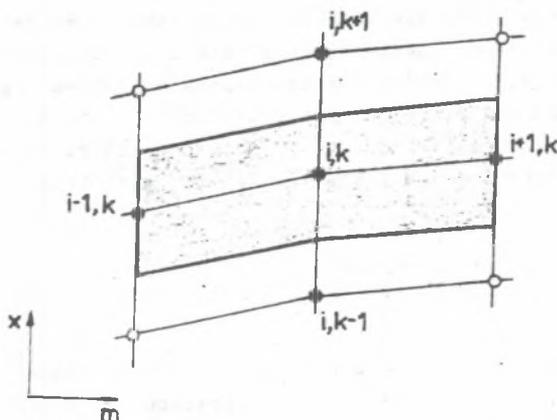


Bild 1. Das Kontrollelement für die Berechnungen
Rys. 1. Elementarna komórka zastosowana do obliczeń

Die Diskretisierung dieser Art ist in der Regel nur von erster Genauigkeitsordnung, aber sie verkürzt bedeutend die Rechenzeit. In diesem Artikel wurde die Art der Diskretisierung in [1, 2, 4] vorgeschlagen, angenommen. In dieser Diskretisierung sind die Knoten auf der Umfangslinie in der Mitte zwischen Quasiströmungslinien. Die Gestalt eines Kontrollelementen wird auf Bild 1 dargestellt. Die Unbekannten im Knoten (i, k) sind aus entsprechenden Werten in umgebenden Knoten $(i, k+1)$, $(i+1, k)$, $(i, k-1)$, $(i-1, k)$. Das Berechnungsfeld ist durch die Punkte A, B, C, D, E, F definiert. Sie ist auf Bild 2 dargestellt und aus den einzelnen Quasiströmungslinien und aus den Umfangslinien geschaffen. Die Qua-

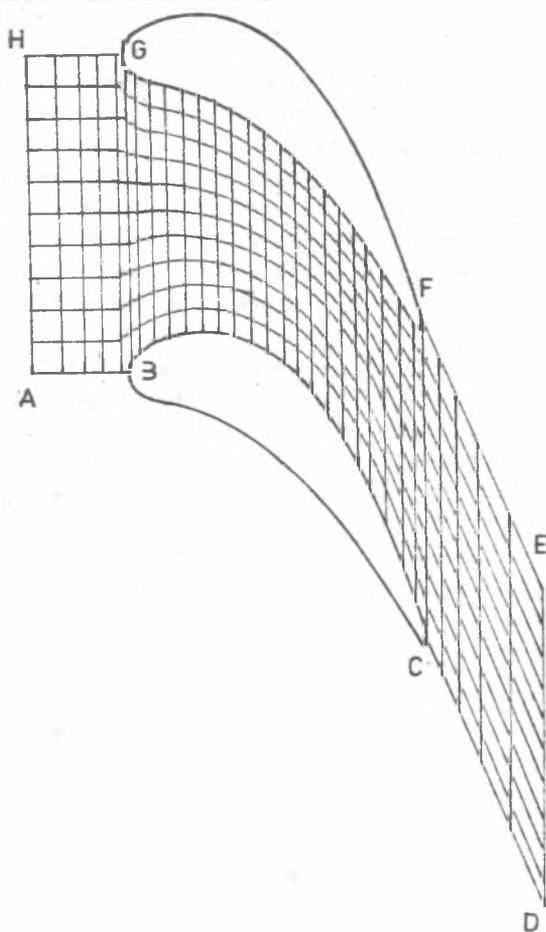


Bild 2. Berechnungsfeld mit dem Netz
Rys. 2. Obszar obliczeniowy z siatką

siströmungslinien und aus den Umfangslinien geschaffen. Die Quasiströmungslinien sind voneinander gleich entfernt, in der Umfangsrichtung. In den Stellen, wo man die grossen Dichtegradien erwartet, wird eine Verminderung der Abstände zwischen den Umfangslinien, um erforderliche Genauigkeit zu erhalten, verwendet. Diese Stellen werden am häufigsten am Gittereintritts- und Gitteraustrittsfront angetroffen. Das Berechnungsfeld wird in der Zuströmungs- und Abströmungsrichtung erweitert zu solcher Entfernung, die das Eingeben homogene Randbedingungen auf den AH und DE Rändern des Berechnungsfeldes ermöglicht.

5. Definition der Rand- und Anfangsbedingungen

Um das Gleichungssystem (1) zu lösen, muss man sowohl das System wie auch die Gasgleichung für ein ideales Gas mit entsprechenden Randbedingungen und mit einer Anfangsbedingung ergänzen. Für den konkreten Fall des Strömungsfeldes, auf Bild 2 gezeigt, soll man die Randwerte auf den Querschnitten AB, CD, EF, GH, HA und BC, FG des Profils feststellen.

Auf der Berechnungsgrenzen AB, CD, EF, GH gelten Periodizitätsbedingungen: Masse-, Impuls- und Energieströmung durch AB (CD) muss, wenn es um die Absolutewerte geht, gleich den entsprechenden Strömungen durch GH (EF) sein.

Auf den Rändern BC, FG die die Profilwände bilden muss die Bedingung der Undurchlässigkeit erfüllt sein (Die normale Geschwindigkeitskomponente an der Wand muss gleich Null sein).

Die Zahl der Randbedingungen, an dem Zuströmquerschnitt AH i Abströmquerschnitt DE angewandt, ist anhand der Charakteristiktheorie bestimmt [2, 6].

Im Zusammenhang damit, dass man die Zu- und Abströmbedingungen als gleich in der Umfangsrichtung annimmt, kann man zu ihrer Aufgabe die eindimensionale Strömungsanalyse ausnutzen.

Daraus folgt, dass [6]:

- wenn im Zuströmquerschnitt die Axialgeschwindigkeit u subsonisch ist, da müssen in diesem Querschnitt drei Randbedingungen angegeben werden,
- wenn die Axialgeschwindigkeit u supersonisch ist ($u > a$) da werden im Zuströmquerschnitt vier Grössen bestimmt.

Analog für den Abströmquerschnitt:

- wenn die Axialgeschwindigkeit u subsonisch ist ($u < a$), da ist nur eine Randbedingung erforderlich,
- wenn die Axialgeschwindigkeit u supersonisch ist ($u > a$), da ist es nicht erforderlich irgendeine Grösse in diesem Querschnitt zu bestimmen.

Im Turbinengitter hat man beinahe immer eine Strömung in der die Axialgeschwindigkeit u am Zu- und Abströmquerschnitt subsonisch ist, so begrenzt man sich im Prinzip auf folgende Randbedingungen:

- für Zuströmquerschnitt wird bestimmt
 - der Ruhedruck
 - die Ruhetemperatur
 - der Zuströmwinkel
- für Abströmquerschnitt wird bestimmt
 - der statische Druck

Die Anfangsbedingung in der untersuchten Aufgabe kann man auf verschiedene Weise annehmen. Um die Rechenzeit zu verkürzen sollte man für $\xi = 0$ auf dem ganzen Berechnungsfeld die Werte der entsprechenden Grössen angenähert zur der Endlösung annehmen.

6. Berechnungsergebnisse

Die Rechnungen wurden auf dem Profilingitter einer Gasturbine durchgeführt [2]. Sie wurden auf dem Computer MERA-60 realisiert. Als Bedingung der stationären Strömung wurde angenommen, dass der relative Innenergiewechsel im Knoten eine Ungleichung erfüllt:

$$\left| \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{E_{i,j}^n} \right| < \varepsilon \quad (4)$$

Die allgemeine Bedingung für Erhaltung der stationären Strömung besteht darin, dass das Ergebnis von der Zeit unabhängig ist.

Während der Realisierung der Rechnungen ist es erforderlich das CFL Kriterium, das eine unerlässliche Stabilitätsbedingung ist, zu kontrollieren. Der Zeitschnitt für die Strömungswelle, die von Q ausgeht muss so gross sein, um die Ränder des Viereck nicht zu überschreiten (Bild 3). Für das Gleichungssystem (1) hat das Kriterium eine folgende Gestalt:

$$(w + a) \frac{\Delta t}{\Delta l} \leq 1 \quad (5)$$

wo:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Δl - die kleinste Entfernung zwischen Q und den Quadratseiten ABCD (Bild 3).

Die Rechnungen wurden bei der Annahme $M_1 = 0,5$; $\beta_1 = 24^\circ$ und $M_{2is} = 1,41$ durchgeführt.

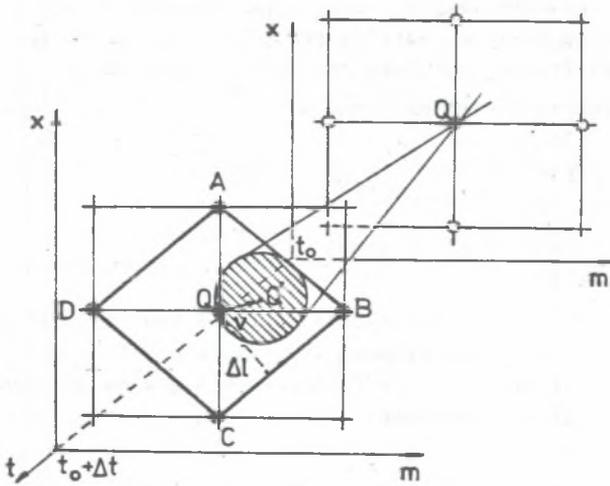


Bild 3. Bestimmung des Zeitschrittes
 Rys. 3. Określenie kroku czasowego

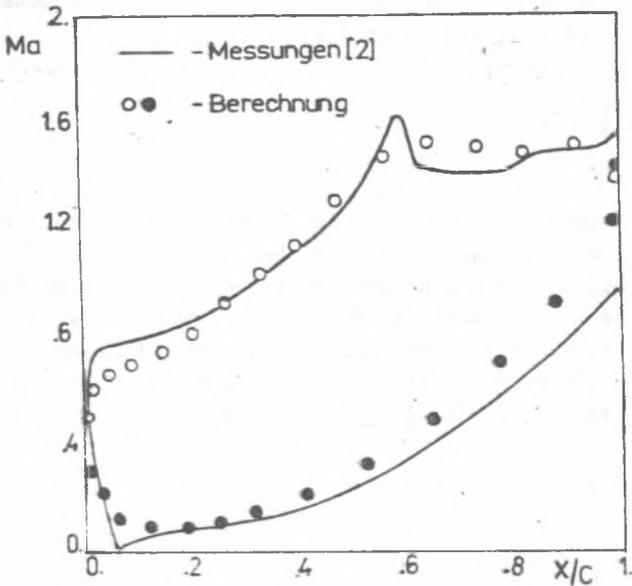


Bild. Machzahlverlauf ($M_1 = 0,5$, $\beta_1 = 24^\circ$, $M_{2B} = 1,41$)
 Rys. 4. Rozkład liczby Macha

Wegen dem kleinem Speicher der Rechenmaschine, die zu den Rechnungen gebraucht wurde, wurde ein Netz 38×7 angewandt, wobei berücksichtigt wurde, dass um genauere Ergebnisse zu erreichen, eine Verdichtung des Netzes erforderlich sein wird. Die erhaltenen Ergebnisse kann man als Daten zu Berechnungen an einem dichtem Netz betrachten.

Auf Bild 4 wurde eine Machzahlverlauf auf der Profilkontur dargestellt. Der Verlauf ist ähnlich dem Verlauf, den man aus den Messungen erhielt [2]. Ein sanfter Kurvenverlauf aus dem Stossgebiet erfolgt daraus, dass ein zu dünnes Rechnetz angewandt wurde. Die dargestellten Resultate wurden nach etwa 2500 Iterationen erhalten.

7. Schulssfolgerungen und Anmerkungen

1. Die Vorgeführte Berechnungsmethode erlaubt das Strömungsproblem, im Turbinengitter mit komplizierten Geometrie, zu lösen.

2. Im wesentlichen Grad wird die Rechenzeit vermindert, dank dem Einsatz eines Kontrollelementen von entsprechender Form, die die Knotenzahl, zur Bilanzierung minimalisiert. Dieser Vorteil hat wesentliche Bedeutung bei ewentuellicher Erweiterung dieser Methode auf dreidimensionale Strömung.

3. Es ist notwendig bei den Berechnungen ein Netz mit grosserer Knotenzahl anzuwenden, um besser die Welleneffekte, die im Kanal vorkommen zu wiedergeben. Am besten ist es die Berechnungen zweistufig zu führen, am dünnen Netz zu beginnen und die Ergebnisse als Daten für die Berechnungen an dichtem Netz zu betrachten.

SCHRIFTTUM

- [1] Arts T.: Calculation of the Three-Dimensional, Steady, Inviscid Flow in A Transonic Axial Turbine Stage. ASME Paper 84-GT-76, 1984.
- [2] Arts T.: Cascade Flow Calculations Using a Finite Volume Method VKI LS 1982.05.
- [3] Denton I.D.: "A Time Marching Method for Two - and Three-Dimensional Blade to Blade Flow" ARCR and M. 3715, 1975.
- [4] Van Hove W.: Calculation of Three-Dimensional Inviscid, Rotational Flow in Axial Turbine Blade Rows. Transactions of the ASME, S.A., Vol 106, April 1984.
- [5] Mc Donald P.W.: The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades. ASME Paper 71-GT-89.
- [6] Gopalakrishnan, Bozzola R.: Numerical Representation of Inlet and Exit Boundary Conditions in Transient Cascade Flow. Transactions of the ASME. Journal of Engineering for Power, Nr 10, 1973.
- [7] Lehthaus F.: Berechnung der transsonischen Strömung durch eben Turbinengitter nach den Zeit-Schritt-Verfahren" VDI-Forschungs Heft 585.
- [8] Bosman C, Highton I.: A Calculation Procedure for Three-Dimensional Time Dependent, Inviscid, Compressible Flow Through Turbomaschine Blades of any Geometry. I. Mech. Engrg. Sc., Vol. 21, Nr 1, 1979.

- [9] Chmielniak T.: Metody rozwiązania zadania prostego dla przepływu transsonicznego w palisadach łopatkowych. ZN Pol. Sl. s. Energetyka z. 87, Gliwice 1984.

Recenzent: Doc. dr inż. Jan RADWAŃSKI

Wpłynęło do Redakcji w marcu 1987

ZASTOSOWANIE JEDNEJ Z METOD OBJĘTOŚCI SKOŃCZONYCH DO OBLICZEŃ PRZEPIYU TRANSONICZNEGO PRZEZ PALISADĘ TURBINOWĄ

S t r e s z c z e n i e

W artykule przedstawiono schemat rozwiązania płaskiego przepływu transsonicznego w kanale międzyłopatkowym turbiny osiowej. Rozważano przepływ gazu idealnego nielepkiego nie przewodzącego ciepła. Przedstawiono sposób rozwiązania układu równań zachowania przy zastosowaniu metody kroków czasowych i metody objętości skończonych. W związku z koniecznością rozmycia fali uderzeniowej zastosowano w obliczeniach korygowany schemat lepkościowy. Określono sposób dyskretyzacji obszaru obliczeniowego oraz podano sposób tworzenia komórek obliczeniowych, dla których tworzy się elementarne bilanse masy, pędu i energii. W artykule zdefiniowano warunki brzegowe i początkowe przyjęte w obliczeniach numerycznych. Przedstawiono warunek uzyskania rozwiązania ustalonego oraz sposób doboru kroku czasowego do obliczeń. Zaprezentowano również uzyskane wyniki.

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОГО ИЗ МЕТОДОВ УСТАНОВЛИВАНИЯ В РЕШЕНИИ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТОК ТУРБОМАШИН

Р е з ю м е

Представлена схема решения прямой задачи обтекания лопаточных решеток трансзвуковым потоком газа. Применён метод установливания. Представлен метод определения граничных условий и начального приближения. Приведены результаты решения задачи.