ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2008
Seria: AUTOMATYKA z. 150 Nr kol. 1796

Joanna JÓZEFOWSKA, Łukasz JÓZEFOWSKI
Politechnika Poznańska

Wiesław KUBIAK
Memorial University

ZASTOSOWANIE METOD TEORII PODZIAŁU W SZEREGOWANIU PROCESÓW DYSKRETNYCH W SYSTEMACH CZASU RZECZYWISTEGO

Streszczenie. W niniejszej pracy zaproponowano transformację problemu szeregowania zadań w systemach czasu rzeczywistego do problemu proporcjonalnego podziału miejsc w parlamencie. Korzystając z wyników teorii podziału, wykazano, że uszeregowania dopuszczalnego rozważanego problemu nie można uzyskać za pomocą metod dzielnikowych. Podano własności uszeregowań dopuszczalnych otrzymanych za pomocą metod podziału miejsc w parlamencie.

APPLICATION OF THE APPORTIONMENT METHODS IN SCHEDULING TASKS IN HARD-REAL-TIME SYSTEMS

Summary. The problem of scheduling tasks in hard-real-time systems is transformed to the problem of apportioning seats in a parliament. Using the results proved within the theory of apportionment it is shown that there exist no divisor method that constructs a feasible schedule of discrete, divisible processes in hard real time systems. The properties of feasible schedules generated by apportionment methods were examined.

1. Wstęp

W szerokiej klasie procesów dyskretnych można wyodrębnić pewną ważną podklasę, którą tworzą procesy dyskretne działające w systemach sztywnego czasu rzeczywistego. Procesy te muszą się zakończyć w ściśle określonym oknie czasowym. Przekroczenie ram czasowych narzuconych na realizację procesu jest krytyczne dla działania całego systemu.

W niniejszym artykule analizujemy problem szeregowania dyskretnych i podzielnych procesów czasu rzeczywistego wykorzystując teorię podziału miejsc w parlamencie. Zastosowanie teorii podziału miejsc umożliwia wykazanie pewnych własności metod stosowanych w szeregowaniu dyskretnych procesów czasu rzeczywistego, a także analizę własności otrzymanych uszeregowań.

Artykuł jest zorganizowany następująco. W rozdziale 2 zdefiniowano problem szeregowania procesów dyskretnych w systemach czasu rzeczywistego. Rozdział 3

zawiera sformułowanie problemu podziału miejsc w parlamencie. W rozdziale 4 omówiono transformację problemu szeregowania dyskretnych procesów czasu rzeczywistego do problemu podziału miejsc w parlamencie. W rozdziale 5 przedstawiono własności problemu szeregowania dyskretnych procesów czasu rzeczywistego wykazane na podstawie przeprowadzonej transformacji. Rozdział 6 podsumowuje uzyskane wyniki.

2. Problem szeregowania dyskretnych procesów w systemach czasu rzeczywistego

Jednym z fundamentalnych problemów szeregowania w systemach sztywnego czasu rzeczywistego jest problem Liu-Laylanda [4]. Problem ten polega na znalezieniu dopuszczalnego uszeregowania zbioru N podzielnych, niezależnych i okresowych zadań przed liniami krytycznymi. Każde zadanie i, $i=1,...,N$, rozumiane jest jako podzielny proces dyskretny o czasie wykonania C_i oraz okresie T_i. Oznacza to, że w każdym z następujących po sobie okresów o długości T_i proces i musi być wykonywany dokładnie w C_i jednostkach czasu, które ze względu na podzielność procesu nie muszą następować po sobie. W praktyce istnieje wiele systemów, które można opisać za pomocą modelu Liu-Laylanda. Przykładem może być system radarowy, który monitoruje przestrzeń powietrzną nad lotniskiem. Jeśli obliczenia położenia obiektów na radarze nie zakończą się w określonym czasie, to może dojść do katastrofy. Innym przykładem może być sterowanie pracą elektrowni jądrowej, gdzie krytycznym procesem jest cykliczny pomiar temperatury, który musi się odbyć w ściśle określonym oknie czasowym. Przekroczenie czasu realizacji takiego procesu również może mieć poważne konsekwencje dla całego systemu. Łatwo zauważyć, że wszystkie opisane w przykładach procesy charakteryzują się okresowością i pewnym narzuconym z góry czasem wykonania, zatem problem znalezienia dopuszczalnego uszeregowania takich procesów jest problemem Liu-Laylanda.

3. Problem podziału miejsc

Problem podziału miejsc został sformułowany jako problem podziału określonej liczby mandatów w parlamencie między poszczególne grupy wyborców [6]. Teoria podziału miejsc rozwijała się szczególnie w Stanach Zjednoczonych, gdzie miała bardzo praktyczne zastosowanie w podziale ograniczonej liczby miejsc w Izbie Reprezentantów pomiędzy poszczególne stany, proporcjonalnie do populacji każdego stanu.

Formalnie problem podziału miejsc można zdefiniować w następujący sposób. Dany jest zbiór N stanów i parlament o liczności $h \geq 0$ miejsc. Dla danego wektora $\mathbf{p}$ populacji stanów

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_N) \tag{1}$$

należy znaleźć wektor $\mathbf{a}$ przydziału miejsc poszczególnym stanom

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N) \tag{2}$$

w taki sposób, by spełnione było następujące ograniczenie:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = h \tag{3}$$

gdzie: a_i jest nieujemną liczbą całkowitą.

3.1. Metody rozwiązania problemu podziału

Metoda rozwiązania problemu podziału jest to pewna reguła, która zastosowana do każdego dodatniego wektora populacji **p** i parlamentu o liczności h wyznacza wektor podziału **a** spełniający ograniczenia (3). Warto zauważyć, że nawet sprawiedliwa metoda podziału może wyznaczyć zbiór wektorów. Wynika to z faktu, że w przypadku dwóch stanów o identycznych populacjach i parlamencie o liczbie $2k+1$ miejsc sprawiedliwa metoda powinna wyznaczyć dwa możliwe podziały $(k, k+1)$ oraz $(k+1, k)$. Metoda podziału jest zatem wielowartościową funkcją M wyznaczającą zbiór wektorów. Konkretne M-rozwiązanie jest pojedynczym wektorem podziału miejsc $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$, które w sposób arbitralny rozstrzyga opisane wyżej niejednoznaczności. W kolejnych punktach omówiono niektóre własności metod podziału.

3.1.1. Metody zachowujące kwotę

Jedno z podstawowych wymagań stawianych rozwiązaniom problemu proporcjonalnego podziału miejsc jest opisane za pomocą następującego warunku:

$$\left\lfloor \frac{hp_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \right\rfloor \le a_i \le \left\lceil \frac{hp_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \right\rceil. \tag{4}$$

Lewa strona nierówności (4) jest nazywana dolną kwotą i jest najwyższą liczbą naturalną, nie większą od a_i. Prawa wartość nierówności (4) jest zwana górna kwotą i jest najmniejszą liczbą naturalną nie mniejszą niż a_i. Metoda spełniająca warunek (4) jest metodą zachowującą kwotę. Przykładami metod zachowujących kwotę jest metoda kwotowa zaproponowana przez Balinskiego i Younga w [1] oraz ogólna metoda zaproponowana przez Stilla w [5].

3.1.2. Metody dzielnikowe

Metody dzielnikowe polegają na znalezieniu takiej liczby x, która spełnia następujące warunki:

$$round\left(\frac{p_i}{x}\right) = a_i \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = h \tag{6}$$

gdzie *round()* jest pewną funkcja zaokrąglającą. Balinski i Young pokazali w [1], że każda metoda dzielnikowa daje się przedstawić za pomocą pewnej monotonicznej, rosnącej funkcji $d(a)$, zdefiniowanej dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych a, dla której $a \le d(a) \le a+1$ oraz nie istnieje para liczb $b \ge 0$, $c \ge 1$, taka, że $d(b) = b+1$ i $d(c) = c$. Funkcja taka zwana jest kryterium dzielnikowym. Metoda dzielnikowa oparta na funkcji d może być opisana rekurencyjnie w następujący sposób:

1. $M(\mathbf{p},0) = \mathbf{0}$,
2. Jeśli $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p},h)$ i dla pewnego stanu k zachodzi warunek $\frac{p_k}{d(a_k)} = \max_i \frac{p_i}{d(a_i)}$, to $\mathbf{b} \in M(\mathbf{p},h+1)$ i $b_k = a_k + 1$ i $b_i = a_i$ dla $i \ne k$.

Balinski i Young w [1] wykazali, ze tylko metody dzielnikowe mają własność monotoniczności ze względu na liczność populacji. Oznacza to, że metody dzielnikowe gwarantują, że gdy populacja stanu i wzrośnie, a stanu j zmaleje, to nie będzie miała miejsca sytuacja, w której liczba miejsc a_i przydzielona stanowi i zmaleje, a ilość miejsc a_j przydzielona stanowi j wzrośnie.

Balinski i Young w [1] wykazali, że nie istnieje metoda, która byłaby jednocześnie monotoniczna ze względu na liczność populacji i zachowywała kwotę dla dowolnej instancji problemu. Jest to tzw. *twierdzenie o niemożliwości*.

4. Transformacja problemu Liu-Laylanda do problemu podziału miejsc w parlamencie

Związek miedzy parametrami charakteryzującymi problem Liu-Laylanda a parametrami odpowiadającego mu problemu podziału przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Zależności między problemem Liu-Laylanda a problemem podziału

Parametr w problemie Liu-Laylanda	Parametr w problemie podziału
proces $i, i=1,\ldots,N$	stan $i, i=1,\ldots,N$
cykl $L=NWW(T_1,T_2,\ldots,T_N)$, gdzie NWW oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność	parlament o liczności h miejsc
$\frac{NWW(T_1,T_2,\ldots,T_N)C_i}{T_i}$	p_i

W sytuacji gdy podczas wykonywania zbioru procesów dyskretnych wystąpią jednostki czasu, w których nie będzie się wykonywał żaden proces, dodajemy jeden sztuczny proces o czasie wykonania C_{N+1} równym sumie niewykorzystanych jednostek czasu i okresie wykonania $T_{N+1}=L$, gdzie L jest cyklem zdefiniowanym w tabeli 1.

5. Rozwiązanie problemu Liu-Laylanda za pomocą metod podziału

Mówimy, że metoda podziału M rozwiązuje problem Liu-Laylanda jeśli dla dowolnej instancji procesów o parametrach C_i, T_i, $i=1,\ldots,N$ istnieje dowolna niemalejąca sekwencja podziałów $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_L$ taka, że:

$$a_j \in M((\frac{LC_1}{T_1},\ldots,\frac{LC_N}{T_2}), j), j = 1,\ldots L. \tag{7}$$

Po raz pierwszy możliwość rozwiązania problemu Liu-Laylanda za pomocą metod podziału miejsc w parlamencie pokazał Kubiak w [2]. Udowodnił on, że warunkiem dostatecznym rozwiązania problemu Liu-Laylanda jest zachowanie kwoty przez metodę podziału. Interesującym zagadnieniem było sprawdzenie, czy istnieją metody dzielnikowe, które również rozwiązują problem Liu-Laylanda. Józefowska, Józefowski i Kubiak udowodnili w [3] następujące Twierdzenie.

Twierdzenie:

Nie istnieje metoda dzielnikowa, która rozwiązuje problem Liu-Laylanda.

W pracy [3] pokazano ponadto, że warunek dostateczny sformułowany przez Kubiaka w [2] nie jest warunkiem koniecznym. Ze względu na fakt, że tylko metody dzielnikowe mają własność monotoniczności ze względu na liczność populacji, z Twierdzenia wynika ponadto, że nawet gdy czas C_i wykonania procesu i jest większy niż czas wykonania C_j procesu j, to całkowity czas wykonania procesu i może być mniejszy niż całkowity czas wykonania procesu j w pewnym przedziale [0,t].

6. Wnioski

W niniejszym artykule pokazano sposób transformacji problemu Liu-Laylanda do problemu podziału miejsc w parlamencie. Na podstawie analizy problemu Liu-Laylanda za pomocą metod teorii podziału można wykazać, że nie istnieje metoda dzielnikowa, za pomocą której można otrzymać dopuszczalne uszeregowanie procesów w systemach czasu rzeczywistego. Z drugiej strony wiadomo, że uszeregowanie takie można otrzymać, stosując dowolną metodę podziału, która zachowuje kwotę [2]. Pamiętać jednak należy o tym, że w takie metody nie są monotoniczne ze względu na liczność populacji.

BIBLIOGRAFIA

1. Balinski M., Young H.: Fair representation. Meeting the ideal of one man, one vote. Yale University Press; 1982.
2. Kubiak W.: Solution of the Liu-Layland problem via bottleneck Just-in-Time sequencing. Journal of Scheduling 2005;8; 295–302.

3. Józefowska J., Józefowski Ł., Kubiak W.: Apportionment methods and the Liu-Layland problem. European Journal of Operational Research, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.11.007.
4. Liu C.L., Layland J.W.: Scheduling Algorithms for Multiprogramming In Hard-Real-Time Environment. Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 20, no. 1, 1973, p. 46-61.
5. Still J.W.: A class of new methods for congressional apportionment. SIAM Journal on Applied Mathematics 1979;37; 401–418.
6. Young H.P.: Sprawiedliwy podział. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2003.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Konrad Wala

Abstract

In this paper we studied the Liu-Layland problem of sequencing divisible, discrete processes in the hard real time environment. We showed that the Liu-Layland problem can be transformed to the apportionment problem. The apportionment problem is a problem of apportioning fixed number of seats in a parliament among certain number of states proportionally to the population of each state. Basing on this transformation we showed that no divisor method of apportionment can be used to build a feasible sequence solving the Liu-Layland problem. On the other hand the Liu-Layland problem can be solved using methods satisfying the quota. In consequence no method solving the Liu-Layland problem is population monotone.