

Paweł BOBROWSKI

Westinghouse Modelpol, Lubliniec

MODELE ROZMYTE ZBUDOWANE NA BAZIE WIELOWYMIAROWYCH FUNKCJI PRZYNALEŻNOŚCI

Streszczenie. Praca obejmuje analizę modeli rozmytych stworzonych na bazie wielowymiarowych funkcji przynależności. Dla przykładu rozpatrzono jako wzorce elementy liniowe o dwóch lub trzech sygnałach wejściowych i jednym sygnale wyjściowym, oraz ich modele rozmyte. Efekty działania modeli rozmytych tych elementów będą oceniane jakościowo, przez porównanie otrzymanych powierzchni odwzorowania wejścia-wyjścia wzorca i jego modelu rozmytego.

FUZZY MODELS BASED ON MULTIDIMENSIONAL MEMBERSHIP FUNCTIONS

Summary. This work shows the analysis of fuzzy models created on the basis of multidimensional membership functions. As a reference for creating fuzzy models, linear elements with two or three input signals and one output signal are considered. Results of modeling are evaluated qualitatively by comparison of the input- output surfaces of the template and its fuzzy model.

1. Wprowadzenie

Podczas tworzenia modeli rozmytych, na pewnym etapie ich modelowania i rozbudowania dochodzi do ograniczeń związanych z tzw. „przekleństwem wymiarowości” [4]. Jak pokazano w [2] w przypadku tworzenia bazy wiedzy elementu przy trzech zmiennych lingwistycznych, scharakteryzowanych przez trzy wartości lingwistyczne każda, tj. zmienne

lingwistyczne: UJEMNY, ZEROWY, DODATNI, otrzymuje się bazę 27 reguł. Tak więc, stosunkowo prosty, trójwejściowy problem modelowania, przy „małej rozdzielczości” wartości lingwistycznych, daje dużą bazę reguł. Przy założeniu n wejść do systemu i m wartości lingwistycznych przypisanych do każdego wejścia, liczba reguł potrzebna do opisanie tego systemu wynosi m^n .

Efekt ten nazywa się przekleństwem wymiarowości i stanowi ograniczenie na liczbę zmiennych wejściowych elementu modelowanego. Istnieje wiele metod pozwalających uniknąć nadmiernego wzrostu ilości reguł. Do najważniejszych należą: metody grupowania rozmytego [11], metody podziału drzewiastego [10] i wykorzystanie sieci Delaunaya [7], [9]. Metody grupowania mają zastosowanie przy modelowaniu systemu o dużej liczbie danych, ich stosowanie do modelowania systemu stworzonego na bazie reguł eksperta jest ograniczone ze względu na małą liczbę reguł. Metoda podziału drzewiastego pozwala na modelowanie systemu z możliwością lokalnego zagęszczania liczby reguł, bez propagacji zagęszczenia siatki reguł na pozostałą część modelu. Sieci Delaunaya są najbardziej elastyczną metodą modelowania pozwalającą na dowolne formowanie powierzchni odwzorowania wejścia-wyjścia. Pozbawione są one wady przekleństwa wymiarowości, jednak nie pozwalają na tworzenie modeli w sposób lingwistyczny. Wielowymiarowe funkcje przynależności (WFP) posiadają zaletę „gromadzenia wiedzy”. Polega to na tym, że dzięki ich zdefiniowaniu (np. dla dwóch sygnałów wejściowych) wprowadzamy wiedzę do systemu uwzględniającą jednoczesny wpływ tych sygnałów na wyjście układu. Celem tej pracy było stworzenie liniowych elementów dwu- i trójwejściowych z wykorzystaniem WFP i zbadanie jakości modelowania, przez porównanie otrzymanych powierzchni wejścia-wyjścia modelu i wzorca.

2. Zmienna lingwistyczna, wartość lingwistyczna, funkcje przynależności

Pojęcie zmiennej lingwistycznej, wartości lingwistycznej i funkcji przynależności to jedne z podstawowych pojęć modelowania rozmytego. Definicje tych pojęć można znaleźć np w [4]. „Zmienna lingwistyczna to wielkość wejściowa, wyjściowa lub zmienna stanu, którą zamierzamy oceniać, stosując oceny lingwistyczne zwane wartościami lingwistycznymi.” „Wartość lingwistyczna to słowna ocena wielkości lingwistycznej.” „Funkcja przynależności określa stopień przynależności do wartości lingwistycznej reprezentującej pewną zmienną.”

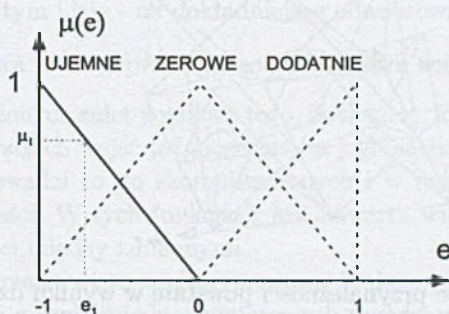
Rozpatrzmy regułę

$$R : \text{Jeżeli } e \text{ jest UJEMNE to } u \text{ jest } \dots \quad (1)$$

gdzie e - jest wejściową zmienną lingwistyczną, zaś UJEMNE - wartością lingwistyczną dla zmiennej e . Pojęcie UJEMNE jako wartość lingwistyczna może być reprezentowane przez różne rodzaje funkcji przynależności. Na rysunku 1 przedstawiono przykładowe trójkątne

funkcje przynależności. Stopień przynależności wartości lingwistycznej UJEMNE dla wartości $e = e_1$ jest określony na podstawie jej funkcji przynależności $\mu(e_1)$.

Gdy system rozmyty posiada jedną zmienną lingwistyczną, nie pojawia się problem zwią-



Rys. 1. Trójkątne funkcje przynależności wejścia

Fig. 1. Triangular membership functions

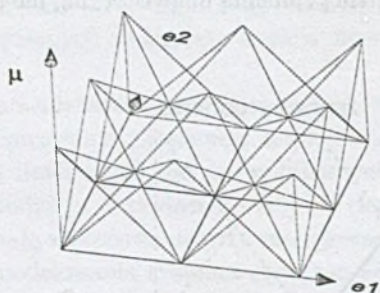
zany z wykładniczym wzrostem ilości reguł w bazie. Model zaczyna się komplikować już w przypadku dwuwymiarowym. Zakładając np., że rozkład funkcji przynależności przedstawiony na rysunku 1 jest taki sam dla obu zmiennych, otrzymujemy bazę 9 reguł. Dokładniejsza analiza tworzenia tej bazy zawarta jest w [1].

Jeżeli jako operator iloczynu, występujący w poprzedniku reguły, zastosujemy operator - MIN, to wykonując analizę działania tego operatora dla wszystkich punktów rozważanej przestrzeni, otrzymamy dwuwymiarowe funkcje przynależności, reprezentujące stopień przynależności do wartości lingwistycznych złożonych. Zostało to pokazane na rysunku 2. Dla poprzednika reguły:

e_1 jest ZEROWE I e_2 jest ZEROWE

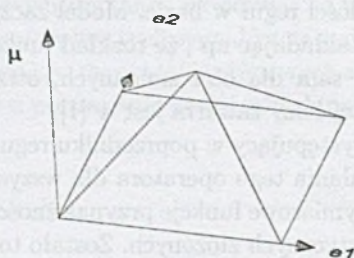
złożoną funkcję przynależności przedstawia rysunek 3. Obszary figury reprezentujące wynikowe funkcje przynależności przedstawione na rysunku 2 są efektem działania operatora rozszerzenia cylindrycznego funkcji przynależności z każdego wymiaru (zmiennej) i połączenia ich operatorem MIN. Każdy z obszarów na rysunku 2 reprezentuje odpowiednie pojęcia z poprzedników bazy reguł:

1. e_1 jest UJEMNE I e_2 jest UJEMNE
2. e_1 jest UJEMNE I e_2 jest ZEROWE
3. e_1 jest UJEMNE I e_2 jest DODATNIE
4. e_1 jest ZEROWE I e_2 jest UJEMNE
5. e_1 jest ZEROWE I e_2 jest ZEROWE
6. e_1 jest ZEROWE I e_2 jest DODATNIE



Rys. 2. Dwuwymiarowe funkcje przynależności powstałe w wyniku działania operatora MIN

Fig. 2. The two-dimensional membership functions produced by MIN operator



Rys. 3. Dwuwymiarowa funkcja przynależności dla jednej z dziewięciu reguł

Fig. 3. Two-dimensional membership function for one of nine rules

7. e_1 jest DODATNIE I e_2 jest UJEMNE
8. e_1 jest DODATNIE I e_2 jest ZEROWE
9. e_1 jest DODATNIE I e_2 jest DODATNIE

Ponieważ figury te zostały stworzone, między innymi, w wyniku działania operatora rozszerzenia cylindrycznego, więc podstawa każdego z ostrosłupów jest prostokątem o bokach równoległych do osi.

Zastosowanie wielowymiarowych funkcji przynależności polega na stworzeniu „z góry” obszarów odpowiadających wartościom lingwistycznym kilku zmiennych lingwistycznych. Dla przedstawionej bazy zdefiniowanie jej na podstawie dwuwymiarowych funkcji przynależności polegałoby na zdefiniowaniu funkcji dla każdego obszaru iloczynu (w poprzedniku

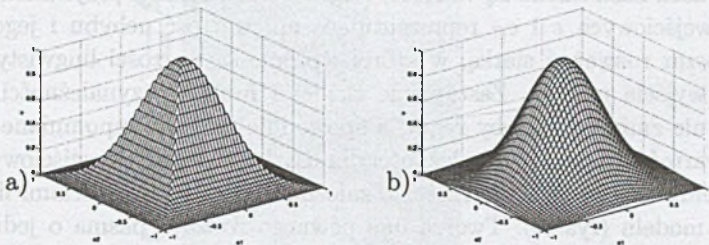
reguły) jednowymiarowych funkcji przynależności.

Rozwiązanie takie posiada następujące zalety :

- pozwala na bardziej elastyczne definiowanie funkcji przynależności w dwóch wymiarach, a co za tym idzie - na dokładniejsze odwzorowanie wiedzy eksperta,
- dwuwymiarowa funkcja przynależności dostarcza większej ilości informacji.

Pierwsza z wymienionych zalet wynika z tego, że ekspert, który opisuje system, bierze pod uwagę wpływ wszystkich wejść jednocześnie na jego zachowanie, a nie wpływ każdego z nich z osobna. Prowadzi to do skomplikowanych i w rzeczywistości wielowymiarowych funkcji przynależności. W tych funkcjach jest zawarta większa informacja wynikająca z istniejącej zależności między zmiennymi.

Różnicę między rzeczywistą wielowymiarową funkcją przynależności, a funkcją wielowymiarową złożoną z funkcji jednowymiarowych przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Wielowymiarowa f. przynależności i złożona z jednowymiarowych f.p.

Fig. 4. Multidimensional membership function and combined from unidimensional m.f.

Rysunek 4a jest przypadkiem klasycznym, analogicznym do rysunku 3. Różnica polega na zastosowaniu jednowymiarowych funkcji Gaussa, zamiast funkcji trójkątnych, jako funkcji przynależności reprezentujących pewną wartość lingwistyczną. Przedstawiona funkcja jest złożona z funkcji jednowymiarowych i reprezentuje poprzednik reguły:

e_1 jest ZEROWE i e_2 jest ZEROWE. Rysunek 4b jest przykładem dwuwymiarowej funkcji przynależności dla takiej samej reguły jak rysunek 4a. Została ona zdefiniowana jako dwuwymiarowa funkcja Gaussa.

3. Tworzenie baz reguł z wykorzystaniem dwuwymiarowych funkcji przynależności

Jako cel postawiono zastosowanie dwuwymiarowych funkcji przynależności do opracowania modelu rozmytego elementu liniowego o dwóch wejściach, ponieważ znamy dokładnie jego bazę reguł i wyniki symulacji [2]. Pierwsze pytanie, które nasuwa się przy próbie

zastosowania funkcji wielowymiarowych do budowy modelu rozmytego, to: w jaki sposób WFP pozwolą uprościć model, i który z jego elementów - fuzyfikację, inferencję czy defuzyfikację. Na pierwszy rzut oka nie jest widoczna żadna korzyść płynąca z zastosowania WFP, ponieważ:

- utrudnione jest obliczanie wartości funkcji przynależności w dwóch wymiarach,
- baza reguł reprezentowanych przez funkcje przynależności nie ulega redukcji - potrzebnych jest tyle WFP, ile było reguł w klasycznej bazie reguł.

Wydaje się, że jedyną zaletą jest wcześniej wymieniona, bardziej naturalna w sensie wiedzy eksperta reprezentacja pojęć regulowych, ale trudno ocenić jej wymierne efekty. Dla przykładu można poddać analizie element liniowy o dwóch wejściach, którego baza reguł (rys.5) i zachowanie zostały omówione w [1]. Przedstawiona siatka reprezentuje bazę reguł, tj. na jej bokach zaznaczone są wartości lingwistyczne funkcji przynależności dla dwóch zmiennych wejściowych e i e_C reprezentujące np. wartość uchybu i jego całość. Dzieli one nasz obszar rozważań siatką, w której wpisane są wartości lingwistyczne opisujące zachowanie wyjścia modelu. Zastąpienie każdej z funkcji przynależności, funkcją dwuwymiarową nie zmniejszy liczby reguł, a spowoduje jedynie wspomniane utrudnienia w obliczeniu wartości funkcji przynależności dla ustalonych danych wejściowych. W uproszczeniu modelu może pomóc dostrzeżenie zależności między wartościami lingwistycznymi dla wyjścia modelu (rys. 6). Tworzą one pewnego rodzaju pasma o jednakowych wartościach lingwistycznych na wyjściu. Gdyby udało się stworzyć funkcje przynależności tak, aby oddawały symetrię tych pasm, to mogłoby to doprowadzić do uproszczenia modelu. Łącząc zauważoną zależność z możliwością zastosowania wielowymiarowych funkcji przynależności możemy stworzyć nowe dwuwejściowe funkcje przynależności niezależnych wejść takie, aby ich geometria „naśladowała” zachowanie wartości lingwistycznych konkluzji reguł. Mówiąc inaczej, tak definiować jedną, ale dwuwymiarową funkcję przynależności, aby jedna jej wartość lingwistyczna dwuwymiarowej zmiennej wejściowej, np. UJEMNE, pokrywała obszar takich samych wartości lingwistycznych zmiennej wyjściowej w konkluzjach reguł (dla tego pojęcia będzie odpowiadać wyjście UJEMNE). Dla prezentowanej bazy reguł istnieje pięć pojęć charakteryzujących wartości lingwistyczne wejścia, ale dla uproszczenia, i wykorzystując fakt, że model jest liniowy, do analizy przyjmijmy tylko trzy, tj. UJEMNE, ZEROWE, DODATNIE. Dwuwymiarowe funkcje przynależności odpowiadające tym pojęciom przedstawiono na rysunku 9, oraz ich rzut na płaszczyznę zmiennych wejściowych na rysunku 10.

Dzięki takiemu wielowymiarowemu zdefiniowaniu funkcji przynależności istnieje 5 wartości lingwistycznych reprezentujących dwuwymiarową zmienną wejściową. Na tym etapie korzyści ze stosowania tego modelu dalej nie są zbyt wielkie, bo w modelu rozmytym klasycznym mamy w sumie 6 wartości lingwistycznych (po trzy na każdą ze zmiennych), a model z WFP daje nam 5 wartości lingwistycznych opisywanych przez 5 funkcji dwuwymiarowych. Dla uproszczenia wizualizacji funkcji przynależności rozpatrzmy tylko trzy funkcje przynależności. Reprezentują one trzy wartości lingwistyczne: UJEMNE, ZEROWE, DODATNIE. Sygnał wejściowy E do modelu rozmytego jest wektorem

e_C				
D	Z	D	DD	
Z	U	Z	D	
U	UU	U	Z	
	U	Z	D	e

Rys. 5. Baza reguł dla elementu liniowego o dwóch wejściach
 Fig. 5. Knowledge base of the two-inputs linear element

e_C				
D	Z	D	DD	
Z	U	Z	D	
U	UU	U	Z	
	U	Z	D	e

Rys 6. Zbiory takich samych wartości lingwistycznych wyjścia
 Fig. 6. Sets of the same output linguistic values

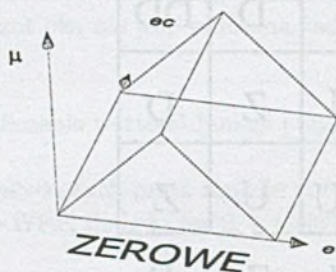
$$E = \begin{bmatrix} e \\ e_C \end{bmatrix}$$

gdzie e i e_C to wejścia modelu.

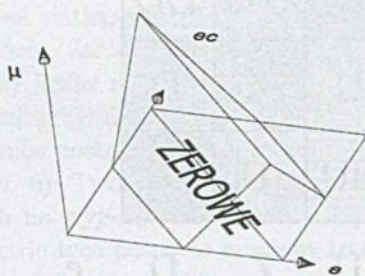
Pozostaje problem, jak dopasować i jak powinny wyglądać funkcje przynależności dla tych obszarów. Najprostsze nasuwające się rozwiązanie to analogia do trójkątnych jednowymiarowych funkcji przynależności, czyli figury przestrzenne stworzone przez operację rozszerzenia cylindrycznego funkcji trójkątnej na obszar rozważań i odpowiedniego obrotu tak uzyskanej figury.

Można, na podstawie rysunków 9 i 10, wyznaczyć równania opisujące wielowymiarowe funkcje przynależności dla każdego z pojęć:

1. $UJEMNE(Rys.9b) : \mu(e, e_C) = -0.5e - 0.5e_C$ (2)



Rys. 7. Rozszerzenie cylindrycznej funkcji jednowymiarowej na dziedzinę dwuwymiarową
 Fig. 7. Unidimensional membership function extension on twodimensional domain



Rys. 8. Konstrukcja dwuwymiarowej funkcji przynależności reprezentującej
 pojęcie ZEROWY

Fig. 8. Construction of a twodimensional membership function representing the
 linguistic value ZERO

$$2. \quad ZEROWE(Rys.9c) : \begin{cases} \text{jeśli } e + e_C \leq 0 : \mu(e, e_C) = 0.5e + 0.5e_C + 1 \\ \text{jeśli } e + e_C \geq 0 : \mu(e, e_C) = -0.5e - 0.5e_C + 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$3. \quad DODATNIE(Rys.9d) : \mu = 0.5e + 0.5e_C \quad (4)$$

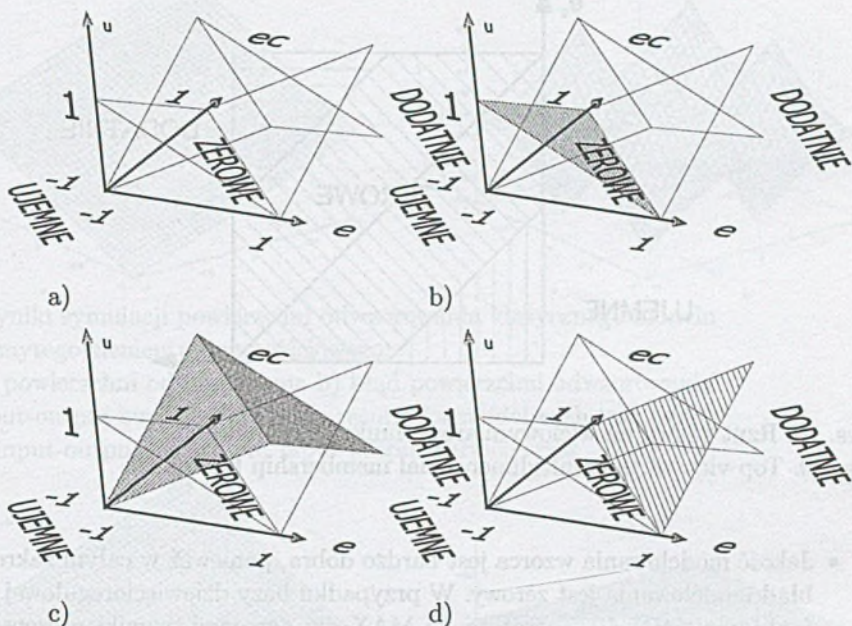
Wartości lingwistyczne dotyczące wyjścia modelu to $UJEMNE_U, ZEROWE_U, DODATNIE_U$ (indeks U dla odróżnienia od wartości lingwistycznych wejścia). Baza reguł dla modelu z wielowymiarowymi funkcjami przynależności:

$R1$: Jeżeli E jest UJEMNE to u jest $UJEMNE_U$

$R2$: Jeżeli E jest ZEROWE to u jest $ZEROWE_U$

$R3$: Jeżeli E jest DODATNIE to u jest $DODATNIE_U$

(5)



Rys. 9. Dwuwymiarowe funkcje przynależności dla modelu elementu liniowego
 Fig. 9. Multidimensional membership function for a linear element model

Dla celów porównawczych przyjmujemy singletonowe wartości lingwistyczne wyjścia, tj.:

$$UJEMNE_U = -2 \tag{6}$$

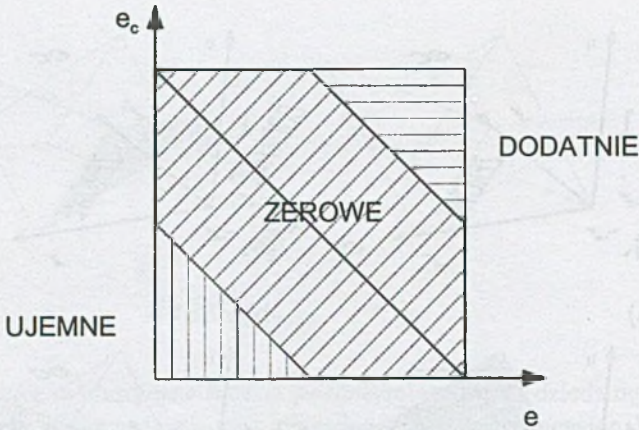
$$ZEROWE_U = 0 \tag{7}$$

$$DODATNE_U = 2 \tag{8}$$

oraz wnioskowanie (inferencję) typu Mamdani. Już przy tworzeniu bazy reguł można zauważyć brak funktora I w poprzednikach reguł. Wielowymiarowe funkcje przynależności łączą w sobie rolę jednowymiarowych funkcji przynależności i operatora „I” łączącego je w poprzedniku reguły. Wykonano symulację powierzchni odwzorowania dla obu modeli - dziewięcioregułowego klasycznego rozmytego i wykorzystującego wielowymiarowe funkcje przynależności. Efekty pokazano na rysunkach 11 i 12.

Rysunki 11 i 12 przedstawiają powierzchnie odwzorowania a) i ich błędy w stosunku do powierzchni modelowanej [2]. Powierzchnie błędów lepiej reprezentują jakość odwzorowania modeli rozmytych w stosunku do ich wzorca od samych powierzchni odwzorowania. Można wyciągnąć dwa ważne wnioski z otrzymanych symulacji:

- Zaproponowany model rozmyty, wykorzystujący wielowymiarowe funkcje przynależności daje jakościowo poprawną powierzchnię odwzorowania wejścia-wyjścia - rysunek 12a.



Rys. 10. Rzut z góry na wielowymiarowe funkcje przynależności
 Fig. 10. Top view of the multidimensional membership functions

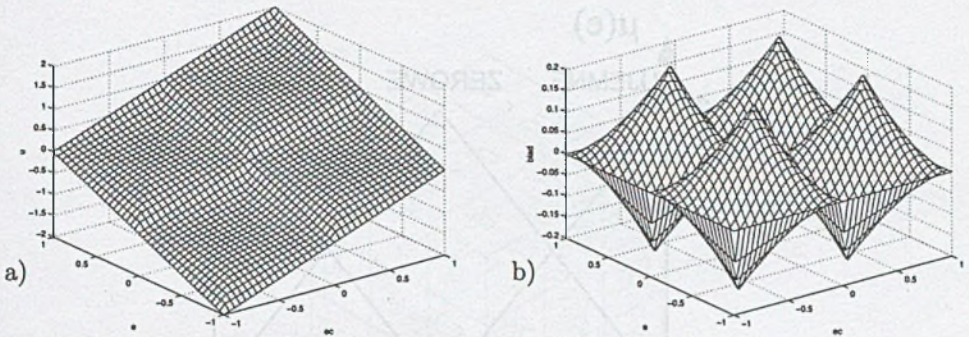
- Jakość modelowania wzorca jest bardzo dobra, ponieważ w całym zakresie wartości błąd modelowania jest zerowy. W przypadku bazy dziewięcioregułowej dla zestawu funktorów MIN dla operatora I i MAX dla agregacji, wyniki prezentowane w [2] dają większe błędy.

Otrzymane bardzo dobre efekty modelowania za pomocą wielowymiarowych funkcji przynależności są również, pod względem praktycznym lepsze od klasycznego modelu rozmytego, ponieważ baza reguł jest mniejsza. Patrząc na wielowymiarowe funkcje przynależności pod kątem równoległym do ich płaszczyzn (rys. 13) można zauważyć podobieństwo do jednowymiarowych funkcji przynależności. Z tego „punktu widzenia” wielowymiarowe funkcje przynależności wyglądają jak jednowymiarowe funkcje przynależności omawiane dokładnie w [1]. Gdybyśmy przytoczyli wnioski z cytowanej pracy dotyczące powierzchni odwzorowania, która w tym przypadku jest jednowymiarową funkcją odwzorowania, wynikałoby z nich, że przy takich samych założeniach dotyczących modelu dostaliśmy dokładne odwzorowanie, czyli linię prostą, odpowiadającą płaszczyźnie w powyższym przypadku. Żeby analogia była zupełna, nawet bazy reguł są dokładnie takie same, gdybyśmy rozszerzyli zbiór wartości lingwistycznych o pojęcie ZERO w [1].

4. Przypadek trójwejściowego modelu rozmytego

Otrzymane wyniki zachęcają do próby podjęcia analizy elementu liniowego o trzech sygnałach wejściowych, którego reprezentantem jest trójwejściowy model rozmyty o bazie zaczerpniętej z pracy [1] (rys.14). Baza reguł tej tzw. kostki Rubica wygląda następująco:

$$R1 : \text{Jeżeli } (e = U) \text{ I } (e_C = U) \text{ I } (e_D = U) \text{ to } (u = BDU)$$

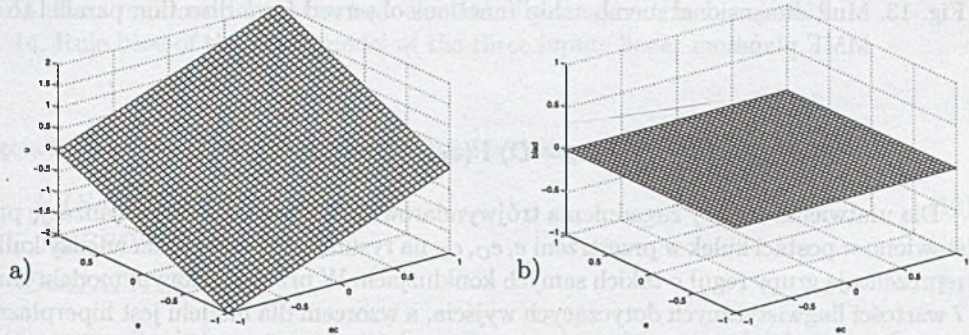


Rys. 11. Wyniki symulacji powierzchni odwzorowania klasycznego modelu rozmytego elementu dwuwejściowego:

a) powierzchni odwzorowania b) błąd powierzchni odwzorowania

Fig. 11. Input-output surface simulation results for model with two inputs:

a) input-output surface, b) input-output surface error



Rys.12. Wyniki symulacji powierzchni odwzorowania modelu rozmytego WFP

a) powierzchni odwzorowania b) błąd powierzchni odwzorowania

Fig. 12. Input-output surface simulation results for MMF

a) input-output surface b) input-output surface error

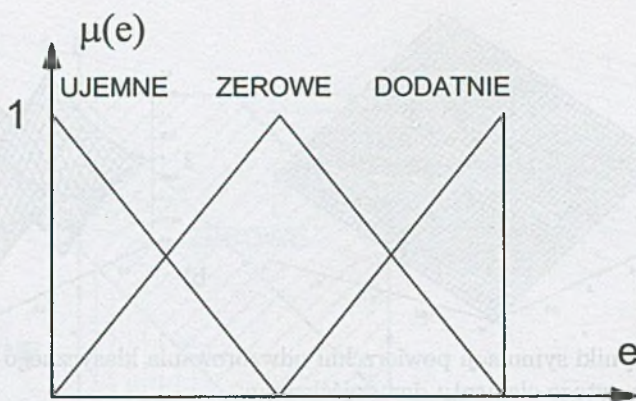
R2 : Jeżeli $(e = U) \text{ I } (e_C = U) \text{ I } (e_D = Z)$ to $(u = DU)$

R5 : Jeżeli $(e = U) \text{ I } (e_C = U) \text{ I } (e_D = D)$ to $(u = U)$

R11 : Jeżeli $(e = U) \text{ I } (e_C = Z) \text{ I } (e_D = D)$ to $(u = Z)$

R18 : Jeżeli $(e = U) \text{ I } (e_C = D) \text{ I } (e_D = D)$ to $(u = D)$

R24 : Jeżeli $(e = Z) \text{ I } (e_C = D) \text{ I } (e_D = D)$ to $(u = DD)$



Rys.13. Wielowymiarowe funkcje przynależności obserwowane pod kątem równoległym do płaszczyzn funkcji przynależności

Fig. 13. Multidimensional membership functions observed from direction parallel to the MMF planes

$$R27 : \text{Jeżeli } (e = D) \text{ I } (e_c = D) \text{ I } (e_D = D) \text{ to } (u = BDD) \quad (9)$$

Dla ułatwienia analizy zagadnienia trójwymiarowego ich przestrzenną lokalizację przedstawiono w postaci kulek w przestrzeni e, e_C, e_D na rysunku 15. Połączenia między kulkami reprezentują grupy reguł o takich samych konkluzjach. W przedstawionym modelu istnieje 7 wartości lingwistycznych dotyczących wyjścia, a wzorcem dla modelu jest hiperpłaszczyzna w trzech wymiarach. Aby pozostawić analogię z przypadkiem dwuwymiarowym oraz w celu uproszczenia rozważań stworzono model z wielowymiarowymi funkcjami przynależności dla tego przypadku, podobnie jak dla przykładu poprzedniego z trzema regułami, czyli z trzema wartościami lingwistycznymi dla zmiennych wejściowych. Wzorec dla modelu rozmytego w tym przypadku bazuje na równaniu:

$$u = k_P e + k_i e_c + k_D e_d \quad (10)$$

Aby zrealizować założone podobieństwo do poprzedniego modelu baza reguł ma postać:

$R1$: Jeżeli E jest UJEMNE to u jest $UJEMNE_U$

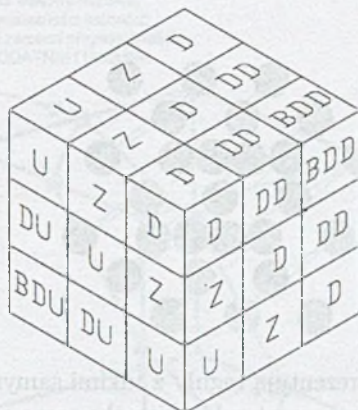
$R2$: Jeżeli E jest ZEROWE to u jest $ZEROWE_U$

$R3$: Jeżeli E jest DODATNIE to u jest $DODATNIE_U$

(11)

Różnica polega na tym, że teraz wektor E jest trójwymiarowy:

$$E = \begin{bmatrix} e \\ e_C \\ e_D \end{bmatrix},$$



Rys.14. Baza reguł modelu rozmytego elementu liniowego o trzech wejściach
 Fig. 14. Rule base of the fuzzy model of the three inputs linear model

Pojęcia lingwistyczne reprezentujące wartości wyjścia mają wartości singletonowe:

$$UJEMNE_U = -3 \tag{12}$$

$$ZEROWE_U = 0 \tag{13}$$

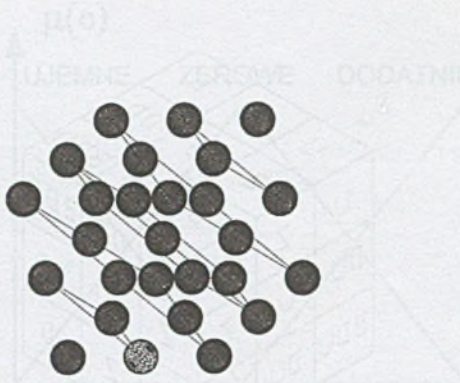
$$DODATNIE_U = 3 \tag{14}$$

O ile w przypadku jednowymiarowych funkcji przynależności, najtrudniejszy etap tworzenia modelu to tworzenie jego bazy reguł, tak w przypadku modeli liniowych baza reguł jest bardzo prosta, można ją nawet skrócić do dwóch reguł, ale opis wielowymiarowych funkcji przynależności jest dużo bardziej skomplikowany. Zdefiniowanie pojęć UJEMNE, ZEROWE, DODATNIE musi bazować w tym przypadku na przestrzeni trójwymiarowej. Przez analogię do przypadku dwuwymiarowego możemy przyjąć, że powierzchnią graniczną jest powierzchnia reguł o konkluzjach $ZEROWE_U$ - rys. 16.

Na podstawie rysunków 15 i 16 możemy znaleźć analityczne postacie hiperpłaszczyzn opisujących wartości lingwistyczne poprzez wyznaczenie hiperpłaszczyzn interpolujących przechodzących przez zdefiniowane na rysunku zestawy punktów. Punktem wyjściowym do takiej analizy jest założenie, że wartości lingwistyczne UJEMNE i DODATNIE będą odpowiadały punktom na skrajnych końcach:

$\mu_{UJEMNE}(e, e_C, e_D)$ powinna spełniać zależności - rys. 16,17

$$\begin{cases} \mu_{UJEMNE}(-1, -1, -1) = 1 \\ \mu_{UJEMNE}(1, 0, -1) = 0 \\ \mu_{UJEMNE}(1, -1, 0) = 0 \\ \mu_{UJEMNE}(0, -1, 1) = 0 \end{cases} \tag{15}$$



Rys.15. Połączone kulki reprezentują reguły z takimi samymi wnioskami
 Fig. 15. Connected spheres represent rules with the same conclusions

Pojęcie DODATNIE i jego wartości funkcji przynależności na jego brzegach:

$\mu_{DODATNIE}(e, e_C, e_D)$ powinna spełniać zależności - rys. 16,17

$$\begin{cases} \mu_{DODATNIE}(1, 1, 1) = 1 \\ \mu_{DODATNIE}(1, 0, -1) = 0 \\ \mu_{DODATNIE}(1, -1, 0) = 0 \\ \mu_{DODATNIE}(0, -1, 1) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Pojęcie ZEROWE i jego wartości funkcji przynależności na jego brzegach:

$\mu_{ZEROWE}(e, e_C, e_D)$ powinna spełniać zależności dla $e + e_C + e_D \leq 0$ - rys. 16,17

$$\begin{cases} \mu_{ZEROWE}(-1, -1, -1) = 0 \\ \mu_{ZEROWE}(1, 0, -1) = 1 \\ \mu_{ZEROWE}(1, -1, 0) = 1 \\ \mu_{ZEROWE}(0, -1, 1) = 1 \end{cases} \quad (17)$$

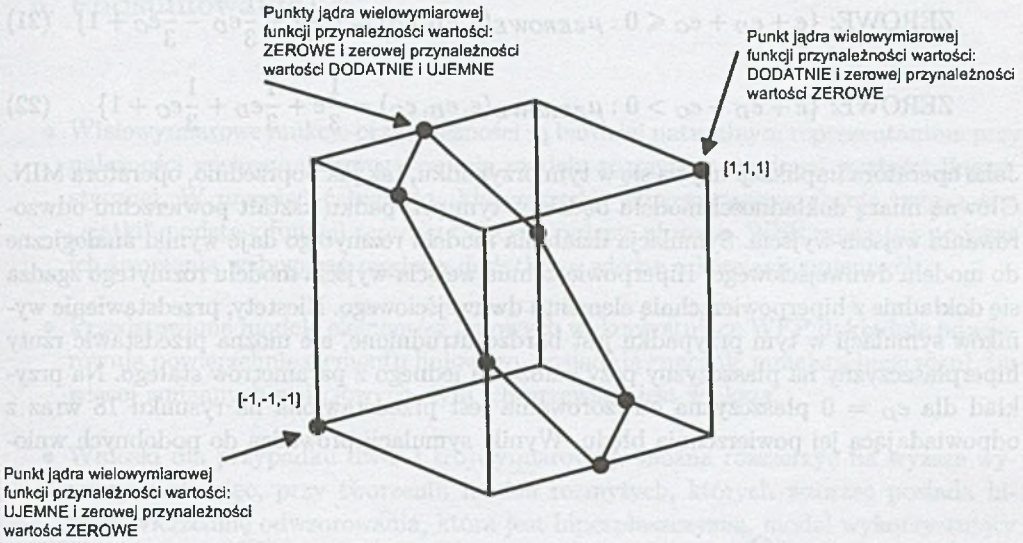
$\mu_{ZEROWE}(e, e_C, e_D)$ powinna spełniać zależności dla $e + e_C + e_D \geq 0$ - rys16,17 (18)

$$\begin{cases} \mu_{ZEROWE}(1, 1, 1) = 0 \\ \mu_{ZEROWE}(1, 0, -1) = 1 \\ \mu_{ZEROWE}(1, -1, 0) = 1 \\ \mu_{ZEROWE}(0, -1, 1) = 1 \end{cases}$$

Na podstawie powyższych równań oblicza się funkcje przynależności dla każdej z wartości lingwistycznych:

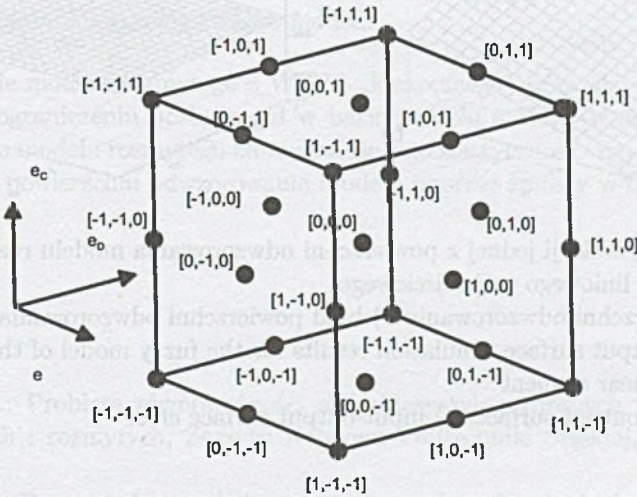
$$\text{DODATNIE: } \mu_{UJEMNE}(e, e_D, e_C) = \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e_D + \frac{1}{3}e_C \quad (19)$$

$$\text{UJEMNE: } \mu_{UJEMNE}(e, e_D, e_C) = -\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e_D - \frac{1}{3}e_C \quad (20)$$



Rys. 16. Płaszczyzna reguł o jednakowych konkluzjach wyjście jest ZEROWE

Fig. 16. Surface of the rules with the same conclusions output is ZERO



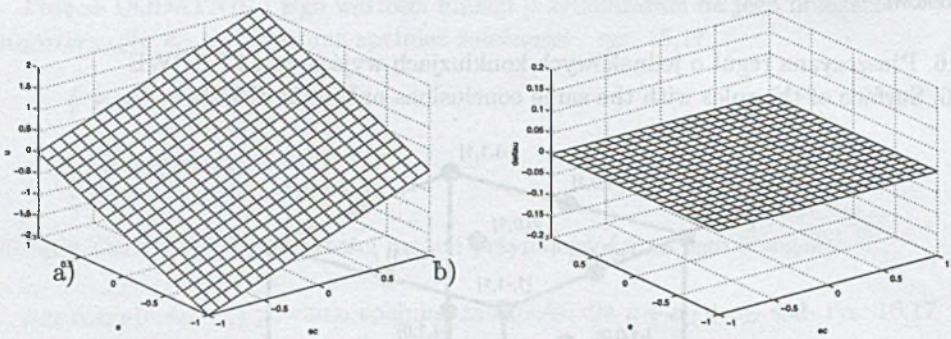
Rys. 17. Przestrzenny układ reguł

Fig. 17. Spatial presented set of rules

$$\text{ZEROWE: } \{e + e_D + e_C \leq 0 : \mu_{\text{ZEROWE}}(e, e_D, e_C) = -\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e_D - \frac{1}{3}e_C + 1\} \quad (21)$$

$$\text{ZEROWE: } \{e + e_D + e_C > 0 : \mu_{\text{ZEROWE}}(e, e_D, e_C) = \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e_D + \frac{1}{3}e_C + 1\} \quad (22)$$

Jako operatora implikacji używa się w tym przypadku, tak jak poprzednio, operatora MIN. Główną miarą dokładności modelu będzie w tym przypadku kształt powierzchni odwzorowania wejścia-wyjścia. Symulacja działania modelu rozmytego daje wyniki analogiczne do modelu dwuwęściowego. Hiperpowierzchnia wejścia-wyjścia modelu rozmytego zgadza się dokładnie z hiperpowierzchnią elementu dwuwęściowego. Niestety, przedstawienie wyników symulacji w tym przypadku jest bardzo utrudnione, ale można przedstawić rzuty hiperpłaszczyzny na płaszczyzny przy założeniu jednego z parametrów stałego. Na przykład dla $e_D = 0$ płaszczyzna odwzorowania jest przedstawiona na rysunku 18 wraz z odpowiadającą jej powierzchnią błędów. Wyniki symulacji prowadzą do podobnych wnio-



Rys.18. Wyniki symulacji jednej z powierzchni odwzorowania modelu rozmytego elementu liniowego trójwęściowego

a) powierzchni odwzorowania b) błąd powierzchni odwzorowania

Fig. 18. Input-output surface simulation results for the fuzzy model of the linear three inputs linear element

a)input-output surface, b) input-output surface error

sków jak dla przypadku dwuwymiarowego - otrzymano dokładne odwzorowanie elementu liniowego.

5. Podsumowanie

- Wielowymiarowe funkcje przynależności są bardziej naturalnym reprezentantem przynależności wielowymiarowego wejścia modelu rozmytego do danej wartości lingwistycznej. W przeciwieństwie do „klasycznych” jednowymiarowych nie tworzą one „siatki” podstaw funkcji reprezentujących pojęcia złożone. WFP mogą już podczas ich tworzenia wzbogacać model o dodatkową wiedzę o korelacji zmiennych.
- Przedstawione modele elementów liniowych wykorzystujące WFP dokładnie odwzorowują powierzchnię elementu liniowego, posiadają znacznie mniejszą bazę reguł. Im więcej zmiennych wejściowych, tym ich przewaga jest większa.
- Wnioski dla przypadku dwu- i trójwymiarowego można rozszerzyć na wyższe wymiary. Tak więc, przy tworzeniu modeli rozmytych, których wzorzec posiada hiperpowierzchnię odwzorowania, która jest hiperpłaszczyzną, model wykorzystujący WFP pozwoli na jej dokładne zamodelowanie z bardzo małą ilością reguł (2 lub 3).
- Niewątpliwą wadą modeli rozmytych z WFP jest skomplikowany system oceny przynależności wektora wejściowego do dziedzin poszczególnych wartości lingwistycznych co utrudnia implementację takiego modelu.
- Porównanie modelu rozmytego z WFP i „klasycznego” prowadzi do spostrzeżenia, że dzięki ograniczeniu liczby reguł w bazie modelu z WFP w stosunku do np. 9 regułowego modelu rozmytego zmniejsza się jego elastyczność - czyli możliwość „formowania” powierzchni odwzorowania modelu poprzez zmiany w bazie reguł.

LITERATURA

1. Bobrowski P.: Problem równoważności charakterystyk wybranych regulatorów konwencjonalnych i rozmytych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, S. Automatyka, z.133, Gliwice
2. Bobrowski P.: Bazy wiedzy modeli rozmytych regulatorów ciągłych PI oraz PID, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, S. Automatyka z.133
3. Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M.: Wprowadzenie do sterowania rozmytego', Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996
4. Piegat A.: Modelowanie i sterowanie rozmyte, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 1999
5. Piegat A.: Fuzzy modeling and control, Springer Verlag, 2001
6. Rutkowska D.: Inteligentne systemy obliczeniowe. Algorytmy genetyczne i sieci neuronowe, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1997

7. Ullrich T.: Untersuchungen zur effizienten interpolierenden Speicherung von nichtlinearen Prozesmodellen und Vorsteuerstrategien, Shaker Verlag, Aachen 1999
8. Yager R., Filev D.: Podstawy modelowania i sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1995.
9. Abonyi J., Babuska R., Szeifert F.: Fuzzy modeling with multivariate membership functions: gray-box identification and control design, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - PartB: Cybernetics, vol. 31, No 5, October 2001
10. Mao J., Zhan J., Yue Y., Ding H.: Adaptive-tree-structure-based fuzzy inference system, IEEE Transactions on fuzzy systems, vol 13, No.1, February 2005
11. Pedrycz W.: Knowledge-based clustering, Wiley-Interscience, 2005

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jacek Łęski

Abstract

Proposed paper shows the application of multidimensional membership functions (MMF) for creating linear two- and three input models (PI and PID controllers). Presented method of creation of MMF is based on inputs correlation regarding to conclusion output values and can be used only for specific models. Application of MMF leads to models with smaller rule base and better accuracy of input-output surface. Complicated calculation of MMF values and impossible generalization of the method are the main disadvantages.