ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: AUTOMATYKA z. 146 Nr kol. 1739

Paweł BOBROWSKI
Westinghouse Modelpol, Lubliniec

MODELOWANIE ROZMYTE BAZUJĄCE NA UOGÓLNIONYCH WIELOWYMIAROWYCH FUNKCJACH PRZYNALEŻNOŚCI

Streszczenie. Artykuł stanowi rozwinięcie i uogólnienie idei wielowymiarowych funkcji przynależności (WFP), które wstępnie zostały opisane w [6] i [3]. Uogólnienie WFP polega na wprowadzeniu funkcji bazujących na podstawach tworzących hipertrójkąty w przestrzeni zmiennych wejściowych. Wykorzystanie tak stworzonych WFP prowadzi do stworzenia modeli posiadających powierzchnię odwzorowania wejścia-wyjścia interpolowaną fragmentami hipertrójkątów.

FUZZY MODELING BASED ON GENERALIZED MULTIDIMENSIONAL MEMBERSHIP FUNCTIONS

Summary. This article presents the idea of devising and generalization of multidimensional membership functions (MMF), which were described in articles [6] and [3]. MMF are generalized by implementing multidimensional functions in inputs space based on hypertriangular domains. Using such generalized MMF tends to creation of models with hypertriangular interpolated input-output surfaces.

1. Ograniczenia wielowymiarowych funkcji przynależności

Własności wielowymiarowych funkcji przynależności w systemach rozmytych zostały przedstawione w [3]. Bazując na wnioskach z tego artykułu można wymienić podstawowe zalety systemów rozmytych wykorzystujących te funkcje:

1. Model bazujący na WFP może „przenosić" więcej wiedzy, a przez to być bardziej dokładny od modelu klasycznego.

2. Model z WFP pozwala ograniczyć wykładniczy wzrost ilości reguł ze wzrostem ilości wejść w bazie poprzez odpowiednie zdefiniowanie WFP, wykorzystując wzajemne korelacji zmiennych wejściowych.

Jednak mimo swoich zalet stosowanie wielowymiarowych funkcji przynależności opisanych w [3] jest ograniczone przez skomplikowany sposób obliczania ich wartości oraz brak uogólnionego schematu pozwalającego na ich tworzenie.

Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie uogólnionego sposobu tworzenia modelu rozmytego, bazującego na wielowymiarowych funkcjach przynależności i przedstawienie praktycznych zalet tak skonstruowanego systemu. Punktem wyjścia dla tego typu zagadnienia są wnioski wynikające z [3]. Wykorzystując metody opisane w [3] jest praktycznie niemożliwe stworzenie modelu posiadającego więcej niż trzy wejścia.

Ze względów numerycznych korzyści związane ze stosowaniem modeli bazujących na WFP dla przypadków dwuwymiarowych są niewielkie, a stworzenie modeli posiadających cztery i więcej wejść byłoby praktycznie niemożliwe.

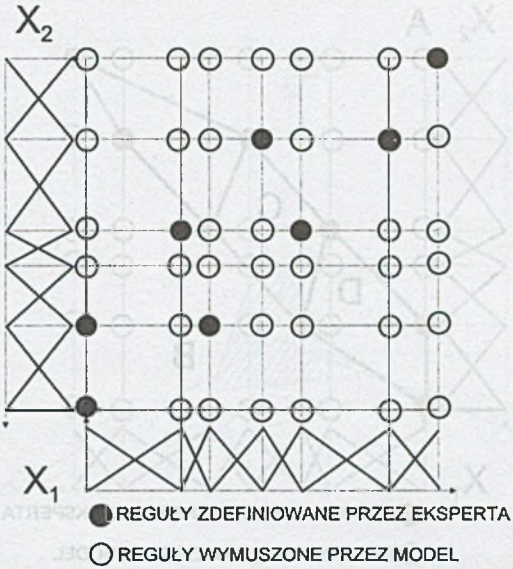
Nawet w modelu dwuwejściowym nie można zastosować w przypadku ogólnym tak zdefiniowanych funkcji przynależności, gdyby nie istniała korelacja, między zmiennymi wejściowymi.

Aby istniała możliwość praktycznego wykorzystania WFP, należy dokonać uogólnienia zasad tworzenia tych funkcji na wszystkie przypadki w których (w odróżnieniu do [3]):

1. reguły mają nieskorelowane wyjścia,

2. reguły są zdefiniowane w dowolnych obszarach przestrzeni wejściowej (nie w określonych punktach siatki).

Przedstawione na rysunku 2 punkty czarne reprezentują reguły zdefiniowane przez eksperta. Klasyczny kompletny model rozmyty wymusza zdefiniowanie dodatkowych reguł. Na podstawie tych reguł jest jednak możliwe stworzenie klasycznego modelu rozmytego z niekompletną bazą reguł. Jego działanie będzie jednak nieokreślone w punktach A, B, C, D (rys. 3). O ile brak określonego działania modelu w punktach A i B jest dopuszczalne, ze względu na znaczną odległość od grupy reguł zdefiniowanej przez eksperta (można założyć, że skoro ekspert nie stworzył takiej reguły to rzeczywisty układ nie pracuje w takim zakresie wejść), to słabe działanie systemu w punktach C i D może stanowić poważne zagrożenie (położenie wewnątrz grupy zdefiniowanych reguł może świadczyć o możliwości pracy systemu w tym zakresie wejść dla którego klasyczny system rozmyty ma słabe własności interpolacyjne).

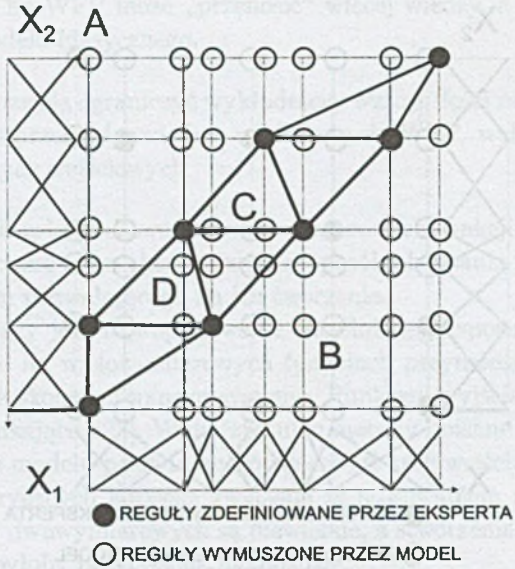


Rys. 1. Reguły zdefiniowane przez eksperta i reguły wymuszone przez model
Fig. 1. Rules defined by expert and enforced by model

2. Modele interpolacyjne

Wnioski wyciągnięte z poprzedniego punktu skłaniają do „porzucenia" modelowania rozmytego na korzyść innego rozwiązania tego problemu. Najprostsze rozwiązanie to stworzenie powierzchni trójkątnych bazujących na wierzchołkach będących istniejącymi regułami. Taki model zapewni interpolację wiedzy z dowolnie rozmieszczonych sąsiadów na powierzchnie stworzone między nimi. Model tego typu pozwoli nam interpolować działanie systemu, jeżeli tylko dla danego punktu będącego reprezentacją stanu aktualnego wejścia będą zdefiniowane punkty sąsiednie, tak by powstały na nich trójkąt zawierał punkt wejściowy. Modele tego typu są wykorzystywane w grafice komputerowej i w sterowaniu.

Wykorzystanie tej metody modelowania polega na stworzeniu zbioru trójkątów bazujących na wierzchołkach, reprezentujących w przestrzeni wejścia poprzedniki reguł, a następnie wykorzystaniu tak stworzonej fragmentami płaskiej powierzchni, jako powierzchni odwzorowania wejścia-wyjścia.

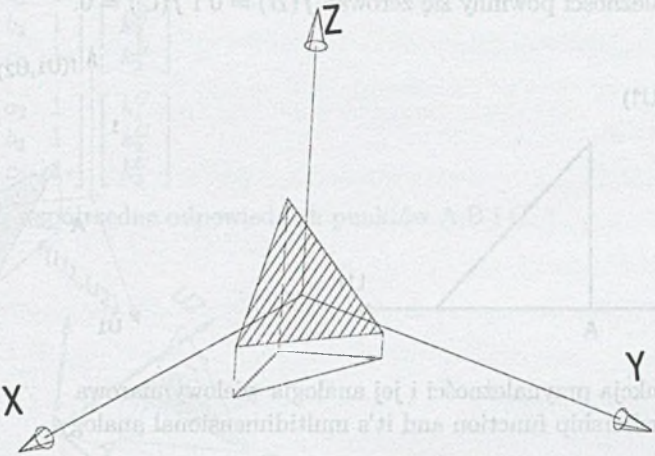


Rys. 2. Brak własności interpolacyjnych modeli rozmytych
Fig. 2. Interpolation inefficiency of fuzzy models

Otrzymany w ten sposób model jest modelem bazującym na regułach, nie posiada on jednak nic wspólnego z modelowaniem rozmytym. Tak stworzone modele mogą się wydawać bardzo efektywne, pozbawione balastu wnioskowania rozmytego, fuzyfikacji i defuzyfikacji.

Przy praktycznych próbach modelowania już na etapie implementacji można znaleźć ograniczenia modeli interpolacyjnych:

1. Stworzenie powierzchni modelu dla przypadku wyższego niż dwuwymiarowy jest praktycznie niewykonalne.
2. Algorytm poszukiwań przynależności wejścia, nawet tylko dwuwymiarowego, do trójkątów jest skomplikowany i nie łatwy do prostego rozszerzenia na wyższe wymiary.

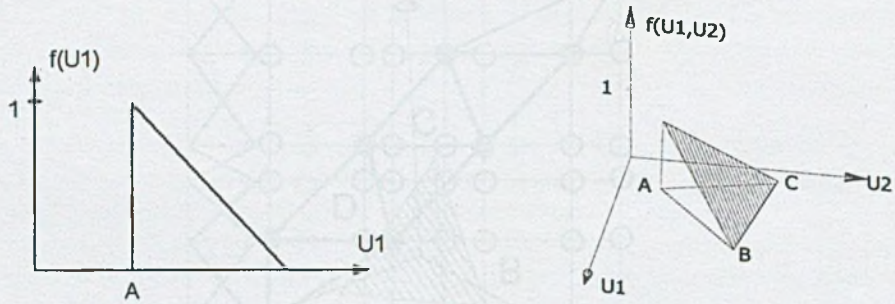


Rys. 3. Podstawa interpolacji dla dowolnie zdefiniowanych reguł
Fig. 3. Interpolation basis for random-defined rules

3. Funkcje przynależności stworzone na podstawie hipertrójkątów

Analiza modeli interpolacyjnych z poprzedniego punktu, nasuwa myśl dotyczącą uogólnienia wielowymiarowych funkcji przynależności. Jeżeli dla modelowania interpolacyjnego powierzchnie trójkątne (rys. 3) stanowią wystarczające elementy podstawowe do zbudowania dowolnego modelu, to można postawić tezę, że najbardziej uogólnioną wielowymiarową funkcją przynależności byłaby hiperpowierzchnia bazująca na dziedzinie hipertrójkąta stworzonego z zdefiniowanych reguł. Dla przykładu można rozważyć przypadek dwuwymiarowy (rys. 4a) i jego analogię - jednowymiarową funkcję przynależności (rys. 4b). Zakładając, że funkcja przynależności zmiennej lingwistycznej $f(U_1)$ dla wartości lingwistycznej A w przypadku klasycznych modeli rozmytych wygląda jak na rysunku 4a, to analogiczne pojęcie wartości lingwistycznej w przestrzeni wejścia dwuwymiarowego wyglądałoby jak na rysunku 4b. Wartość lingwistyczna jest w tym przypadku reprezentowana przez punkt na powierzchni, a funkcję przynależności możemy stworzyć przez analogię, tzn. dla wartości lingwistycznej A wartość funkcji przynależności powinna być równa jedności, a w punktach brzegowych rozważanego obszaru trójkątnego wartości fun-

kcji przynależności powinny się zerować $f(B) = 0$ i $f(C) = 0$.



Rys. 4. Funkcja przynależności i jej analogia wielowymiarowa
Fig. 4. Membership function and it's multidimensional analogy

Automatycznie można stworzyć funkcje przynależności dla wartości lingwistycznych B i C.

Funkcje przynależności powinny spełniać założenia:

Dla punktu A:

$$f_A(U_1, U_2) = \begin{cases} 1 & dla \quad punktu \quad A \\ 0 & dla \quad punktu \quad B \\ 0 & dla \quad punktu \quad C \end{cases}$$

Dla punktu B:

$$f_B(U_1, U_2) = \begin{cases} 0 & dla \quad punktu \quad A \\ 1 & dla \quad punktu \quad B \\ 0 & dla \quad punktu \quad C \end{cases}$$

Dla punktu C:

$$f_C(U_1, U_2) = \begin{cases} 0 & dla \quad punktu \quad A \\ 0 & dla \quad punktu \quad B \\ 1 & dla \quad punktu \quad C \end{cases}$$

Zakładając, że funkcje te będą miały postać:

$f_A(U_1, U_2) = k_1^A * U_1 + k_2^A * U2 + k_3^A$

$f_B(U_1, U_2) = k_1^B * U_1 + k_2^B * U2 + k_3^B$

$f_C(U_1, U_2) = k_1^C * U_1 + k_2^C * U2 + k_3^C$,

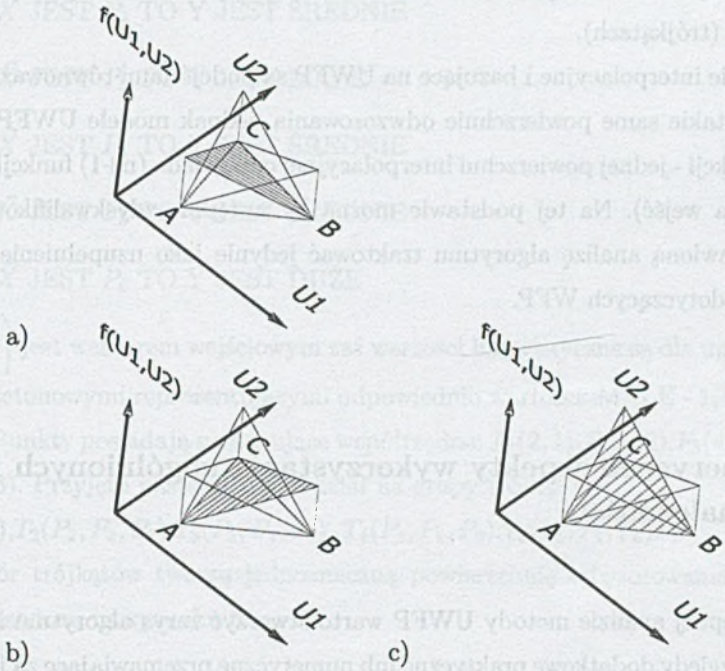
można je łatwo obliczyć:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^A \\ k_2^A \\ k_3^A \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^B \\ k_2^B \\ k_3^B \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^C \\ k_2^C \\ k_3^C \end{bmatrix} \tag{3}$$

$a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$ to współrzędne odpowiednich punktów A,B i C.



Rys. 5. Dwuwymiarowe funkcje przynależności dla modelu elementu liniowego
Fig. 5. Multidimensional membership function for a linear element

Otrzymane w ten sposób funkcje przynależności (rys.5) są analogiczne do liniowych funkcji przynależności dla przypadku klasycznego. Posiadają one takie same własności jak ich analogi, a najważniejszą z nich jest spełnianie warunku podziału jedności. Jednocześnie są one uogólnieniem wprowadzonego w [3] pojęcia wielowymiarowyh funkcji przynależności i będą dalej nazywane uogólnionymi wielowymiarowymi funkcjami przynależności (UWFP). Dysponując tak zdefiniowanymi funkcjami przynależności można „uruchomić" mechanizm wnioskowania rozmytego, aby sprawdzić właściwości modelowania. Należy pamiętać, że naszym obszarem rozważań są tylko wektory wejściowe znajdujące się w obszarze trójkąta ABC.

Zweryfikowane wyniki numeryczne i analityczne działania modelu udowodniły zgodność modelu z powierzchnią wzorcową. W przypadku ogólnym te funkcje przynależności będą zdefiniowane dla każdego z trójkątów, czyli ogólnie będzie ich (n+1) (n-ilość wejść) razy więcej niż trójkątów.

Ponieważ punkty stanowiące wierzchołki trójkątów będą należały do kilku trójkątów, to będą istniały różne funkcje przynależności do tej samej wartości lingwistycznej w różnych obszarach (trójkątach).

Podejście interpolacyjne i bazujące na UWFP są podejściami równoważnymi, dającymi w efekcie takie same powierzchnie odwzorowania, jednak modele UWFP generują dużo więcej funkcji - jednej powierzchni interpolacyjnej odpowiada (n+1) funkcji przynależności (n - liczba wejść). Na tej podstawie można by wstępnie zdyskwalifikować tę metodę, a przedstawioną analizę algorytmu traktować jedynie jako uzupełnienie i generalizację rozważań dotyczących WFP.

4. Numeryczne aspekty wykorzystania uogólnionych funkcji przynależności

Po wstępnej analizie metody UWFP warto stworzyć zarys algorytmu i sprawdzić, czy istnieją względy dodatkowe praktyczne lub numeryczne przemawiające za jej stosowaniem.

1. Punktem wyjścia do stworzenia algorytmu jest stworzenie bazy reguł, w punktach przestrzeni zupełnie niezależnych, tak jak ekspert potrafi zwerbalizować swoją wiedzę.

2. Dla zdefiniowanych w punkcie poprzednim reguł stworzyć zbiór wzajemnie „niepokrywających się "trójkątów. O ile w przypadku dwuwymiarowym nie stanowi to problemu, to dla większej ilości wymiarów będzie to stanowić osobne zagadnienie.

3. Obliczyć funkcje przynależności dla zdefiniowanego zbioru punktów i trójkątów.

4. Wykorzystać stworzony model, tj. dla danego wektora wejściowego znaleźć trójkąt, do którego on należy, następnie obliczyć stopnie przynależności do aktywizowanych

w tym trójkącie reguł i zastosować w sposób konwencjonalny mechanizm inferencji i defuzyfikacji w celu obliczenia wyjścia (np. metoda wysokości).

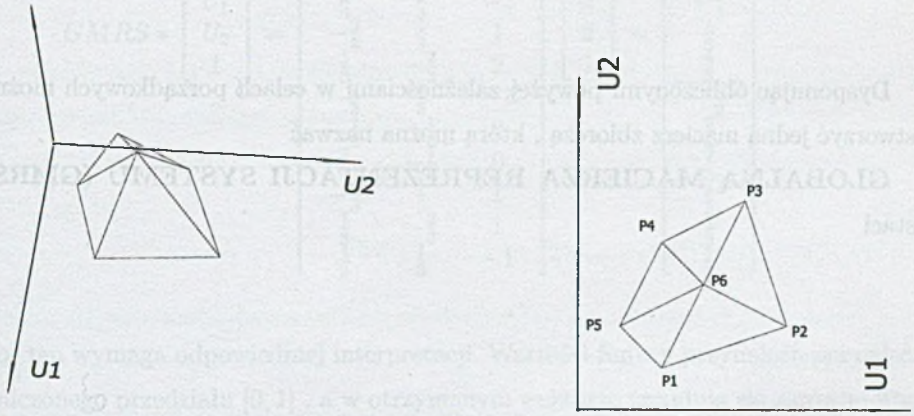
Jako przykład przyjmuje się następującą dwuwymiarową bazę reguł:

1. JEŻELI $\vec{X}$ JEST P_1 TO Y JEST MAŁE
2. JEŻELI $\vec{X}$ JEST P_2 TO Y JEST ŚREDNIE
3. JEŻELI $\vec{X}$ JEST P_3 TO Y JEST MAŁE
4. JEŻELI $\vec{X}$ JEST P_4 TO Y JEST ŚREDNIE
5. JEŻELI $\vec{X}$ JEST P_5 TO Y JEST ŚREDNIE
6. JEŻELI $\vec{X}$ JEST P_6 TO Y JEST DUŻE

gdzie $\vec{X} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ jest wektorem wejściowym zaś wartości lingwistyczne są dla uproszczenia funkcjami singletonowymi reprezentującymi odpowiednio wartości: MAŁE - 1, ŚREDNIE - 2, DUŻE - 4. Punkty posiadają następujące współrzędne: $P_1(2,1)$,$P_2(5,2)$,$P_3(4,5)$,$P_4(2,4)$, $P_5(1,2)$,$P_6(3,3)$. Przyjęto następujący podział na grupy trójkątów:

$T_1(P_1,P_2,P_6)$,$T_2(P_2,P_3,P_6)$,$T_3(P_3,P_4,P_6)$, $T_4(P_4,P_5,P_6)$,$T_5(P_5,P_1,P_6)$.

Reguły i zbór trójkątów tworzą jednoznaczną powierzchnię odwzorowania wejścia - wyjścia przedstawioną na rysunku 6.



Rys. 6. Reprezentacja przestrzenna bazy reguł
Fig. 6. Spacial representation of the rule base

Stworzona baza reguł oraz trójkątów daje 15 funkcji przynależności. Dla trójkąta T_1:

$f_1^{T1}(U_1, U_2) = -0.2U_1 + (-0.4)U_2 + 1.8$

$f_2^{T1}(U_1, U_2) = 0.4U_1 + (-0.2)U_2 - 0.6$

$f_6^{T1}(U_1, U_2) = (-0.2)U_1 + 0.6U_2 - 0.2$

Dla trójkąta T_2:

$f_2^{T2}(U_1, U_2) = 0.4U_1 + (-0.2)U_2 - 0.6$

$f_3^{T2}(U_1, U_2) = 0.2U_1 + 0.4U_2 - 1.8$

$f_6^{T2}(U_1, U_2) = (-0.6)U_1 + (-0.2)U_2 + 3.4$

Dla trójkąta T_3:

$f_3^{T3}(U_1, U_2) = \frac{1}{3}U_1 + \frac{1}{3}U_2 - 2$

$f_4^{T3}(U_1, U_2) = -\frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3}U_2 + 1$

$f_6^{T3}(U_1, U_2) = \frac{1}{3}U_1 - \frac{2}{3}U_2 + 2$

Dla trójkąta T_4:

$f_4^{T4}(U_1, U_2) = -\frac{1}{3}U_1 + \frac{2}{3}U_2 - 1$

$f_5^{T4}(U_1, U_2) = -\frac{1}{3}U_1 - \frac{1}{3}U_2 + 2$

$f_6^{T4}(U_1, U_2) = \frac{2}{3}U_1 - \frac{1}{3}U_2 + 0$

Dla trójkąta T_5:

$f_5^{T5}(U_1, U_2) = -\frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3}U_2 + 1$

$f_1^{T5}(U_1, U_2) = \frac{1}{3}U_1 - \frac{2}{3}U_2 + 1$

$f_6^{T5}(U_1, U_2) = \frac{1}{3}U_1 + \frac{1}{3}U_2 - 1$

Dysponując obliczonymi powyżej zależnościami w celach porządkowych można z nich stworzyć jedną macierz zbiorczą , którą można nazwać

GLOBALNĄ MACIERZĄ REPREZENTACJI SYSTEMU (GMRS) w postaci

$$GMRS = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 1.8 \\ 0.4 & -0.2 & -0.6 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \\ 0.4 & -0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0.4 & -1.8 \\ -0.6 & -0.2 & 3.4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Dysponując określonym wektorem wejściowym np. $\vec{X} = (2, 2)$ możemy stworzyć wektor kolumnowy, który można będzie bezpośrednio wykorzystać do mnożenia przez otrzymaną powyżej macierz:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tj.

$$GMRS * \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 1.8 \\ 0.4 & -0.2 & -0.6 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \\ 0.4 & -0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0.4 & -1.8 \\ -0.6 & -0.2 & 3.4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.2 \\ 0.6 \\ \hline -0.2 \\ -0.6 \\ 1.8 \\ \hline -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \hline -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Wektor ten wymaga odpowiedniej interpretacji. Wartości funkcji przynależności należą do ograniczonego przedziału $[0, 1]$, a w otrzymanym wektorze znajdują się zarówno wartości większe od 1 i mniejsze od 0. Wynika to z faktu, że UWFP są zdefiniowane dla całej przestrzeni wejścia - wyjścia, a powinny być rozpatrywane tylko na odpowiednich trójką-

tach, dla których zostały zdefiniowane (poza trójkątami osiągają wartości niedopuszczalne dla funkcji przynależności, podobnie jak w klasycznych systemach rozmytych trójkątne funkcje przynależności są definiowane jako funkcje liniowe w pewnych przedziałach). Wartości otrzymane, a nie należące do przedziału $[0,1]$ nie mogą być traktowane jako rezultat fuzyfikacji. Z drugiej strony, aby macierz ta była poprawna, należałoby wstępnie znaleźć trójkąt, do którego należy punkt, a jest to zadanie dość mozolne. Wracając do otrzymanej macierzy możemy ją wykorzystać do celów poszukiwań trójkąta. Wiadomo, że w trójkącie, do którego będzie należał punkt, wartości przynależności do uogólnionych funkcji jego wierzchołków będą się znajdować w przedziale $[0,1]$ i **będzie to jedyny trójkąt posiadający takie cechy** (oprócz wektorów wejścia położonych na bokach i elementów wierzchołkowych). Na podstawie obliczonej macierzy możemy powiedzieć, że punkt wejściowy będzie należał do trójkąta nr 5 (ostatnie trzy rzędy jako jedyne spełniają ten warunek). Po przeprowadzeniu inferencji i defuzyfikacji metodą singletonów otrzymujemy:

$$Y = \frac{\frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 2\frac{1}{3}, \tag{4}$$

co odpowiada wartości obliczonej dla powierzchni interpolacyjnej dla tego trójkąta.

5. Uniwersalny algorytm wykorzystujący Uogólnione Wielowymiarowe Funkcje Przynależności (UWFP)

Na podstawie przedstawionych powyżej obliczeń można stworzyć algorytm i zweryfikować numerycznie dokładność odwzorowania powierzchni modelu. Dokładność ta będzie oceniana względem modelu interpolacyjnego dla założonych z góry powierzchni trójkątnych.

Algorytm modelowania z wykorzystaniem UWFP.

- **Etap przygotowania danych modelu - Globalnej Macierzy Reprezentacji Systemu**

  Dany jest zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej (n-wejść do systemu), dla których zdefiniowane są wartości wyjścia. Zdefiniowane są trójkąty tworzące powierzchnie wzorcową modelu.

Obliczamy funkcje przynależności dla zdefiniowanych trójkątów (hipertrójkątów).

Na podstawie obliczonych funkcji przynależności, tworzymy Globalną Macierz Reprezentacji Systemu, przez dodawanie wierszy reprezentujących współczynniki przy poszczególnych elementach obliczonej funkcji przynależności, tak by wiersze reprezentujące funkcje przynależności określonego trójkąta leżały obok siebie.

- **Etap wykorzystania Globalnej Macierzy Reprezentacji Systemu do modelowania lub sterowania**

Zakładając, że układ ma n wejść, a aktualne wartości tych wejść to $x_1, x_2, ..., x_n$, tworzymy wektor wejściowy:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tak stworzony wektor mnożymy przez GMRS i otrzymujemy wektor przynależności punktu wejściowego do wszystkich funkcji obliczonych wcześniej.

Z tak uzyskanego wektora wybieramy grupę kolejnych n+1 wartości spełniających zależność $0 \leqslant U_i \leqslant 1$, tj. dla dwóch wejść sprawdzamy kolejne wiersze grupami po trzy. Jeśli wszystkie nie spełniają podanej zależności, to sprawdzamy następną grupę, aż do znalezienia grupy spełniającej ww warunek, co kończy poszukiwania.

Dla znalezionego trójkąta i wartości funkcji przynależności do jego wierzchołków korzystamy z defuzyfikacji metodą wysokości.

$$y = \frac{\sum y_j * \mu_j}{\sum y_j}, \tag{5}$$

gdzie μ_j - wartość znalezionej funkcji przynależności do danego punktu, której odpowiada wartość wyjścia y_j.

6. Równoważność modeli wykorzystujących UWFP i modeli interpolacyjnych

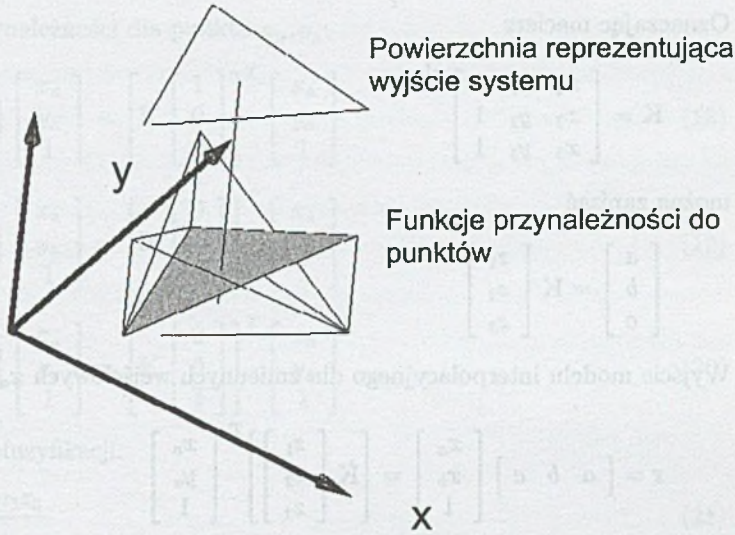
Po zaimplementowaniu modelu analizowanego wcześniej i przetestowaniu otrzymana eksperymentalnie powierzchnia wejścia-wyjścia jest dokładnie zgodna z powierzchnią interpolacyjną stworzoną na zdefiniowanych w modelu trójkątach i wartościach wyjścia. Efekt taki można było przewidzieć ze względu na fakt, że znaleziona wartość funkcji przynależności dla aktywizowanego trójkąta (pojęcie „aktywizacji" w klasycznych modelach rozmytych odnosi się do reguły) poprzez defuzyfikację metodą wysokości jest przeliczana proporcjonalnie na wartość wyjściową poprzez sumę ważoną wartości wyjść w tych punktach.

Innym powodem, dla którego efekt interpolacji liniowej był spodziewany, jest analogia tego typu modelu do modeli rozmytych klasycznych z podobnym zestawem operatorów badanych w [1].

Poprzez wykorzystanie UWFP uzyskano powierzchnię odwzorowania wejścia - wyjścia, jak dla modeli interpolacyjnych. Jednak wprowadzenie tych funkcji pozwala nam na uzyskanie struktur danych pozwalających na jednoznaczną charakterystykę modelu czyli GMRS oraz wektor wartości wyjść. Te struktury i mechanizm wytworzony przy ich analizie pozwala na łatwą implementację algorytmu sterowania lub modelowania. Modele interpolacyjne same nie generują mechanizmu pozwalającego na wyszukiwanie trójkąta interpolacyjnego który pozwoliłby obliczyć wyjście. Zastosowanie innych metod poszukiwań tego trójkąta, wymaga stworzenia skomplikowanych algorytmów poszukiwań, których rozszerzenie na wyższe wymiary nie jest proste. Rozszerzenie modeli bazujących na UWFP jest zagadnieniem trywialnym - zwiększa się tylko rozmiar macierzy.

Wyniki symulacji otrzymanej powierzchni odwzorowania wejścia-wyjścia potwierdzają dokładną zbieżność modelu rozmytego z modelem interpolacyjnym. Przetestowaną równoważność takiego systemu bazującego na UWFP można sobie łatwo zinterpretować (rys. 7). Otrzymane wartości funkcji przynależności w danym trójkącie każdego z jego wierzchołków są miarą odległości od tego wierzchołka. Suma ważona w operacji defuzyfikacji polega na przemnożeniu otrzymanych wartości przez wartości wyjścia dla danego punktu.

Można to także udowodnić analitycznie. W przypadku modelu interpolacyjnego mamy dane trzy punkty, tworzące powierzchnię trójkąta:



Rys. 7. Funkcje przynależności dla jednego z trójkątów i powierzchnia wyjścia
Fig. 7. Membership functions for one of the triangles and output surface

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}.$$

Dla uproszczenia analizy przyjęto oznaczenia dla zmiennych wejściowych x, y, a wyjście - z. Zmienna z jest reprezentacją wyjścia systemu. Dysponując tymi punktami możemy obliczyć równanie tej płaszczyzny, zakładając jego postać ogólną:

$$z = ax + by + c \tag{6}$$

$$\begin{cases} z_1 = ax_1 + by_1 + c \\ z_2 = ax_2 + by_2 + c \\ z_3 = ax_3 + by_3 + c \end{cases} \tag{7}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{8}$$

Z tego

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Oznaczając macierz

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{10}$$

można zapisać

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathrm{K} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Wyjście modelu interpolacyjnego dla zmiennych wejściowych x_a, x_b będzie wówczas:

$$z = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Analogiczne obliczenia można przeprowadzić dla modelu z UWFP dla pojedynczego trójkąta jak wyżej.

Funkcja przynależności do punktu 1:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Korzystając z wcześniej wprowadzonej definicji macierzy K:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = \mathrm{K} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Analogicznie dla punktu 2:

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ l_2 \\ m_2 \end{bmatrix} = \mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

i dla punktu 3:

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ l_3 \\ m_3 \end{bmatrix} = \mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Obliczanie funkcji przynależności dla punktu x_a, y_a:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} k_1 & m_1 & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} k_2 & m_2 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mu_3 = \begin{bmatrix} k_3 & m_3 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Wyjście systemu po defuzyfikacji:

$$z = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \tag{21}$$

Podstawiając uzyskane zależności:

$$z = \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} z_1 + \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} z_2 + \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} z_3 \tag{22}$$

$$z = \left[\mathrm{K} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Rozwiązanie to jest równe rozwiązaniu powierzchni wyjściowej (odwzorowania wejścia-wyjścia) jak dla modelu interpolacyjnego.

7. Wnioski

Metoda uogólnionych wielowymiarowych funkcji przynależności pozwala tworzyć i wykorzystywać bazę wiedzy, stworzoną na regułach dowolnie rozmieszczonych w przestrzeni wejścia-wyjścia. Jest to jedna z najważniejszych zalet tej metody.

Wstępna analiza wskazuje na całkowitą równoważność modeli bazujących na UWFP i modeli interpolacyjnych, jednak umiejętne wykorzystanie funkcji przynależności powoduje, że pozwala ona uniknąć poszukiwania trójkąta, do którego należy dany wektor wejściowy, a przez to daje się bardzo łatwo zalgorytmizować.

Wykorzystanie globalnej macierzy reprezentacji systemu pozwala także na rozszerzenie algorytmu na większą ilość wejść, co w przypadku modeli interpolacyjnych jest niemożliwe. Stworzenie Globalnej Macierzy Reprezentacji Systemu pozwala na kompresję wiedzy i jej łatwą implementację w systemach sterowania opartych na prostych mikrokontrolerach. Stanowi ona numeryczną reprezentację systemu rozmytego zrealizowana przy pomocy prostych operacji algebraicznych. Stworzenie algorytmu wykorzystującego GMRS skutecznie zastępuje tworzenie programowych lub sprzętowych mechanizmów dla implementacji logiki rozmytej.

LITERATURA

1. Bobrowski P.: Problem równoważności charakterystyk wybranych regulatorów konwencjonalnych i rozmytych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Seria: Autom. z.133
2. Bobrowski P.: Bazy wiedzy modeli rozmytych regulatorów ciągłych PI oraz PID, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Seria: Automatyka, z.133
3. Bobrowski P.: Modelowanie rozmyte zbudowane na bazie wielowymiarowych funkcji przynależności, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Seria: Automatyka, z.146
4. Driankov D.,Hellendoorn H., Reinfrank M.: Wprowadzenie do sterowania rozmytego, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996
5. Piegat A.: Modelowanie i sterowanie rozmyte, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 1999
6. Piegat A.: Fuzzy modeling and control, Springer Verlag,2001
7. Rutkowska D.: Inteligentne systemy obliczeniowe. Algorytmy genetyczne i sieci neuronowe, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1997
8. Ullrich T.: Untersuchungen zur effizienten interpolierenden Speicherung von nichtlinearen Procesmodellen und Vorsteuerstrategien, Sharker Verlag, Aachen 1999
9. Yager R., Filev D.: Podstawy modelowania i sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1995
10. Pedrycz W.:Knowledge-based clustering, Wiley-Interscience, 2005

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jacek Łęski

Abstract

The base for the presented paper is [3]. This paper devises and generalizes the idea of multidimensional membership functions (mmf). It is based on creation of membership functions on hypertriangular input domains in the input space. For these triangular sets of input surface generalized multidimensional membership functions are defined (gmmf). Gmmf can be created for freely defined rules, not constrained to a grid. Results of application of such functions with a height method defuzification gives models with input-output surfaces equivalent to interpolation models (triangular interpolation). Implementation of such system has a great advantage over standard fuzzy reasoning system making use of the Global System Representation Matrix (GSRM) simplifies the reasoning process and algorithm and maybe more important resistivity to „course of dimensionality". These features of the system based on gmmf makes the system lend itself perfectly to implementation in microcontrolers.