

Zbigniew STAROSOLSKI
Politechnika Śląska, Instytut Automatyki

BADANIE STABILNOŚCI UKŁADU HYBRYDOWEGO Z ZASTOSOWANIEM WIELOKROTNEJ PRZEDZIAŁAMI LINIOWEJ FUNKCJI LAPUNOWA

Streszczenie. W niniejszej pracy badano stabilność układu hybrydowego z zastosowaniem wielokrotnej funkcji Lapunowa. Do parametryzacji wielokrotnej funkcji Lapunowa użyto funkcji przedziałami liniowej. Rozważano układ hybrydowy złożony z dwóch dynamik przełączanych w zależności od stanu dyskretnego i liniowej funkcji przełączającej. Cechą charakterystyczną badanego układu jest poruszanie się po trajektoriach dwóch różnych dynamik w tym samym regionie płaszczyzny stanu. Stabilność danego układu jest analizowana przez rozwiązanie problemu programowania liniowego (PPL). W wyniku rozwiązania PPL otrzymuje się wartości przedziałami liniowej wielokrotnej funkcji Lapunowa (PLWFL). W pracy zostały przedstawione warunki konieczne, jakie musi spełniać PLWFL, aby badany układ hybrydowy był asymptotycznie stabilny.

STABILITY ANALYSIS OF HYBRID SYSTEM USING MULTIPLE PIECEWISE LINEAR LYAPUNOV FUNCTIONS

Summary. In the paper a study of application of piecewise linear Lyapunov function as a Multiple Lyapunov function for analyzing the stability of hybrid system is presented. An example of hybrid system composed of two linear dynamics with switching is analyzed. The switching is controlled by a discrete control function. Both dynamics are asymptotically stable and both are defined under common region of the state space. The stability of hybrid system is proved by solving the linear programming problem. The conditions for asymptotic stability of hybrid linear system based on Piecewise Linear Multiple Lyapunov Function are presented.

1. Wstęp

Nowoczesne cele stawiane przed układami automatyki wymagają coraz bardziej skomplikowanych układów regulacji. Wśród nowych typów i struktur układów sterowania, rozważanych w literaturze w ostatnich latach ważną klasę stanowią układy hybrydowe. Analiza stabilności tego typu układów [14] jest zagadnieniem rozważanym coraz częściej i coraz szerzej w literaturze [2-8]. Zachowanie układu hybrydowego wynika z budowy układu oraz rodzaju przełączeń dynamik wchodzących w skład układu. Układ hybrydowy, nawet złożony tylko z dwóch stabilnych dynamik, nie musi być stabilny [5]. Stabilność układu hybrydowego zależy od rodzaju dynamik oraz od sekwencji przełączeń pomiędzy dynamikami. Można także podać przykłady układów hybrydowych składających się z niestabilnych dynamik, które są stabilne.

Przykładem układu hybrydowego jest układ sterowania dla wahadła na wózku [3], gdzie praca układu składa się z dwóch oddzielnych trybów pracy: (i) ustawienie wahadła w pozycji pionowej (swing up), (ii) utrzymanie stabilności odwróconej pozycji wahadła i (iii) śledzenie wartości zadanej przez wózek. Poszczególne tryby pracy są sterowane różnymi regulatorami. Warunki przełączenia trybów pracy układu muszą zapewnić stabilność całego układu.

W literaturze spotyka się badanie stabilności układów hybrydowych na podstawie wspólnej funkcji Lapunowa [4,8,11], może być to funkcja kwadratowa, funkcja kwadratowa wraz z całką zależną od nieliniowości dynamik układu hybrydowego, przedziałami kwadratowa funkcja Lapunowa otrzymana na podstawie rozwiązania LMI [1]. Do badania stabilności układów hybrydowych można wykorzystać idee przedziałami liniowej funkcji Lapunowa otrzymanej jako rozwiązanie problemu programowania liniowego [9,10,12,13]. Warunki, które otrzymuje się dla jednej wspólnej funkcji Lapunowa, są jednak bardzo konserwatywne i często zbyt mocne dla układów hybrydowych. Dlatego zaproponowano poszerzenie metody Lapunowa z myślą o układach, w których następuje przełączenie. Pierwszym rozwinięciem metody Lapunowa w tym kierunku było zaproponowanie w pracy [6] m -krotnej (wielokrotnej) funkcji Lapunowa. Idea wielokrotnej funkcji Lapunowa polega na tym, że definiuje się tyle samo różnych funkcji Lapunowa, ile jest różnych dynamik układu. Zakłada się przełączanie pomiędzy funkcjami Lapunowa zgodne z przełączaniem pomiędzy dynamikami układu. Przy takim podejściu otrzymuje się wyniki znacznie lepsze od podejścia tradycyjnego. W późniejszych latach powstały modyfikacje idei wielokrotnych

funkcji Lapunowa [2,3], mające na celu jeszcze dokładniejsze określenie rzeczywistych warunków stabilności układów z przełączeniami.

Podstawowym problemem przy konstrukcji wielokrotnej funkcji jest odpowiednia parametryzacja tej funkcji i następnie optymalny dobór parametrów. W niniejszej pracy proponuje się parametryzację (definicję) wielokrotnej funkcji Lapunowa jako funkcji przedziałami liniowej. Wykazuje się, że warunki stabilności można sprawdzać przez rozwiązanie odpowiednio zdefiniowanych problemów programowania liniowego (PPL) oraz podaje się przykłady obliczeniowe.

2. Typy układów hybrydowych

Układy hybrydowe ze względu na sposób przełączeń pomiędzy dynamikami, można podzielić na następujące typy:

1. Przełączenie autonomiczne - gdy trajektoria układu natrafia na linie przełączeń, to wektor pola przełącza się.
2. Przełączanie zależne od stanu części logicznej.
3. Przełączenie sterowanie - przełączania zależą od czynnika zewnętrznego. Układ hybrydowy opisuje równanie:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), i(t)), \quad (1)$$

gdzie $i(t)$ – funkcja logiczna sterująca przełączaniem pomiędzy dynamikami układu $f(x(t), i(t))$. W zależności od postaci funkcji $i(t)$ układ (1) można zaliczyć do jednego z powyższych trzech typów układów 1-3.

3. Przykłady

Przykład 1. Układ hybrydowy z przełączeniami autonomicznymi.

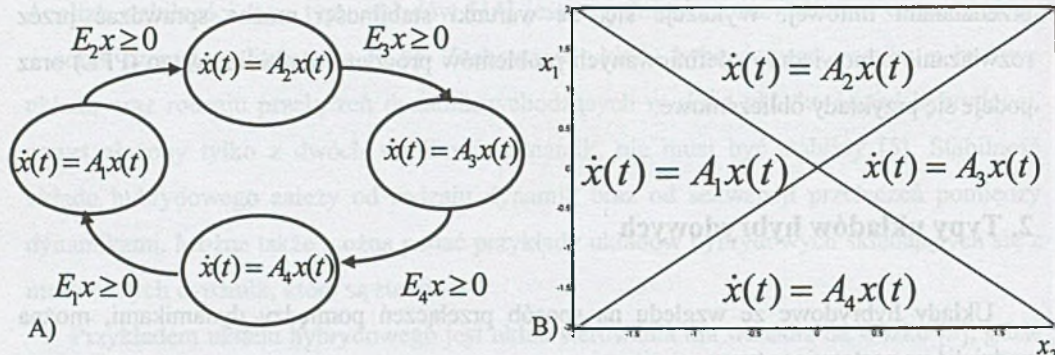
Podobny przykład był rozważany w [4]

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\alpha\omega & -\sigma \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} -\sigma & \alpha\omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie $i=1,2,3,4$.

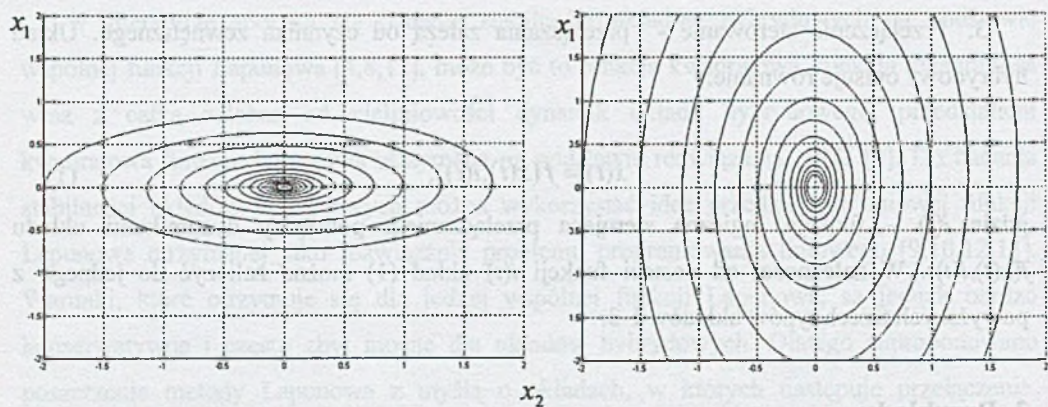
Podział przestrzeni stanu, w którym i -ta dynamika jest aktywna, określony jest układem nierówności (3) następująco:

$$E_i x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad i=1, \dots, 4, \quad E_1 = -E_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad E_2 = -E_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$



Rys.1. A) - graf pracy układu hybrydowego z przykładu 1, B) - podział płaszczyzny stanów dla układu hybrydowego z przykładu 1

Fig.1. A) – graph of hybrid system from example 1, B) state space division of hybrid system from example 1

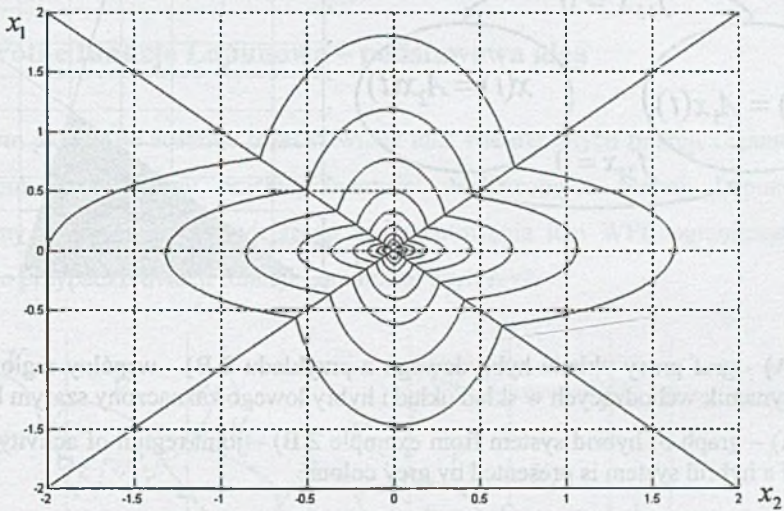


Rys.2. Przebieg trajektorii dla układów opisanych macierzami A_1, A_2, A_3, A_4 . Lewy dla układów z macierzami A_1, A_3 , prawy dla A_2, A_4

Fig.2. Plot of trajectory for systems described with matrixes A_1, A_2, A_3, A_4 . Left for A_1, A_3 , right for A_2, A_4

Trajektorie dla dynamik wchodzących w skład układu (2) są wykreślone na rys. 2. Z przebiegu trajektorii widać, że poszczególne dynamiki są stabilne.

Przebieg trajektorii dla układu hybrydowego dla wybranego warunku początkowego jest przedstawiony na rys. 3. Dla tak zdefiniowanego układu hybrydowego z przełączeniami określonymi macierzami E_i układ (2) jest globalnie asymptotycznie stabilny. Wykazanie stabilności układu (2) dla regionów aktywności określonych nierównościami (3) jest możliwe przez pokazanie istnienia jednej funkcji Lapunowa dla wszystkich dynamik wchodzących w skład układu hybrydowego (2).



Rys.3. Przebieg trajektorii dla układu hybrydowego z przykładu 1

Fig.3. Plot of trajectory of hybrid system from example 1

Przykład 2. Układ hybrydowy z przełączeniami zależnymi od dyskretnego stanu układu/ funkcji logicznej.

Dany jest układ :

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t) \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\alpha\omega & -\sigma \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \alpha\omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix} \quad (4)$$

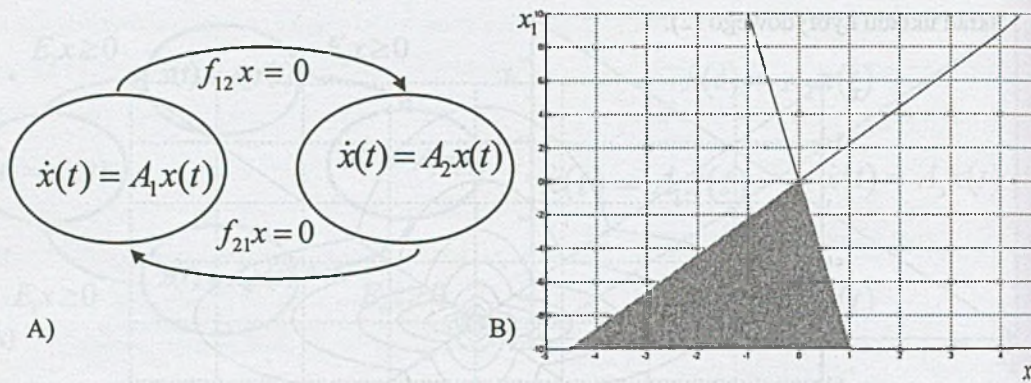
Reguła sterująca przełączeniami pomiędzy dynamikami:

$$i(t+) = \begin{cases} 2, & \text{dla } i(t-) = 1, \quad f_{12}^T x(t-) = 0 \\ 1, & \text{dla } i(t-) = 2, \quad f_{21}^T x(t-) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Graf pracy układu (4)-(5) przedstawiono na rys.4 wraz z regionem aktywności wspólnym dla obu dynamik układu hybrydowego. Dla przyjętych danych liczbowych:

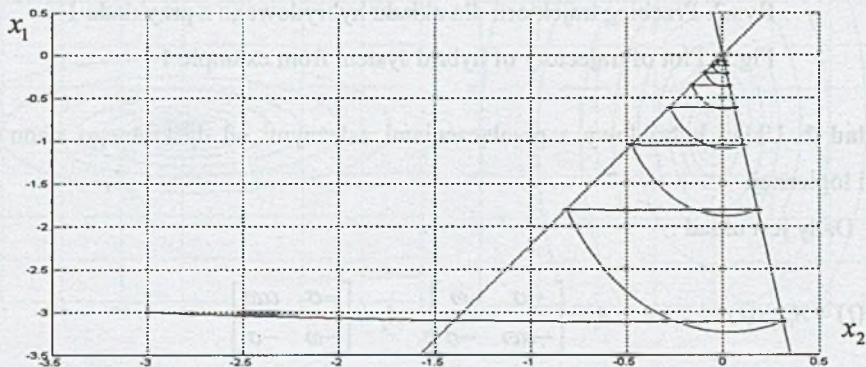
$$x_0 = [-3 \quad -3]^T \quad \alpha = 0.1, \quad \omega = 100, \quad \sigma = 1. \quad f_{12} = [-10 \quad -1]^T \quad f_{21} = [2 \quad -1]^T$$

wykreślono przebieg trajektorii fazowej, pokazany na rys.5.



Rys.4. A) - graf pracy układu hybrydowego z przykładu 2 B) - wspólny region aktywności dynamik wchodzących w skład układu hybrydowego zaznaczony szarym kolorem

Fig.4. A) – graph of hybrid system from example 2 B) – joint region of activity of dynamics of a hybrid system is presented by grey colour



Rys.5. Przebieg trajektorii dla danych liczbowych z przykładu 2

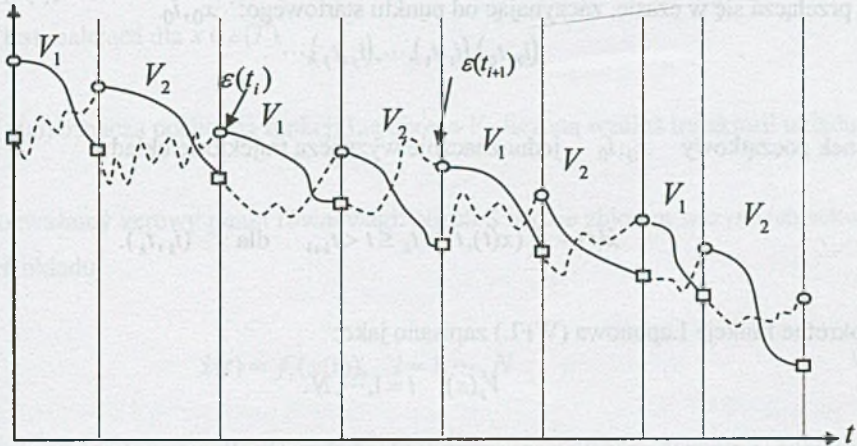
Fig.5. The trajectory for data from the example 2

Dla tak zdefiniowanych regionów aktywności (5) dynamik układu hybrydowego (4) nie istnieje wspólna funkcja Lapunowa, ponieważ regiony aktywności (5) nie są rozłączne, część wspólną przedstawiono na rys.4 (B). Jak pokazuje symulacja na rys.5, układ (4) jest

asymptotycznie stabilny. Do badania stabilności układu z przykładu 2 można wykorzystać nie jedną, lecz dwie funkcje Lapunowa - po jednej dla każdej z dynamik układu hybrydowego wraz z dodatkowymi warunkami wynikającymi z przełączeń układu (4). W ogólnym przypadku wielokrotne funkcje Lapunowa (WFL) pozwalają na badanie układu hybrydowego składającego się z dowolnej, skończonej liczby dynamik N . Idea WFL na podstawie dla dwóch dynamik, czyli $N=2$, zostanie omówiona w następnym paragrafie.

4. Wielokrotne funkcje Lapunowa – podstawowa idea

W tym paragrafie zostanie przedstawiona idea wielokrotnych funkcji Lapunowa wraz z przykładem. Przykładowy przebieg wartości wielokrotnych funkcji Lapunowa jest przedstawiony na rys.6. Dla łatwiejszego zaprezentowania idei WFL ograniczono się na rysunkach do przypadku dwóch funkcji Lapunowa, czyli $N=2$.



Rys.6. Przykładowy przebieg wartości wielokrotnych funkcji Lapunowa dla $N=2$. Kółka oznaczają początek aktywności i -tej dynamiki, kwadraty koniec aktywności i -tej dynamiki, linie ciągłe oznaczają że dana dynamika jest aktywna, linie przerywane oznaczają że dana dynamika jest nieaktywna

Fig.6. Example plot of multiple Lyapunov functions for $N=2$. Circles show starting points of activity of i -th dynamics, squares—end points of activity of i -th dynamics. Solid lines show which dynamics is active, dotted lines—which dynamics is inactive

Symbol $\varepsilon(T)$ oznacza wektor chwil czasowych odpowiadających chwilom początkowym aktywności i -tej dynamiki układu hybrydowego, tzn.: $t_i = t_0, t_2, t_4, \dots$ Punkty aktywacji danej dynamiki $\varepsilon(t_i)$ muszą dla t_0, t_2, t_4, \dots (w kolejnych aktywacjach) tworzyć ciąg malejący. Wartości funkcji przedstawione liniami ciągłymi na rys. 6 muszą być również malejące.

Ogólnie dla i -tej dynamiki układu hybrydowego poszukujemy V_i funkcji Lapunowa. Wraz z przełączeniami układu hybrydowego przełączane są również funkcje V_i Lapunowa. W trakcie przełączania następują skoki wartości funkcji Lapunowa. Konieczne twierdzenia umożliwiające zastosowanie WFL do badania układów hybrydowych zostały sformułowane w [2]. Przy formułowaniu twierdzeń o stabilności narzuca się warunki na znaki tych skoków. Jest to później uwzględniane przy zapisywaniu problemu optymalizacji.

W rozpatrywanym przykładzie wyklucza się pracę poślizgową. W ogólnym przypadku pracę poślizgową traktuje się jako kolejny stan układu. Dyskretna funkcja logiczna przełączająca dynamiki układu również jest wzbogacona o ten dodatkowy stan. Do omówienia WFL rozpatrzmy układ hybrydowy (6)

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

który przełącza się w czasie, zaczynając od punktu startowego: x_0, i_0

$$(i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots, (i_j, t_j), \dots \quad (7)$$

Warunek początkowy x_0, i_0 jednoznacznie wyznacza trajektorię układu

$$\dot{x}(t) = f_{i_k}(x(t), t) \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad \text{dla} \quad (i_k, t_k). \quad (8)$$

Wielokrotne funkcje Lapunowa (WFL) zapisano jako:

$$V_i(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Przed sformułowaniem warunków, jakie mają spełniać WFL, konieczne jest wprowadzenie następujących definicji:

Ciąg stanów (sekwencja przełączeń)

$$S = x_0 \quad (i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots, (i_N, t_N), \dots \quad (10)$$

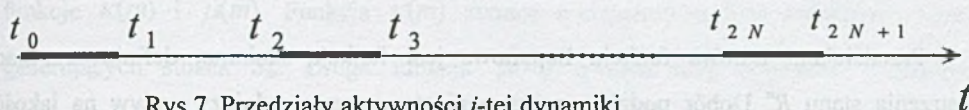
Chwile przełączeń dla i -tej dynamiki

$$T = t_0, t_1, \dots, t_N, \dots \quad (11)$$

Przedziały aktywności i -tej dynamiki definiuje (12) zilustrowana rys.7.

$$I(S | i) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_+} [t_{2j}, t_{2j+1}] \quad (12)$$

gdzie Z_+ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich.



Rys.7. Przedziały aktywności i -tej dynamiki

Fig.7. Range of activity of i -dynamics

4.1. Twierdzenie o stabilności

Dla danej rosnącej sekwencji czasów T wielokrotne funkcje Lapunowa V są funkcjami dopuszczalnymi, jeżeli spełniają następujące warunki:

1. V jest dodatnio określona.
 2. $\dot{V}(x(t)) < 0$ dla $t \in I(T)$.
 3. V jest malejąca dla $x \in \varepsilon(T)$,
- (13)

gdzie $\dot{V}(x(t))$ oznacza pochodną funkcji Lapunowa V liczoną wzdłuż trajektorii układu.

Rozważamy zerowy punkt równowagi. Niech S będzie zbiorem wszystkich sekwencji przełączeń układu.

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

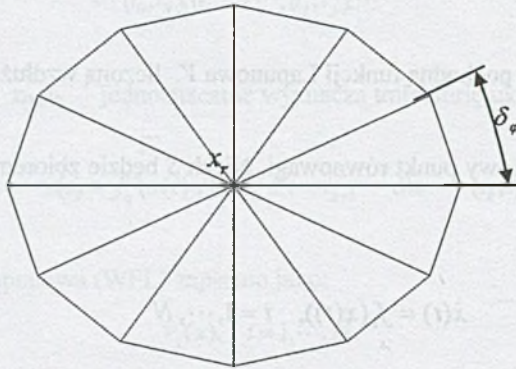
Jeżeli dla każdej sekwencji S , dla przedziałów aktywności każdej dynamiki, spełnione są warunki (13), to układ jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa.

5. Wielokrotna funkcja Lapunowa zdefiniowana jako przedziałami liniowa podwójna funkcja Lapunowa

Do zapisania WFL wykorzystano parametryzację funkcji Lapunowa, która pozwala przedstawić funkcję Lapunowa jako przedziałami liniową. Podejście to było rozważane w pracach [9,10,12,13].

5.1. Przedziałami liniowa funkcja Lapunowa

Przedziałami liniowa funkcja Lapunowa jest funkcją skalarną, definiowana nad przestrzenią stanu R^n . Dobór podziału przestrzeni stanu ma zasadniczy wpływ na jakość otrzymywanych wyników. Dla układów liniowych zaproponowano podział przestrzeni stanu na podstawie siatki biegunowej, której przykład przedstawia rys.8. Przykład typowej siatki biegunowej przedstawia rys.8, siatka dzieli obszar na 12 regionów, w środku siatki umieszczony jest punkt równowagi x_r . Każdy z regionów tzw. stożków jest określony poprzez współrzędne jego wierzchołków. Na rysunku 8 parametr δ_φ określa zagęszczenie siatki w zależności od wartości kąta φ . Parametr ten pozwala na zmianę gęstości siatki. Dla układów liniowych wystarczy tylko ten jeden parametr, gdyż wielkość siatki nie ma merytorycznego znaczenia.



Rys. 8. Przykładowa biegunowa siatka podziału (siatka triangulacji)

Fig. 8. Example of polar division grid (triangulation grid)

Definiujemy macierz X zawierającą N wektorów jako kolumny macierzy:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_N] \quad (15)$$

Wektory w macierzy X odpowiadają współrzędnym wierzchołków wszystkich stożków należących do siatki triangulacji i noszą nazwę promieni. Zakładamy również, że każdy wektor jest jednostkowej długości, tzn. : $\|x_k\| = 1$. Część wspólna dowolnych dwóch stożków

tworzy zbiór o wymiarze niższym niż n . Z podziałem przestrzeni na stożki związane są dwie funkcje $\kappa(m)$ i $\mu(m)$. Funkcja $\kappa(m)$ zwraca n -elementową listę indeksów promieni generujących stożek S_m . Druga funkcja $\mu(m)$ zwraca listę indeksów stożków S_m zawierających promień x_k . Z każdym ze stożków S_m związana jest macierz $G(m)$ o rozmiarze $n \times n$. Tworzą ją promienie, których indeksy należą do listy zwracanej przez funkcję $\kappa(m)$:

$$G(m) = [x_k], \quad k \in \kappa(m) \quad (16)$$

Macierz $G(m)$ jest zawsze nieosobliwa, ponieważ powstaje z promieni generujących stożek symplecjalny w przestrzeni stanu R^n . Korzystając z zapisu (16) stożek S_m można przedstawić jako:

$$S_m = \{x \in R^n : x = G(m)\beta, \quad 0 \leq \beta\}, \quad (17)$$

gdzie β jest nieujemnym wektorem kolumnowym określającym współrzędne punktów x należących do tego stożka S_m .

Dla jednoznacznego określenia przedziałami liniowej funkcji Łapunowa $V(x)$ należy podać jej wartości dla każdego z promieni x_k , czyli określić wartości wszystkich elementów macierzy (19). Wartość funkcji $V(x_k)$ dla promienia x_k oznaczamy jako:

$$v_k = V(x_k), \quad x_k \in X \quad (18)$$

Wektor V zawierający wartości funkcji $V(x)$ dla wszystkich K wektorów z macierzy X zapisujemy jako:

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_K] \quad (19)$$

Aby, mając zdefiniowane wartości funkcji $V(x)$ dla promieni, wyznaczyć wartość funkcji w dowolnym punkcie x , należy określić, do którego stożka S_m należy ten punkt x , a następnie wartość funkcji w punkcie x liczyć interpolując liniowo, tzn. :

$$V(x) = \beta^T V(m) = x^T (G(m))^T V(m) \quad (20)$$

Wektor $V(m)$ jest zbudowany z wartości funkcji dla promieni x_{k_1}, \dots, x_{k_n} zwracanych przez funkcję $\kappa(m)$:

$$V(m) = [V_k] \quad k \in \kappa(m) \quad (21)$$

Zatem, aby znaleźć wartość funkcji $V(x)$ w punkcie $x \in R^n$ leżącym wewnątrz S_m , należy określić współrzędne promieni stożka S_m . Wartości funkcji $V(x)$ dla promieni tworzących ten stożek pozwolą na znalezienie liniowej interpolacji wartości funkcji $V(x)$ w punkcie x .

5.2. Pochodna Diniego przedziałami liniowej funkcji Lapunowa

Przedziałami liniowa funkcja Lapunowa jest funkcją ciągłą, ale nie jest ona różniczkowalna w punktach leżących na krawędziach stożków. Dlatego stosujemy twierdzenie o asymptotycznej stabilności zgodnie z podejściem prezentowanym przez [9]. Do sformułowania warunków stabilności wykorzystujemy prawą górną pochodną Diniego.

5.3. Pochodna dla punktów wewnętrznych komórek triangulacji

Załóżmy, że x jest punktem wewnętrznym stożka S_m . W takiej sytuacji pochodna Diniego $D^+V(x)$ jest równa zwykłej pochodnej. Zachodzi :

$$D^+V(x) = V'(x) = \frac{\partial(V(x))}{\partial x} \dot{x} = x^T A^T (G^{-1}(m))^T V(m) = \gamma^T(x, m, k) V(m), \quad (22)$$

gdzie wektor $\gamma^T(x, m, k)$ określony jest zależnością:

$$\gamma^T(x, m, k) = [G^{-1}(m)Ax]^T \quad (23)$$

5.4. Pochodna na brzegach komórek triangulacji

Funkcja $V(x)$ nie jest gładka na brzegach pomiędzy stożkami triangulacji, jej pochodna posiada na brzegach skoki. Zatem dla punktów na brzegach stożków pochodna $V'(x)$ zdefiniowana w zwykłym sensie nie istnieje. Można natomiast łatwo pokazać, że dla każdego punktu brzegowego stożka istnieją granice lewostronna i prawostronna. Prawą pochodną Diniego liczoną dla punktów x_b leżących na brzegach stożków S_m można zapisać jako :

$$D^+V(x) = \lim_{x \rightarrow x_b, x \in \text{int } C_{m^*}} \dot{V}(x), \quad (24)$$

gdzie S_{m^*} , - stożek o indeksie m^* , do którego wchodzi trajektoria startująca z x_b .

5.5. Warunek ujemnej określoności pochodnej

Przyjmujemy następujące oznaczenie :

$$D_m^+V(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k, x \in \text{int } C_m} \dot{V}(x) = \gamma^T(x_k, m)V(m) \quad (25)$$

Można łatwo udowodnić następujące twierdzenie [10]: warunkiem koniecznym i wystarczającym ujemnej określoności prawej pochodnej $D^+V(x)$ jest $D_m^+V(x_k) < 0$ dla wszystkich m i dla wszystkich $k, k > 1$.

Dla każdego stożka S_m zapisujemy macierz $\Gamma(m)$ zbudowaną z wierszy $\gamma^T(x, m, k)$, przy czym $k \in \kappa(m)$, $k \neq 0$. Macierz $\Gamma(m)$ będzie postaci:

$$\Gamma(m) = [\gamma^T(x_k, m)]_{k \in \kappa(m)} \quad (26)$$

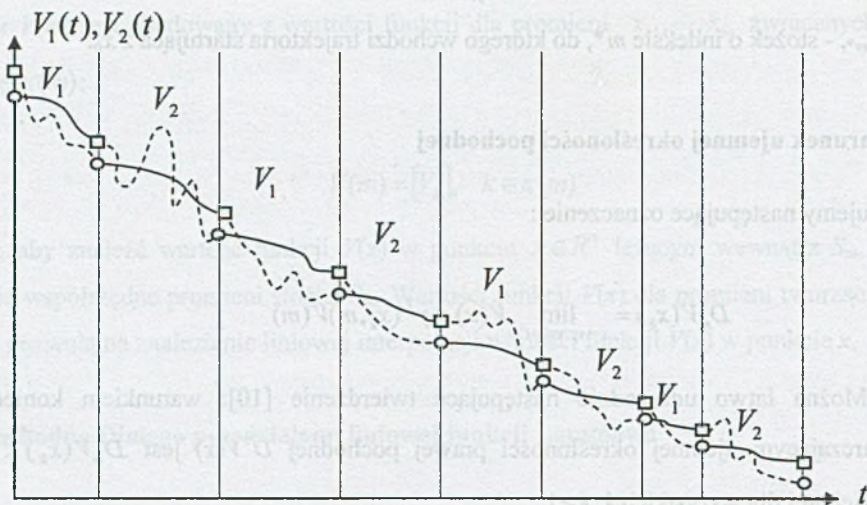
Na podstawie macierzy (26) tworzymy macierz C powstałą przez złożenie macierzy $\Gamma(m)$ dla wszystkich komórek S_m . Powstała macierz C zawiera K macierzy $\Gamma(m)$:

$$C = [\Gamma(1) \quad \Gamma(2) \quad \dots \quad \Gamma(K)]^T \quad (27)$$

Zwróćmy uwagę, że warunek ujemnej określoności prawej pochodnej $D^+V(x)$ może być teraz zapisany jako $CV < 0$, gdzie wektor v o wymiarze K dany jest w postaci (19).

5.6. Wielokrotna przedziałami liniowa funkcja Lapunowa

Dla łatwiejszego zaprezentowania idei WFL ograniczono się do przypadku dwóch funkcji Lapunowa, czyli $N=2$. Funkcje $V_1(x), V_2(x)$ są definiowane jako przedziałami liniowe czyli, zapisane są jako (19) i spełniają (22) – (25). W celu zmniejszenia złożoności obliczeniowej algorytmu numerycznego stosuje się uproszczenie wymagań postawionych przed WFL, idea uproszczenia jest pokazana na rys.9. Opis oznaczeń taki sam jak w rys.6.



Rys.9. Uproszczenie wymagań postawionych przed WFL

Fig.9. The simplification of conditions for WFL

Podwójna przedziałami liniowa funkcja Lapunowa musi spełniać warunki dotyczące przedziałami liniowej funkcji Lapunowa (28)–(30), ale również dodatkowe, wynikające z istnienia dwóch dynamik (29), (30) w układzie hybrydowym (4) oraz przełączeń układu (31)–(32).

$$\text{Układ 1: } \dot{x} = A_1 x \quad \forall_{k \in K(m)} D_m^+ V_1(x) < 0 \quad (28)$$

$$\text{Układ 2: } \dot{x} = A_2 x \quad \forall_{k \in K(m)} D_m^+ V_2(x) < 0 \quad (29)$$

$$C_i V_i < 0 \quad \text{oraz} \quad V_i > 0 \quad (30)$$

$$\text{Warunki przy przełączeniu } 1 \rightarrow 2: \quad V_1(x_p^{12}) > V_2(x_p^{12}) \quad (31)$$

$$\text{Warunki przy przełączeniu } 2 \rightarrow 1: \quad V_2(x_p^{21}) > V_1(x_p^{21}) \quad (32)$$

gdzie symbol $D_m^+ V(x)$ oznacza prawą górną pochodną Diniego liczoną wzdłuż trajektorii aktywnej dynamiki układu hybrydowego. Pochodna Diniego liczona jest zgodnie z [9].

6. Sformułowanie jako problem programowania liniowego

Warunki (28)-(32) zapisane we wcześniejszym paragrafie zapisano jako problem programowania liniowego. Maksymalizujemy dodatkową wielkość skalarną z :

$$\max z \quad (33)$$

Przy ograniczeniach:

$$C_i V_i + z \cdot 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$$V_i \geq 0, \quad (35)$$

$$0 \leq z \leq 1, \quad (36)$$

$$V_1(x_p^{12}) \geq V_2(x_p^{12}) \quad (37)$$

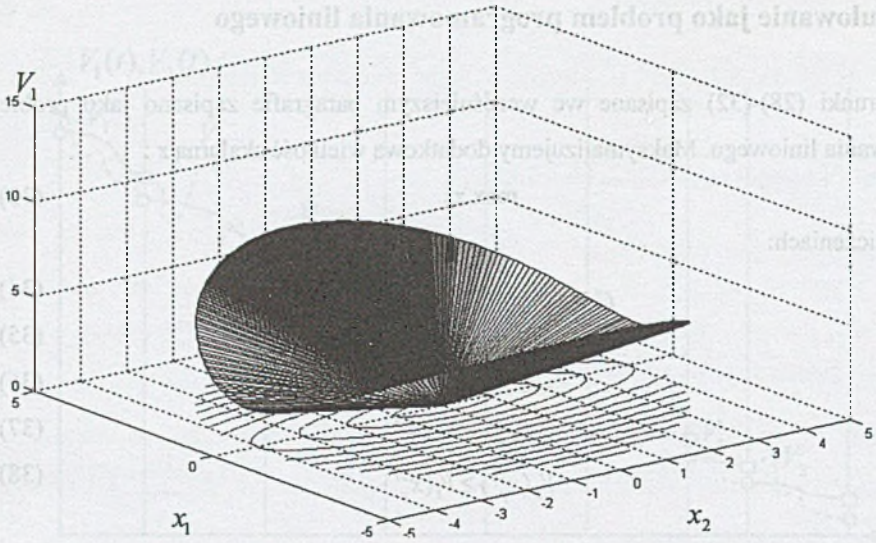
$$V_2(x_p^{21}) \geq V_1(x_p^{21}) \quad (38)$$

Zapisanie nierówności (34) określa znak pochodnej funkcji Lapunowa. Nierówność (35) gwarantuje dodatnią określoność funkcji Lapunowa. W nierównościach (37) i (38) x_p^i oznacza punkt płaszczyzny stanu, w którym następuje przełączenie dynamiki i na dynamikę j . Nierówności te wynikają z postaci dyskretnej funkcji przełączającej oraz z warunków narzuconych na wielokrotne funkcje Lapunowa i oznaczają, że wartość przedziałami liniowej funkcji Lapunowa w punkcie przełączenia musi być większa od wartości funkcji, na którą się przełącza .

7. Rozwiązanie

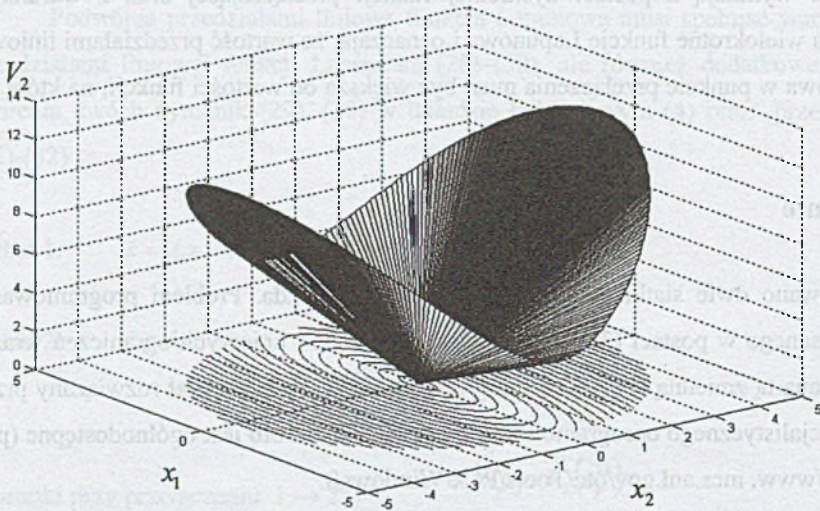
Zastosowano dwie siatki podziału o 277 węzłach każda. Problem programowania liniowego zapisanego w postaci (33) – (38) składa się z 1664 liniowych ograniczeń wraz z maksymalizowaną tą zmienną z . Problem programowania liniowego został rozwiązany przez stosowanie specjalistycznego oprogramowania o nazwie PCx, które jest ogólnodostępne (pod adresem: <http://www.mcs.anl.gov/otc/Tools/PCx/Windows/>).

W wyniku rozwiązania PPL otrzymuje się wartości dwóch przedziałami liniowych funkcji Lapunowa. Funkcje te razem tworzą wielokrotną przedziałami liniową funkcji Lapunowa. Wykresy otrzymanych wartości dwóch funkcji Lapunowa przedziałami liniowych przedstawiono na rys.10, dla dynamiki (28) oraz na rys.11 dla dynamiki (29).



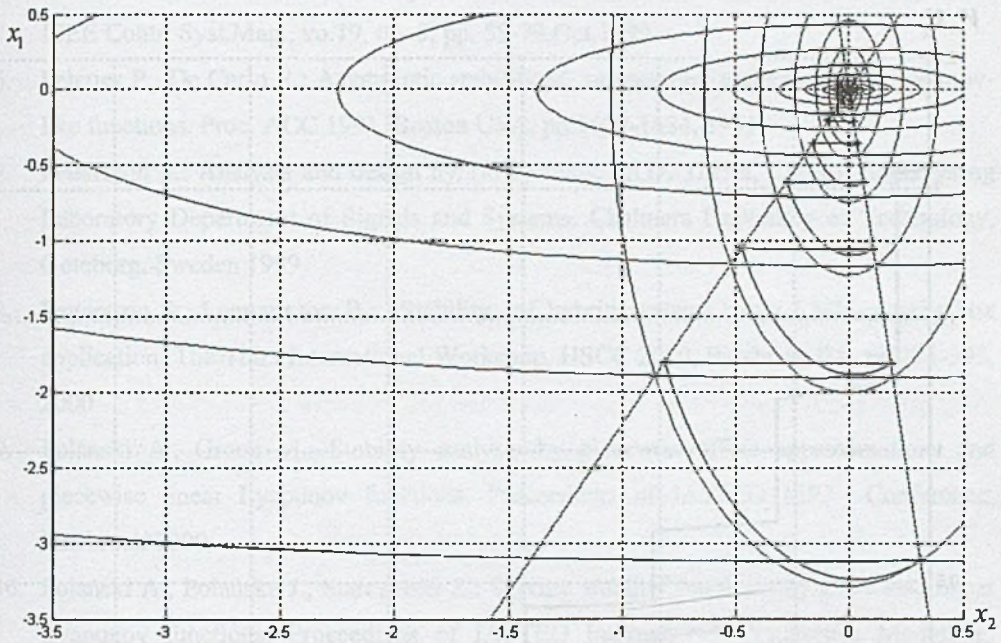
Rys.10. Wartości przedziałami liniowej funkcji Lapunowa otrzymanej dla pojedynczej dynamiki A_1 układu hybrydowego

Fig.10. The values of piecewise linear Lyapunov function obtained for single dynamics A_1 of a hybrid system



Rys.11. Wartości przedziałami liniowej funkcji Lapunowa otrzymanej dla pojedynczej dynamiki A_2 układu hybrydowego

Fig.11. The values of piecewise linear Lyapunov function obtained for single dynamics A_1 of a hybrid system



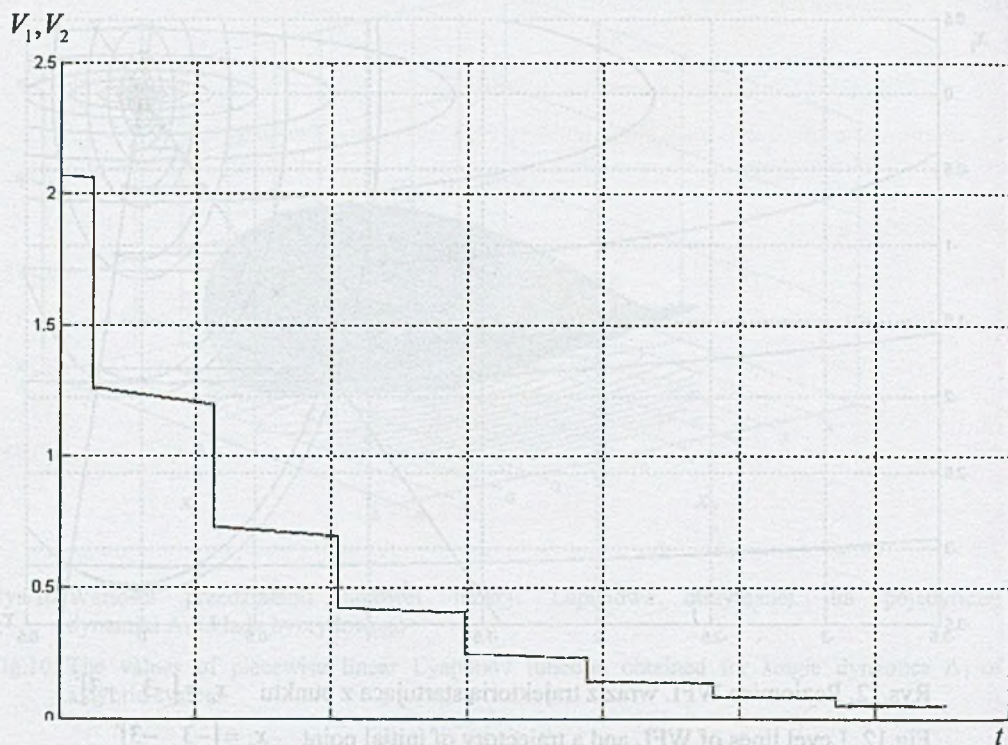
Rys.12. Poziomice WFL wraz z trajektorią startującą z punktu $x_0 = [-3 \ -3]^T$

Fig.12. Level lines of WFL and a trajectory of initial point $x_0 = [-3 \ -3]^T$

Poziomice WFL przedstawione są na rys.12, wraz z trajektorią startującą z punktu $x_0 = [-3 \ -3]^T$. Z rys.12. widać, że trajektoria wchodzi w głąb obszaru określonego poziomiami WFL. Wartości WFL są przedstawione na rys.13.

Wnioski

Badanie stabilności układów hybrydowych z wykorzystaniem przedziałami liniowych funkcji Lapunowa jest wygodną metodą obliczeniową ze względu na łatwość zastosowania. Problem badania stabilności jest sprowadzony do rozwiązania problemu programowania liniowego, który jest nawet dla dużych rozmiarów obecnie efektywnie rozwiązywany. Przy zastosowaniu tego typu podejścia konieczne jest bardzo staranne zaprojektowanie siatki podziałów przestrzeni stanu, będącej bazą do budowy przedziałami liniowej wielokrotnej funkcji Lapunowa.



Rys.13. Wartości WFL dla badanego układu dynamicznego

Fig.13. Values of WFL for dynamical system being analyzed

Praca wykonana w ramach BW-447 /RAu1/2003, zadanie nr 6

LITERATURA

1. Boyd S., Ghaoui L., El, Feron E., Balakrishnan V.: Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM 1994
2. Branicky M.: Multiple Lyapunov function and other analysis tools for switched and hybrid systems. IEEE Trans Aut. Contr., vol. 43, pp.475-482, april 1998
3. De Carlo R., Branicky M., Pettersson S., Lennartson B.: Prospective and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. Proceedings of the IEEE, vol.88, no.7 July 2000
4. Johansson M., Rantzer A.: Computation of Piecewise Quadratic Functions for Hybrid Systems. IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 43, no. 4, 1998, pp. 555-560

5. Liberzon D., Morse A.S.: Basic problem in stability and design of switched systems. IEEE Contr. Syst.Mag., vo.19, no. 5, pp. 59-70,Oct.1999
6. Peleties P., De Carlo R.: Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. Proc. ACC 1991, Boston USA, pp.1679-1684, 1991
7. Pettersson S.: Analysis and design hybrid systems. Ph.D. Thesis, Control Engineering Laboratory Department of Signals and Systems. Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden 1999
8. Pettersson S., Lennartsson B.: Stability of hybrid systems using LMIs- a gear box application. The Thirs International Workshop, HSCC 2000, Pittsburg, PA. pp.381-395, 2000
9. Polanski A., Groen M.: Stability analysis by piecewise affine approximations and piecewise linear Lyapunov functions. Proceedings of IASTED MIC Conference, Innsbruck 2000
10. Polański A., Polańska J., Starosolski Z.: Solving stability problems by piecewise linear Lyapunov functions. Proceedings of IASTED International Conference Modelling, Identification and Control, February 19 -22, Innsbruck 2001, Austria, pp.891-896
11. Rantzer A., Johansson M.: Piecewise Linear quadratic optimal control. IEEE Tran.Aut. Contr., vol 45, pp. 629-637, 2000
12. Starosolski Z.: Adaptive procedure of constructing piecewise linear Lyapunow function. IV Ogólnopolskie Warsztaty Doktoranckie OWD 2002, Istebna
13. Starosolski Z.: Adaptacyjna procedura konstrukcji przedziałami liniowej funkcji Lapunowa, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z. 134, Gliwice 2003
14. Witsenhausen H.S.: A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. IEEE trans. on automatic control, 11(2), pp. 161-67,1966
15. Yoshizwa T.: Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo, The Math. Soc. of Japan, 1966

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Mikołaj Buśłowicz

Abstract

Multiple Lyapunov function is used to analyze the stability for dynamic systems, especially for hybrid systems in the situation when it's not possible to use one common Lyapunov function. For computational problems of the control theory and of the theory of the dynamical systems multiple Lyapunov function defined by approximation is used. This paper presents applications of multiple piecewise linear Lyapunov functions in the stability analysis of the hybrid dynamical systems. An example is demonstrated for hybrid system with the common state space region. The proposed multiple method proves stability of the system when other methods cannot be used. Simulation results prove the quality of the proposed method. Presented method could be successfully adopted for investigating other hybrid non-linear parameter varying dynamical systems.