

Dariusz SZEWCZYK  
Urząd Miejski w Kaletach

## OPTYMALNE ROZMIESZCZENIE CZUJNIKÓW POMIAROWYCH DLA LINIOWEGO UKŁADU O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiony został problem optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych dla liniowego układu o parametrach rozłożonych opisanego równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego ze znanymi wartościami własnymi oraz funkcjami własnymi. Przedstawiony jest również sposób wyznaczenia przybliżenia warunku początkowego.

## THE OPTIMUM EXPERIMENTAL DESIGN PROBLEM FOR LINEAR DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

**Summary.** The optimum experimental design problem for linear distributed parameter systems described by linear parabolic equations with known eigenfunctions and eigenvalues is considered. The approach, based on appropriate optimization techniques, shows how to construct and determine the initial state.

### 1. Wstęp

Procesy opisane liniowymi parabolicznymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi z różnego typu warunkami brzegowymi są układami dynamicznymi, których stan zależy nie tylko od czasu, ale również od zmiennych przestrzennych. Bardzo ważnym zagadnieniem z punktu widzenia teorii sterowania jest kompletna wiedza na temat stanu takiego systemu, jednak dysponując jedynie określoną ilością czujników pomiarowych nie można określić stanu systemu w dowolnym punkcie przestrzeni. W tym przypadku konieczne jest określenie początkowego stanu systemu o parametrach rozłożonych na podstawie wyników pomiarów z odpowiednio rozmieszczonych czujników. Pojawia się tutaj problem lokalizacji czujników pomiarowych w przestrzeni.

W ogólnym przypadku wyznaczenie początkowego stanu układu dysponując danymi z czujników pomiarowych jest trudne, ponieważ rozwiązanie parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego jest przedstawione w postaci szeregu nieskończonego.

Zaproponowany sposób wyznaczenia stanu początkowego układu polega na założeniu określonej postaci warunku początkowego:

$$w(0) = \sum_{k=1}^n \beta_k w_k(0),$$

gdzie  $w_k(0)$  – składowa warunku początkowego.

Postać składowych warunku początkowego  $w_k(0)$  powinna zapewnić rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego w postaci sumy skończonej. Wtedy na podstawie danych pomiarowych z odpowiednio rozmieszczonych czujników można dokonać estymacji parametrów  $\beta_k$ , wyznaczając jednocześnie aproksymacyjnie warunek początkowy  $w(0)$ . Składowe  $w_k(0)$  powinny jednocześnie umożliwić przybliżenie warunku początkowego, co może być zapewnione poprzez przyjęcie odpowiednio dużej liczby  $n$  funkcji składowych  $w_k(0)$ ,  $k=1, \dots, n$ . Przy doborze tych funkcji można również wykorzystać dostępne informacje o konkretnym procesie technologicznym, dla którego wyznaczamy warunek początkowy.

Nowym aspektem w niniejszej publikacji jest propozycja metody doboru składowych  $w_k(0)$  tak, aby w prosty sposób wyznaczyć optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych, bez konieczności stosowania skomplikowanych numerycznie metod. Dla wyznaczonego w ten sposób przybliżenia warunku początkowego otrzymujemy jednocześnie postać rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego w postaci sumy skończonej, co pozwala na analityczne określenie stanu układu  $w(t, x)$  dla dowolnych parametrów czasowych  $t$  i przestrzennych  $x$ . Przybliżenie warunku początkowego powoduje jednocześnie uzyskanie przybliżonej postaci rozwiązania równania różniczkowego. Dokładność tego przybliżenia oraz jego wpływ na sterowanie obiektem zależą od ilości składowych zawartych w założonym warunku początkowym oraz odpowiedniego ich doboru. Zagadnienia te zostaną zbadane i przedstawione w odrębnej publikacji.

## 2. Opis systemu

Niech  $X$  oznacza ograniczoną dziedzinę 2-wymiarowej przestrzeni. (W niniejszej publikacji rozważany będzie obszar prostokąta o bokach długości  $a$ ,  $b$ ).  $S$  jest brzegiem obszaru  $X$ . Wektor współrzędnych przestrzennych oznaczamy  $x=(x_1, x_2)$ .

Rozważmy liniowe paraboliczne równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \Delta w(t, x) - q(x)w(t, x), \quad (1)$$

gdzie  $t$  – czas, a  $\Delta$  oznacza Laplasian dany wzorem:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2}$$

Załóżmy, że  $q(x)$  jest ciągłą funkcją określoną dla  $x \in \bar{X} (\bar{X} = X \cup S)$ . Równania różniczkowe tego typu opisują wiele typowych układów dynamicznych o parametrach rozłożonych stosowanych praktycznie.

## 2.1. Warunki początkowe i brzegowe

Warunki początkowe dla równania (1) dane są wzorem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t, x) = w_0(x) \quad w_0(x) = w(0) \in L^2(X),$$

gdzie  $L^2(X)$  oznacza przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem w obszarze  $X$ . W ogólnym przypadku warunki brzegowe można opisać równaniem:

$$\alpha(\zeta)w(t, \zeta) + (1 - \alpha(\zeta))\frac{\partial w(t, \zeta)}{\partial \nu} = 0, \quad (2)$$

gdzie  $\zeta \in S$ , a funkcja  $\alpha(\zeta)$  należy do klasy  $C^2$  oraz spełnia warunek:

$$0 \leq \alpha(\zeta) \leq 1$$

$\nu$ -wektor normalny do brzegu  $S$ .

## 2.2. Funkcje własne i wartości własne

Z równaniem różniczkowym cząstkowym (1) można związać nieograniczony liniowy operator różniczkowy  $A$  zdefiniowany następująco [1]:

$$Aw(x) = \Delta w(x) - q(x)w(x)$$

Dziedzina  $D(A)$  operatora  $A$  jest postaci:

$$D(A) = \left\{ w(x) \in L^2(X), \Delta w(x) - q(x)w(x) \in L^2(X), \alpha(\zeta)w(t, \zeta) + (1 - \alpha(\zeta))\frac{\partial w(t, \zeta)}{\partial \nu} = 0 \right\}$$

Dla operatora  $A$  definiuje się funkcje własne  $w_i(x)$   $i=1, 2, 3, \dots$

oraz wartości własne  $s_i$   $i=1,2,3\dots$ , dla których układ równań liniowych

$$Aw_i(x) = s_i w_i(x) \quad i=1,2,3\dots$$

ma niezerowe rozwiązania  $w_i(x) \neq 0$ .

Zbiór wszystkich wartości własnych operatora  $A$   $\{s_i \ i=1,2,3\dots\}$  nazywa się widmem punktowym operatora  $A$  i oznacza  $\sigma_p(A)$ . Każdej wartości własnej  $s_i$   $i=1,2,3\dots$  odpowiada układ funkcji własnych:

$$\{w_{i1}(x), w_{i2}(x), \dots, w_{im_i}(x)\},$$

gdzie  $m_i < \infty$  jest krotnością wartości własnej  $s_i$ .

### 3. Rozwiązanie równania i dobór postaci warunku początkowego

Wiadomo, że przypadek wielokrotnych wartości własnych jest przypadkiem rzadkim, więc dla uproszczenia zakładamy krotności wartości własnych  $m_i=1$ . Używany poniżej podwójny sposób indeksowania  $ij$  oraz  $kl$  wynika z założonej dwuwymiarowej przestrzeni  $X$ . Wtedy rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi (2) można przedstawić w postaci:

$$w(t, x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \exp(s_{ij}t) \langle w(0), w_{ij} \rangle_X w_{ij}$$

$$\langle w(0), w_{ij} \rangle_X = \alpha_{ij}$$

$\alpha_{ij}$  – współczynniki Fouriera

$w(0) = w_0(x)$  – warunek początkowy

$w_{i,j} = w_{i,j}(x)$  – funkcje własne operatora  $A$

$x = [x_1, x_2]$ .

Przybliżając warunek początkowy  $w(0)$  sumą funkcji własnych  $w_{kl}(x)$  operatora  $A$  z odpowiednimi współczynnikami  $\beta_{kl}$  w następujący sposób:

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_1} \beta_{kl} w_{kl}(0), \quad (3)$$

gdzie:

$$w_{kl}(0) = w_{kl}(0, x)$$

$w_{kl}(0)$  – składowa warunku początkowego odpowiadająca funkcji własnej  $w_{kl}(x)$  operatora  $A$ ,

otrzymujemy:

$$\alpha_{ij} = \int_X w_{ij} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} w_{kl}(0) dx$$

Ponieważ układ funkcji własnych  $w_{ij}$  jest ortogonalny, więc  $\alpha_{ij} \neq 0$  tylko dla  $i=k, j=l$ , otrzymujemy współczynniki  $\alpha_{ij}$  różne od zera tylko dla składowych  $i, j$  odpowiadających indeksom  $k, l$  warunku początkowego  $\beta_{kl} w_{kl}(0)$  (pozbywamy się sumy nieskończonej dla indeksów  $i, j$ ). Oznaczając:

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \int_X w_{kl} w_{kl}(0) dx$$

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \alpha'_{kl}$$

$$\alpha'_{kl} = \int_X w_{kl} w_{kl}(0) dx$$

w zależności od ilości przyjętych składowych  $n_k, n_l$ , w warunku początkowym  $w(0)$  odpowiedź układu (1) można przedstawić w postaci liniowej ze względu na parametry  $\beta_{kl}$ :

$$w(t, x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{kl} \alpha'_{kl} w_{kl}(x_1, x_2) \exp(s_{kl} t) \tag{4}$$

#### 4. Estymacja parametrów $\beta$

W przypadku liniowego względem wektora parametrów  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^T$  modelu odpowiedzi układu (1) opisanego wzorem (4) proces obserwacji można zapisać w postaci:

$$z(x, t) = F^T(x, t) \beta + \varepsilon(x, t), \quad t \in [0, t_f] \quad x = [x_1, x_2],$$

gdzie:

$z(x, t) = [z(x^1, t), \dots, z(x^N, t)]^T$  – wektor sygnału z  $N$  czujników,

$\beta$  –  $m$ -wymiarowy wektor parametrów,  $\beta \in R^m$ ,

$\varepsilon(x, t) = [\varepsilon(x^1, t), \dots, \varepsilon(x^N, t)]^T$  – biały szum o zerowej wartości średniej w czasie i kowariancji:

$$E\{\varepsilon(x, t) \varepsilon^T(x', \tau)\} = C(x, x', t) \delta(t - \tau)$$

$\delta$  oznacza deltę Diraca, a macierz  $C(x, t) \in R^{N \times N}$  jest symetryczna i dodatnio określona dla każdego  $t \in T$

$$F(x, t) = [f(x^1, t), \dots, f(x^N, t)]$$

$$f(x^i, t) = [f_1(x^i, t), \dots, f_m(x^i, t)]^T, \quad i=1 \dots N$$

$$f_j(x^i, t) = \alpha'_{kl} w_{kl}(x^i) \exp(s_{kl} t), \quad j=1, 2, \dots, m,$$

indeksy  $k=1 \dots n_k$ ,  $l=1 \dots n_l$  przy warunku  $n_k \cdot n_l = m$ , odpowiadają składowej odpowiadającej indeksom  $kl$  warunku początkowego (3),

$x^1, x^2, \dots, x^N$  oznaczają położenie poszczególnych czujników o wartościach należących do obszaru  $X \subset R^2$ , które przy estymacji parametrów  $\beta$  są znane i ustalone.

Problem estymacji parametrów jest następujący:

Znając historię  $\{F(x, t)\}_{t \in [0, t_f]}$  oraz  $\{z(x, t)\}_{t \in [0, t_f]}$  należy znaleźć spośród wszystkich możliwych wektorów parametrów  $\beta$  taki, który minimalizuje ważne kryterium najmniejszych kwadratów [6,10]:

$$J(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [z(x, t) - F^T(x, t)\beta]^T C^{-1}(x, t)[z(x, t) - F^T(x, t)\beta] dt$$

Rozwiązanie można przedstawić w postaci:

$$\hat{\beta} = \left( \int_0^{t_f} F(x, t) C^{-1}(x, t) F^T(x, t) dt \right)^{-1} \int_0^{t_f} F(x, t) C^{-1}(x, t) z(x, t) dt$$

Wtedy

$$E\{\hat{\beta}\} = \beta$$

oraz

$$\text{cov}\{\hat{\beta}\} = E\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T\} = \left( \int_0^{t_f} F(x, t) C^{-1}(x, t) F^T(x, t) dt \right)^{-1} = M^{-1}$$

$m \times m$  wymiarowa macierz

$$M(x^1, \dots, x^N) = \int_0^{t_f} F(x, t) C^{-1}(x, t) F^T(x, t) dt$$

jest informacyjną macierzą Fishera [5,7,9,10], a jej elementy zależą od lokalizacji czujników.

## 5. Optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych

Macierz  $M$  jest informacyjną macierzą Fishera (FIM), która nie zależy od wektora obserwacji  $z(x, t)$ , lecz od rozmieszczenia czujników pomiarowych  $x^1, x^2, \dots, x^N$ . Problem

optymalizacji polega na „najlepszym” rozmieszczeniu czujników (w sensie  $cov\{\beta\}$ , to znaczy maksymalizującym ilość informacji otrzymanych podczas eksperymentu).

Zadanie polega na takim doborze punktów  $x^1, x^2, \dots, x^N$ , aby zminimalizować pewną założoną skalarną funkcję  $\psi$  [10] bazującą na informacyjnej macierzy Fishera  $M$ . Stąd:

$$\psi[M(x^1, x^2, \dots, x^N)] \rightarrow \min_{x^1, \dots, x^N}$$

Stosując dodatkowe upraszczające założenia:

$$C = \sigma^2 I,$$

gdzie  $I$  jest  $N \times N$  – wymiarową macierzą jednostkową, a  $\sigma$  odgrywa rolę stałego odchylenia standardowego błędów pomiarowych, otrzymujemy następującą postać macierzy FIM:

$$M(x^1, x^2, \dots, x^N) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} F(x^1, x^2, \dots, x^N, t) F^T(x^1, x^2, \dots, x^N, t) dt = \sum_{j=1}^N M_j(x^j),$$

gdzie:

$$M_j(x^j) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} f(x^j, t) f^T(x^j, t) dt$$

Aby zwiększanie ilości punktów pomiarowych  $x^i, i=1, 2, \dots, N$  nie wpływało na macierz  $M(x^1, x^2, \dots, x^N)$ , wprowadzamy przy założeniu  $\sigma = 1$  uśrednioną (znormalizowaną) postać macierzy FIM [6,10]:

$$M(x^1, x^2, \dots, x^N) = \sum_{j=1}^N M_j(x^j) = \frac{1}{N t_f} \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} f(x^j, t) f^T(x^j, t) dt \quad (5)$$

Ponieważ optymalizujemy rozmieszczenie czujników pomiarowych, zastosowanie postaci (5) macierzy FIM jest uzasadnione. Przykładowo umieszczenie w jednym punkcie  $N$  czujników pomiarowych zmieni postać minimalizowanej funkcji  $\psi[M(x^1, x^2, \dots, x^N)]$ , nie będzie jednak prowadzić do osiągnięcia optymalnego rozwiązania. Pozwoli nam to porównywać wskaźnik jakości  $\psi[M(x^1, x^2, \dots, x^N)]$  dla różnych rozmieszczeń oraz różnych ilości punktów pomiarowych.

## 6. Wyznaczanie optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych

Poniżej przedstawione zostaną teoria minimalizacji skalarnej funkcji bazującej na Informacyjnej Macierzy Fishera  $M$  oraz algorytm numeryczny pozwalający w ogólnym przy-

padku wyznaczyć optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych. Zagadnienia te zostały szczegółowo opisane w literaturze [2,3,4,8,10,11], dlatego w niniejszej publikacji przedstawiono je skrótowo.

Wprowadźmy zbiór zmiennych określających rozmieszczenie czujników  $\xi$

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} x^1, x^2, \dots, x^N \\ p_1, p_2, \dots, p_N \end{array} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad p_i > 0,$$

gdzie:

$x^1, x^2, \dots, x^N$  – położenie poszczególnych czujników

$p_1, p_2, \dots, p_N$  – współczynniki wagowe dla poszczególnych czujników

$x^N = (x_1^N, x_2^N)$ .

Przyjęty formalizm zapisu rozmieszczenia czujników pomiarowych  $\xi$  został zastosowany do teorii estymacji projektowania eksperymentu dla układów o parametrach rozłożonych w późnych latach 70. oraz wczesnych 80. Ponieważ niektóre punkty  $x^i$  mogą pojawiać się wielokrotnie w optymalnym rozmieszczeniu, współczynniki wagowe  $p_i$  można interpretować jako procentowy udział punktu  $x^i$  w projektowanym eksperymencie.

Wprowadzenie tak zdefiniowanego rozmieszczenia czujników  $\xi$  pozwala w prosty sposób zapisać znormalizowaną macierz FIM:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x^i, t) f^T(x^i, t) dt$$

## 6.1. Minimalizacja skalarnej funkcji bazującej na Informacyjnej Macierzy

### Fishera $M(\Psi[M(\xi)] \rightarrow \min)$

Użyjemy symbolu  $\Xi(X)$  opisującego przestrzeń wszystkich prawdopodobnych pomiarów w zbiorze  $X$ , to znaczy wszystkich możliwych rozmieszczeń czujników pomiarowych. Istnieje skończona rzeczywista liczba  $q$  taka, że [10]

$$\{\xi : \Psi[M(\xi)] \leq q < \infty\} = \Xi(q) \neq \emptyset$$



Dla każdego  $\xi \in \Xi(q)$  oraz  $\bar{\xi} \in \Xi(X)$  istnieje pochodna kierunkowa [10] zdefiniowana następująco:

$$\delta_+ \Psi [M(\xi), M(\bar{\xi}) - M(\xi)] \stackrel{def}{=} \left. \frac{\partial \Psi [M(\xi) + \lambda(M(\bar{\xi}) - M(\xi))]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że funkcja  $\Psi$  jest różniczkowalna względem poszczególnych elementów macierzy *FIM*, pochodną kierunkową można zapisać w postaci [10] :

$$\begin{aligned} \delta_+ \Psi [M(\xi), M(\bar{\xi}) - M(\xi)] &= \int_X \left\{ \text{trace}[\dot{\Psi}(\xi)Y(x)] - \text{trace}[\dot{\Psi}(\xi)M(\xi)] \right\} \bar{\xi}(dx) \\ &= \int_X \{c(\xi) - \phi(x, \xi)\} \bar{\xi}(dx), \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\xi) &= \left. \frac{\partial \Psi(M)}{\partial M} \right|_{M=M(\xi)} \\ Y(x) &= \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x, t) f^T(x, t) dt \end{aligned}$$

Macierz  $Y(x)$  można interpretować jako macierz *FIM* określoną dla pojedynczego czujnika zlokalizowanego w punkcie  $x \in X$ .

Metoda iteracyjna polega na dodawaniu do zbioru czujników pomiarowych  $\xi_k$ , wyznaczonych w  $k$ -tej iteracji, kolejnego punktu pomiarowego zdefiniowanego jako pomiaru skoncentrowanego w punkcie  $x \in X$  [10]. W tej sytuacji użyte poniżej oznaczenie  $\xi$  można interpretować jako rozmieszczenie czujników w  $k$ -tej iteracji, a  $x$  jako rozmieszczenie skoncentrowane w pojedynczym punkcie  $x \in X$ . Oznaczając

$$\psi(x, \xi) = c(\xi) - \phi(x, \xi),$$

gdzie:

$c(\xi) = -\text{trace}[\dot{\Psi}(\xi)M(\xi)]$  – zależy od aktualnego rozmieszczenia  $\xi$ ,

$\phi(x, \xi) = -\text{trace}[\dot{\Psi}(\xi)Y(x)] = -\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f^T(x, t) \dot{\Psi}(\xi) f(x, t) dt$  – funkcja czułości zależy od aktu-

alnego rozmieszczenia czujników  $\xi$  oraz od zmiennej  $x \in X$ , którą można również interpretować jako rozmieszczenie skoncentrowane w pojedynczym punkcie  $x \in X$ .

Dla optymalnego rozmieszczenia czujników  $\xi^*$  [10] uzyskujemy:

$$\min_{x \in X} \psi(x, \xi^*) = 0$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następująco zdefiniowaną funkcję  $\Psi [M(\xi)]$  (kryterium D-optymalne):

$$\Psi [M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$$

Kryterium D-optymalne jest niezmiennicze względem zmiany skali parametrów oraz liniowej transformacji wyjścia czujników [10], a ponadto:

$$\dot{\Psi}(\xi) = \frac{\partial \Psi(M)}{\partial M} \Big|_{M=M(\xi)} = - \frac{\partial \ln \det(M)}{\partial M} \Big|_{M=M(\xi)} = - \frac{1}{\det(M)} \frac{\partial \det(M)}{\partial M} \Big|_{M=M(\xi)} = -M^{-1}(\xi),$$

ponieważ

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (M^D)^T,$$

$M^D$  – dopełnienie algebraiczne macierzy  $M$  oraz

$$\frac{\partial \det(M)}{\partial M} = M^D = (M^D)^T$$

( $M$  jest macierzą symetryczną). Wtedy zachodzą następujące równości:

$$\phi(x, \xi) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f^T(x, t) M^{-1}(\xi) f(x, t) dt$$

$$c(\xi) = m$$

$m$ -wymiar wektora parametrów  $\beta$

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(x^i, t) f^T(x^i, t) dt$$

W ogólnym przypadku algorytm wyznaczania optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych [4,8,10,11] polega na dodawaniu w  $k$ -tej iteracji nowego punktu pomiarowego zlokalizowanego w punkcie  $x_k^0 \in X$ , dla którego  $\Psi [M(x_k^0)]$  (oparte na macierzy FIM dla pojedynczego punktu pomiarowego  $x_k^0 = \arg \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$ ) jest optymalne przy uwzględnieniu dotychczasowego rozmieszczenia  $\xi$ . Należy zauważyć, że wprowadzenie tego punktu zmniejszy wskaźnik jakości  $\Psi [M(\xi_{k+1})]$ .

Wprowadzenie funkcji czułości  $\phi(x, \xi)$  oraz funkcji  $c(\xi)$ , dzięki której możemy określić warunek zatrzymania iteracji, umożliwia nam stosowanie takiej procedury.

Ponieważ warunek początkowy jest przybliżony przez sumę skończoną odpowiednio dobranych funkcji własnych, które są funkcjami harmonicznymi, optymalne rozmieszczenie czujników pomiarowych znajduje się w punktach odpowiadających ekstremom warunku początkowego lub punktom siodłowym. Z tego powodu nie ma konieczności poszukiwania optymalnego rozmieszczenia z zastosowaniem algorytmu.

Algorytm zostanie zastosowany jedynie do sprawdzenia, czy rozmieszczenie optymalne, uzyskane przez dobranie punktów odpowiadających ekstremom warunku początkowego przy założonych wartościach wszystkich parametrów  $\beta_k=1$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), jest prawidłowe.

Rozmieszczenie czujników wstępnie zostanie przyjęte w punktach odpowiadających ekstremum globalnemu warunku początkowego w obszarze  $X$  oraz punktach do niego symetrycznych względem osi przecinających w odpowiednim podziale wartości  $a$  i  $b$  (zależnym od harmonicznym założonego warunku początkowego) z jednakowymi wagami. Wartości  $a$  i  $b$  stanowią długości boków prostokąta ograniczającego obszar  $X$ .

W przypadku nieuzyskania w ten sposób optymalnego rozmieszczenia należy dokonać wyliczenia funkcji czułości  $\phi(x, \xi)$  i na tej podstawie uzupełnić rozmieszczenie  $\xi$  o dodatkowe punkty, które będą widoczne jako dodatkowe maksima funkcji czułości, mogące odpowiadać np. punktowi siodłowemu warunku początkowego.

W zamieszczonych poniżej przykładach opisany w literaturze algorytm został zastosowany jako sprawdzenie właściwego doboru warunku początkowego, to znaczy, że przyjmując za startowe rozmieszczenie czujników  $\xi_0$  jako punkty dobrane w sposób opisany powyżej, algorytm powinien zakończyć się po jednej iteracji.

Takie podejście do wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia jest możliwe dzięki odpowiedniemu doborowi postaci warunku początkowego jako liniowej kombinacji funkcji własnych. Ułatwia obliczenia oraz skraca czas obliczeń, zaoszczędzając wielokrotnego numerycznego wyznaczania maksimów funkcji czułości. Zachodzi jedynie konieczność wyznaczenia ekstremów oraz punktów siodłowych warunku początkowego przy założeniu wartości wszystkich parametrów  $\beta_k=1$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ).

Poniżej skrótkowo został przedstawiony mechanizm algorytmu poszukiwania optymalnego rozmieszczenia czujników w ogólnym przypadku.

## 6.2. Opis algorytmu

### Krok 1

Wybieramy startowe rozmieszczenie czujników  $\xi_0$ , dla którego  $\det M(\xi_0) \neq 0$  oraz dodatnią liczbę  $\eta < 1$  i ustawiamy  $k=1$ .

### Krok 2

Wyznaczamy  $x_k^0 = \arg \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k)$ .

Jeżeli  $\phi(x_k^0, \xi_k) < c(\xi_k) + \eta$ , wtedy *STOP*.

W dalszych obliczeniach przyjmujemy:

$\psi[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$  – minimalizowana funkcja oparta na FIM.

### Krok 3

Jeżeli warunek stopu w kroku 2 nie jest spełniony, wówczas dla  $0 < \lambda_k < 1$  wyznaczamy nowe rozmieszczenie czujników  $\xi_{k+1} = (1 - \lambda_k)\xi_k + \lambda_k \xi_k^0$ ,

gdzie  $\xi_k^0$  – rozmieszczenie czujników skoncentrowane w punkcie  $x_k^0$ .

Podstawiamy  $k=k+1$  i powracamy do kroku 2.

## 7. Przykład

Układ dynamiczny opisany jest równaniem cząstkowym typu parabolicznego:

$$\frac{\partial w(t, x_1, x_2)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \quad t > 0 \quad (6)$$

gdzie obszar  $X$ , w którym określone równanie (6) jest prostokątem:

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq a \\ 0 \leq x_2 \leq b \end{cases}$$

z zerowymi warunkami brzegowymi Dirichleta

$$\begin{cases} w(t, 0, x_2) = w(t, a, x_2) = 0 \\ w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, b) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

W celu zapewnienia krotności wartości własnych  $m_i=1$  zakładamy, że:

$$a \neq b$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \text{liczba niewymierna}$$

Z równaniem różniczkowym cząstkowym (6) możemy związać nieograniczony operator różniczkowy  $A$  zdefiniowany następująco [1]:

$$Aw(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$$

Dziedzina  $D(A)$  operatora  $A$  jest postaci:

$$D(A) = \left\{ w(x) \in L^2(X), Aw(x_1, x_2) \in L^2(X), \begin{cases} w(t, 0, x_2) = w(t, a, x_2) = 0 \\ w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, b) = 0 \end{cases} \right\}$$

Wartości i funkcje własne operatora  $A$  są postaci [1]:

$$s_{ij} = -\pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \quad i, j = 1, 2, \dots$$

$$w_{ij} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{i\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{j\pi}{b} x_2\right)$$

Włączając współczynnik  $\frac{2}{\sqrt{ab}}$  normalizujący wartości własne  $w_{ij}$  do parametrów  $\beta$  uzyskujemy warunek początkowy w postaci:

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \beta_{kl} w_{kl}(0)$$

$$w_{kl}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} x_2\right),$$

zatem

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \beta_{kl} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} x_2\right)$$

Wtedy rozwiązanie równania różniczkowego (6) jest postaci:

$$w(t, x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \beta_{kl} \alpha_{kl} w_{kl}(x_1, x_2) \exp(s_{kl} t) \quad (8)$$

Wykorzystując dostępne informacje o konkretnym procesie technologicznym, który jest opisany równaniem różniczkowym cząstkowym (1), można zmodyfikować postać warunku początkowego  $w(0)$  pomijając niektóre składniki sumy określonej przez równanie (3). Powoduje to analogiczną zmianę postaci rozwiązania równania (6) określonego wzorem (8).

Postępując w ten sposób zmniejszamy wymiar wektora  $\beta \in R^m$ . Dokładność tego przybliżenia oraz jego wpływ na sterowanie obiektem zależą od ilości składowych zawartych w założonym warunku początkowym oraz odpowiednim ich doborze. Zagadnienia te zostaną zbadane i przedstawione w odrębnej publikacji.

Uwzględniając postać rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego określone wzorem (8), obserwację dla pojedynczego punktu pomiarowego można zapisać następująco:

$$z^i(t) = f(x^i, t)^T \beta + \varepsilon(t), \quad i=1, \dots, N,$$

gdzie:

$$f(x^i, t) = [\alpha'_{kl} w_{kl}(x^i) \exp(s_{kl} t), \dots]^T = [f_{kl}(x^i, t), \dots]^T \quad x = [x_1, x_2]$$

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} w_{kl}(x_1, x_2) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} x_2\right) dx_1 dx_2$$

$$\alpha_{kl} = \beta_{kl} \alpha'_{kl}$$

Elementy  $m$  – wymiarowego wektora  $f(x^i, t)$  z indeksami  $k$  oraz  $l$  odpowiadają wybranym indeksom rozwiązania równania (6) określonego wzorem (8) oraz warunku początkowego zapisanego w ogólnej postaci następująco:

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \beta_{kl} w_{kl}(0)$$

Obliczenia przeprowadzono dla parametrów:

$$a = \pi$$

$$b = 1$$

$$t_f = 0.1$$

$$\eta = 0.02 \text{ – warunek stopu.}$$

Rozmieszczenie czujników  $\xi_0$  wstępnie zostało przyjęte w punktach odpowiadających ekstremum globalnemu warunku początkowego w obszarze  $X$  oraz punktach do niego symetrycznych względem osi przecinających w połowie wartości  $a$  oraz  $b$  (które stanowią długości boków prostokąta ograniczającego obszar  $X$ ) z jednakowymi wagami.

W ten sposób wyznaczony punkt startowy  $\xi_0$  jest rozmieszczeniem optymalnym, jeżeli algorytm zostanie zakończony po 1 iteracji.

W przypadku niezyskania w ten sposób optymalnego rozmieszczenia należy dokonać wyznaczenia funkcji czułości  $\phi(x, \xi)$  i na tej podstawie należy uzupełnić rozmieszczenie  $\xi$  o

dotatkowe punkty, które będą widoczne jako dodatkowe maksima funkcji czułości, mogące odpowiadać np. punktowi siódłowemu warunkowi początkowego.

### 7.1. Obliczenia

W celu uproszczenia formy zapisu model warunku początkowego można przedstawić jako zbiór wybranych indeksów  $k$  oraz  $l$  funkcji własnych wykorzystanych przy jego tworzeniu. Niech

a)  $(k,l)=\{(1,1);(1,2)\}$

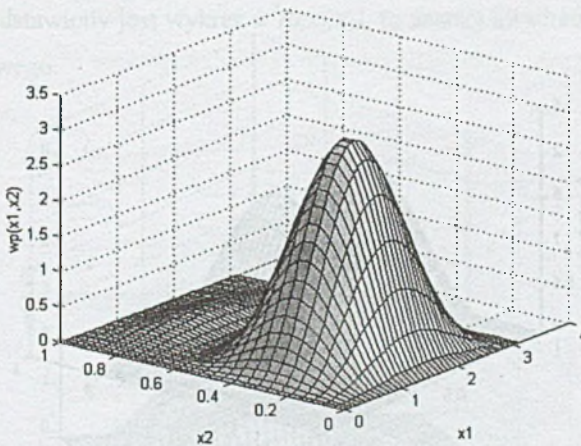
Wtedy

$$w(0, x_1, x_2) = \beta_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} x_2\right) + \beta_{12} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} x_2\right)$$

$$\beta = [\beta_{11}, \beta_{12}]^T$$

$$f(x^i, t) = [f_{11}(x^i, t), f_{12}(x^i, t)]^T \quad x^i = [x_1^i, x_2^i]$$

Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres  $w^2(0, x_1, x_2)$ , to znaczy kwadratu założonego modelu warunku początkowego.



Rys. 1. Wykres  $w^2(0, x_1, x_2)$

Fig. 1. Graph of  $w^2(0, x_1, x_2)$

Wyznaczone numerycznie ekstrema  $w^2(0, x_1, x_2)$  znajdują się w punktach:

$x^1 = [1.5708 \ 0.2979]$  – ekstremum globalne  $w^2(0, x^1) = 3,0982$

$x^2 = [1.5708 \ 0.8192]$  – ekstremum lokalne  $w^2(0, x^2) = 0,1362$

Przyjmując za  $\xi_0$  punkt odpowiadający ekstremum globalnemu oraz do niego symetryczny względem osi przecinającej w połowie długości  $a$  obszar  $X$  (tak jak opisano wyżej), z jednakowymi wagami, otrzymujemy:

$$\xi_0 = \left\{ \begin{array}{cc} (1.5707; 0.2979) & (1.5707; 0.7020) \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right\}$$

oraz:

$\eta=0.02$  – warunek stopu (w naszym przypadku poprawności wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia).

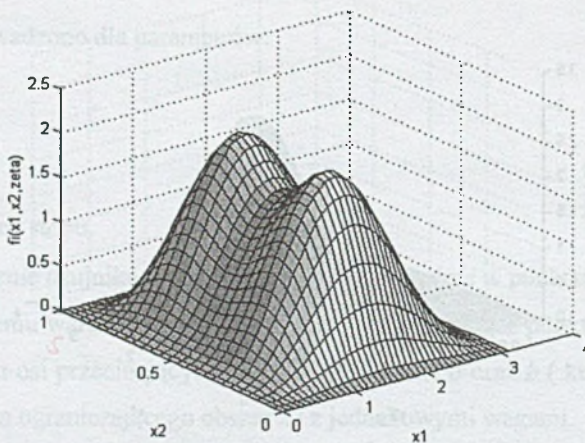
Stąd otrzymujemy następujące wskaźniki:

1) maksimum globalne funkcji czułości  $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_k) = 2.0033405$ ,

2)  $\Psi [M(\xi)] = -\ln \det M(\xi_0) = 3.4887784$ .

Warunek stopu  $\eta=0.02(c(\xi_k)=2)$  został spełniony przy pierwszej iteracji, więc można uznać  $\xi_0$  za rozmieszczenie optymalne.

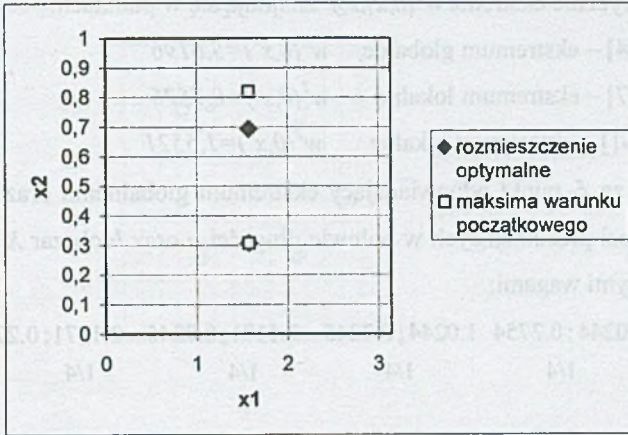
Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_0$  (rys.2) oraz graficznie przedstawiono punkty odpowiadające  $\xi_0$  oraz ekstremom  $w^2(0, x_1, x_2)$  (rys. 3).



Rys. 2. Funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_0$

Fig. 2. Sensitivity function for the design  $\xi_0$





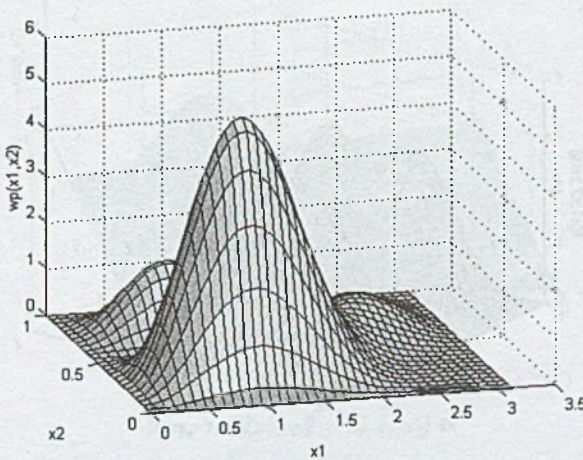
Rys. 3. Rozmieszczenie ekstremów warunku początkowego oraz punktów odpowiadających rozmieszczeniu optymalnemu

Fig. 3. Extremum of the initial condition and the optimal design

b)  $(k,l)=\{(1,1);(1,2);(2,2)\} \rightarrow$

$$w(0, x_1, x_2) = \beta_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} x_2\right) + \beta_{12} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} x_2\right) + \beta_{22} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} x_2\right)$$

Na rysunku 4 przedstawiony jest wykres  $w^2(0, x_1, x_2)$ , to znaczy kwadratu założonego modelu warunku początkowego.



Rys. 4. Wykres  $w^2(0, x_1, x_2)$

Fig. 4. Graph of  $w^2(0, x_1, x_2)$

Wyznaczone numerycznie ekstrema  $w^2(0, x_1, x_2)$  znajdują się w punktach:

$$x^1 = [1.0244 \quad 0.2754] - \text{ekstremum globalne} \quad w^2(0, x^1) = 5,6196$$

$$x^2 = [2.3390 \quad 0.6507] - \text{ekstremum lokalne} \quad w^2(0, x^2) = 0,7526$$

$$x^3 = [0.8428 \quad 0.7761] - \text{ekstremum lokalne} \quad w^2(0, x^3) = 1,5521$$

Przyjmując za  $\xi_0$  punkt odpowiadający ekstremum globalnemu oraz do niego symetryczne względem osi przecinających w połowie długości  $a$  oraz  $b$  obszar  $X$  (tak jak opisano wyżej), z jednakowymi wagami:

$$\xi_0 = \left\{ \begin{array}{cccc} 1.0244; 0.2754 & 1.0244; 0.7245 & 2.1171; 0.7245 & 2.1171; 0.2754 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right\}$$

oraz:

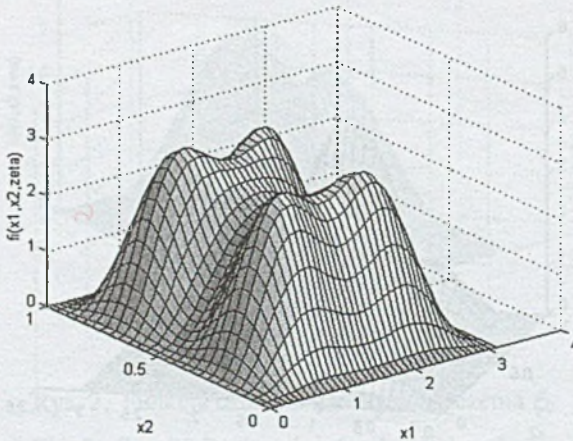
$\eta = 0.02$  – warunek stopu, (w naszym przypadku poprawności wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia). Stąd otrzymujemy następujące wskaźniki:

1) maksimum globalne funkcji czułości  $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_k) = 3.0181$ ,

2)  $\Psi [M(\xi)] = -\ln \det M(\xi_0) = 6.5537181$ .

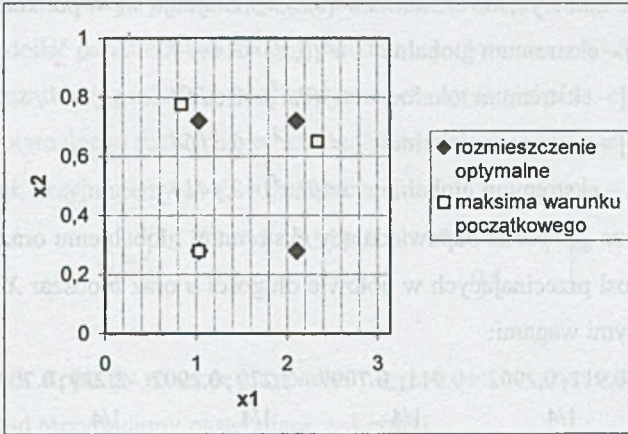
Warunek stopu  $\eta = 0.02$  ( $c(\xi_k) = 3$ ) został spełniony przy pierwszej iteracji, więc można uznać  $\xi_0$  za rozmieszczenie optymalne.

Na rysunkach 5 i 6 przedstawiono funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_0$  (rys. 5) oraz graficznie przedstawiono punkty odpowiadające  $\xi_0$  oraz ekstremom  $w^2(0, x_1, x_2)$ , (rys. 6).



Rys. 5. Funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_0$

Fig. 5. Sensitivity function for the design  $\xi_0$

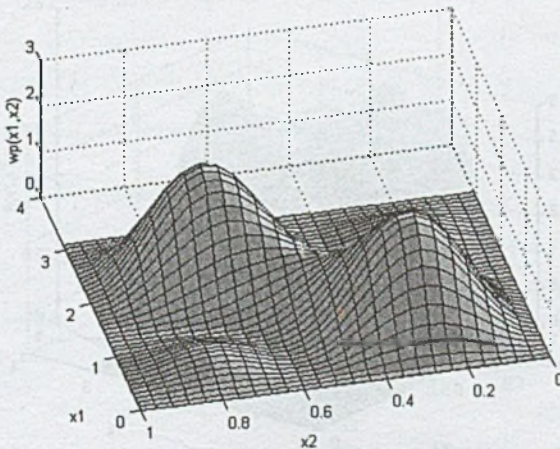


Rys. 6. Rozmieszczenie ekstremów warunku początkowego oraz punktów odpowiadających rozmieszczeniu optymalnemu

Fig. 6. Extremum of the initial condition and the optimal design

c)  $(k,l) = \{(1,1); (2,2)\} \rightarrow w(0, x_1, x_2) = \beta_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} x_2\right) + \beta_{22} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} x_2\right)$

Na rysunku 7 przedstawiony jest wykres  $w^2(0, x_1, x_2)$ , to znaczy kwadratu założonego modelu warunku początkowego.



Rys. 7. Wykres  $w^2(0, x_1, x_2)$

Fig. 7. Graph of  $w^2(0, x_1, x_2)$

Wyznaczone numerycznie ekstrema  $w^2(0, x_1, x_2)$  znajdują się w punktach:

$$x^1 = [0.911 \quad 0.2902] - \text{ekstreмум globalne} \quad w^2(0, x^1) = 2,4414$$

$$x^2 = [2.482 \quad 0.2097] - \text{ekstreмум lokalne} \quad w^2(0, x^2) = 0,3164$$

$$x^3 = [0.659 \quad 0.7902] - \text{ekstreмум lokalne} \quad w^2(0, x^3) = 0,3164$$

$$x^4 = [2.229 \quad 0.7097] - \text{ekstreмум globalne} \quad w^2(0, x^4) = 2,4414$$

Przyjmując za  $\xi_0$  punkt odpowiadający ekstreмумu globalnemu oraz do niego symetryczne względem osi przecinających w połowie długości  $a$  oraz  $b$  obszar  $X$  (tak jak opisano wyżej), z jednakowymi wagami:

$$\xi_0 = \left\{ \begin{array}{cccc} 0.911; 0.2902 & 0.911; 0.7097 & 2.229; 0.2902 & 2.229; 0.7097 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right\}$$

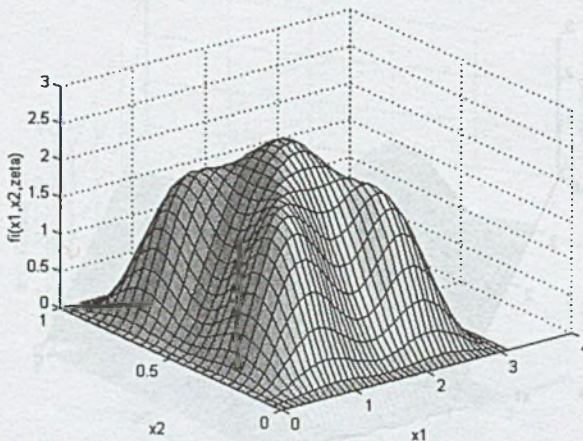
oraz:

$\eta = 0.02$  – warunek stopu (w naszym przypadku poprawności wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia). Stąd otrzymujemy następujące wskaźniki:

$$1) \text{ maksimum globalne funkcji czułości } \max_{x \in X} \phi(x, \xi_k) = 2.5599908,$$

$$2) \Psi[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi_0) = 4.1001268.$$

Warunek stopu  $\eta = 0.02$  ( $c(\xi_k) = 2$ ) nie został spełniony przy pierwszej iteracji, więc dokonujemy wyznaczenia funkcji czułości  $\phi(x, \xi_0)$  (rys. 8).



Rys. 8. Funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_0$

Fig. 8. Sensitivity function for the design  $\xi_0$

Na podstawie funkcji czułości  $\phi(x, \xi_0)$  można zauważyć, że do rozmieszczenia optymalnego należy dodać punkt odpowiadający punktowi siodłowemu  $x=[1.5708 \ 0.5]$ . Ponieważ warunek początkowy posiada dwa symetryczne ekstrema globalne, można zmniejszyć ilość punktów optymalnego rozwiązania (redukując odpowiadające jednemu z ekstremów) sumując ich wagi. Przyjmujemy za  $\xi_1$  rozmieszczenie:

$$\xi_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1.5708; 0.5 & 0.911; 0.290 & 0.911; 0.709 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\}$$

oraz:

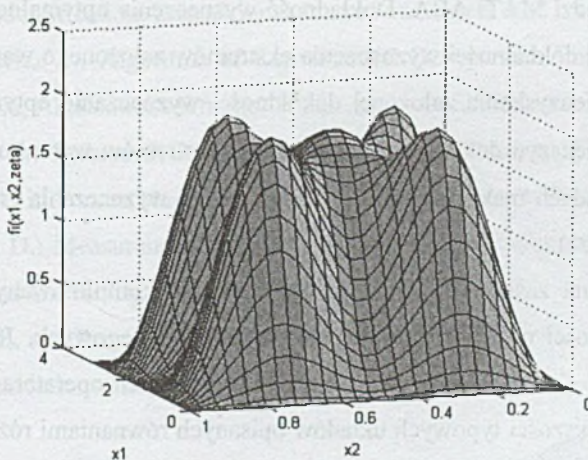
$\eta=0.02$  – warunek stopu (w naszym przypadku poprawności wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia). Stąd otrzymujemy następujące wskaźniki:

1) maksimum globalne funkcji czułości  $\max_{x \in X} \phi(x, \xi_k) = 2.0139331$ ,

2)  $\Psi [M(\xi)] = -\ln \det M(\xi_1) = 4.0517190$ .

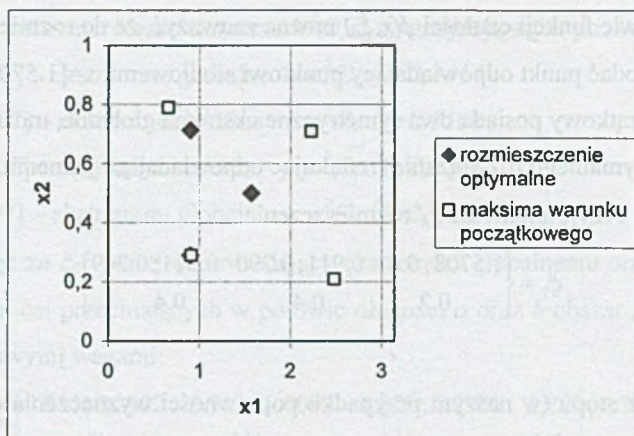
Warunek stopu  $\eta=0.02$  ( $c(\xi_k)=2$ ) został spełniony przy pierwszej iteracji, więc można uznać  $\xi_1$  za rozmieszczenie optymalne.

Na rysunkach 9 i 10 przedstawiono funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_1$  (rys.9) oraz graficznie przedstawiono punkty odpowiadające  $\xi_1$  oraz ekstremom  $w^2(0, x_1, x_2)$  (rys. 10).



Rys. 9. Funkcje czułości dla rozmieszczenia  $\xi_1$

Fig. 9. Sensitivity function for the design  $\xi_1$



Rys. 10. Rozmieszczenie ekstremów warunku początkowego oraz punktów odpowiadających rozmieszczeniu optymalnemu

Fig. 10. Extremum of the initial condition and the optimal design

## 8. Wnioski

W przedstawionych przykładach obliczenia numeryczne zostały dokonane za pomocą standardowych narzędzi MATLABA. Dokładność wyznaczenia optymalnego rozmieszczenia czujników zależy od dokładności wyznaczenia ekstremów założonego warunku początkowego. W przypadku nieuzyskania założonej dokładności wyznaczania optymalnego rozmieszczenia  $\eta$  należy zwiększyć dokładność wyznaczenia ekstremów warunku początkowego (w powyższych przykładach maksymalny błąd bezwzględny wyznaczania zmiennych niezależnych  $x$  wynosił 0.0001).

Metodę można zastosować również dla bardziej skomplikowanych obszarów  $X$  o większej wymiarowości oraz dla mieszanych warunków brzegowych. Jedynym ograniczeniem jest znajomość funkcji własnych oraz wartości własnych operatora różniczkowego  $A$ , które jednak dla większości typowych układów opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi są wyznaczone i stabilaryzowane [1].

Ponadto należy podkreślić, że przedstawiona metoda pozwala szybko znaleźć optymalne rozmieszczenie. Dla różnych kombinacji modelu warunku początkowego rozmieszczenia te można łatwo stabilaryzować.

Przybliżenie warunku początkowego powoduje jednocześnie uzyskanie przybliżonej postaci rozwiązania równania różniczkowego. Dokładność tego przybliżenia oraz jego wpływ na sterowanie obiektem zależą od ilości składowych zawartych w założonym warunku początkowym oraz odpowiedniego ich doboru. Zagadnienia te zostaną zbadane i przedstawione w odrębnej publikacji.

## LITERATURA

1. Butkowskij A.G.: Charakteristiki sistem s raspriedielennymi parametrami, Nauka, Moskwa 1979
2. Emarkov S.M.: Mathematical Theory of Experimental Design, Nauka, Moskov 1983
3. Fedorov V.V. :Theory of Optimal Experiments, Academic Press, New York 1972
4. Fedorov V.V. and Hackl P.:Model-oriented Design of Experiments, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York 1997
5. Mańczak K.: Technika planowania eksperymentu, WNT, Warszawa 1976
6. Piotrowski J.: Procedury pomiarowe i estymacja sygnałów, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1994
7. Rafajłowicz E.: Optimum choice of moving sensor trajectories for distributed parameter system identification, International Journal of Control 43(5): 1441-1451, 1986
8. Rafajłowicz E.: Algorithms of Experimental Design with Implementations in MATHEMATICA, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996
9. Sun N. Z.: Inverse Problems in Groundwater Modeling, Theory and Applications of Transport in Porous Media, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994
10. Uciński D.: Measurement optimization for parameter estimation in distributed systems, Technical University Press, Zielona Góra 1999
11. Walter E. and Pronzato L.: Identification of Parametric Models from Experimental Data, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, Berlin 1997

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

## Abstract

One of main purposes of control systems is the determination of the system state functions. In order to construct feedback control for an optimal control problem or for a stability problem, the complete knowledge about the state functions is required. But the state functions may not be directly measurable, and often is it possible to obtain only some other observations. Therefore the system state function should be determined from the measured data. This problem is very important from theoretical and practical point of view for theory of control systems.

The system state function can be uniquely determined from the initial state, therefore determination of the initial state from the known observed measured data assures determination of the state function.

Distributed parameter systems are dynamical system whose state depends not only on time but also on spatial coordinates. Appropriate mathematical modeling of distributed parameter systems yields most often partial differential equations.

The inability to take distributed measurements of process states leads to the question where to locate sensors so that the information content of the resulting signals with respect to the distributed state and partial differential equations model be as high as possible. This is an appealing problem since in most applications these locations of sensors is not necessarily dictated by physical considerations or by intuitions and, therefore, some systematic approaches should still be developed in order to reduce the cost of instrumentation and to increase the efficiency of identifiers.

In this paper we consider a class of distributed parameter systems described by linear parabolic equations with known eigenfunctions and eigenvalues. The approach, based on appropriate optimization techniques, shows how to construct the initial state.

The proposed method consist in assumption of definite form of the initial condition:

$$w(0) = \sum_{k=1}^n \beta_k w_k(0)$$

where  $w_k(0)$ - component of initial condition

Form of the initial condition  $w_k(0)$  should assure solution differential partial equation in the form of finite series. Then on the basis of results of measurements from suitably disposed sensors is possible execute the estimation of parameters  $\beta_k$ , simultaneously calculate approximate the initial condition  $w(0)$ .