

Eugeniusz MAJZA

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Śląskiej

PROBABILISTYCZNA METODA KOMPOZYCJI WYKRESÓW UPORZĄDKOWANYCH

Streszczenie. Przedmiotem rozważań jest kompozycja wykresów uporządkowanych. Zastosowano metodę probabilistyczną opartą na metodzie Monte Carlo. Porównano wyniki obliczeń ze stosowaną dotychczas metodą różnicową.

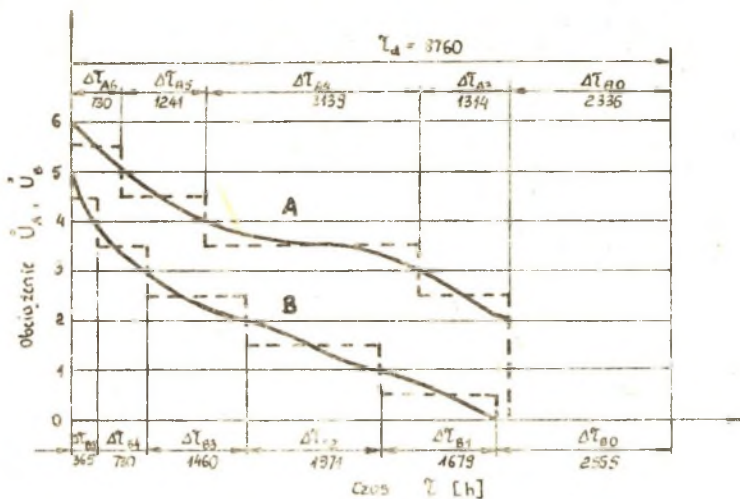
1. Sformułowanie problemu

Stosowana dotychczas różnicowa metoda kompozycji wykresów uporządkowanych polega na naniesieniu siatki podziału różnicowego na wykresy składowe. Siatka podziału różnicowego dzieli wykresy uporządkowane na paski o jednakowej szerokości $\Delta \tilde{U}$. Poszczególnym paskom przyporządkowuje się numer równy większej z wartości ograniczającej. Każdemu paskowi odpowiada na obu wykresach pewien odcinek czasu $\Delta \tilde{t}$. Wykres uporządkowany zastępuje się linią schodkową, przyjmując że w i -tym pasku obciążenie wynosi $(i - 0,5) \Delta \tilde{U}$. [3]. Na rys. 1 przedstawiono przykładowy podział różnicowy uporządkowanych wykresów obciążeń urządzeń A i B.

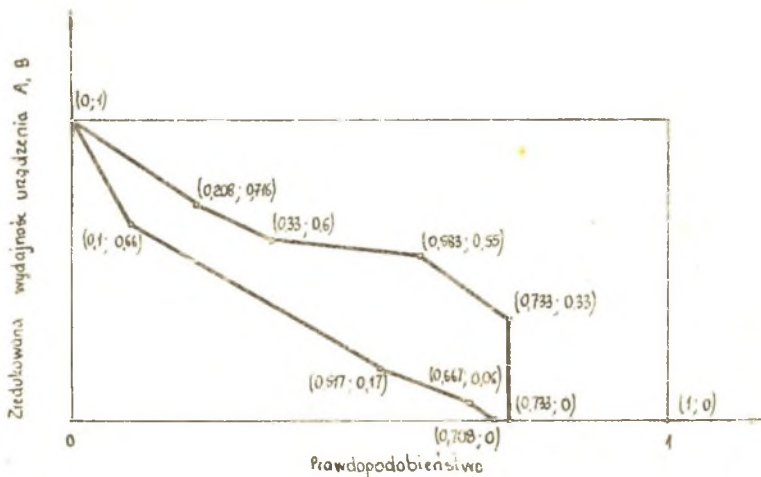
W probabilistycznej metodzie kompozycji wykresów uporządkowanych dokonujemy podziału wykresów na paski o różnej szerokości. W obrębie każdego paska linearyzuje się przebieg wykresu uporządkowanego. W skali osi odciętych wprowadza się bezwymiarowy czas \tilde{t}/\tilde{t}_d spełniający rolę prawdopodobieństwa [1]. Na rys. 2 przedstawiono linearyzację wykresów obciążeń urządzeń A i B.

2. Zastosowanie metody Monte Carlo do kompozycji wykresów uporządkowanych

Zagadnienie kompozycji wykresów uporządkowanych można sprowadzić do algebraicznego dodawania lub odejmowania odpowiednich współrzędnych wykresów uporządkowanych. Wartości obciążeń są losowane z wykresów uporządkowanych za pomocą metody Monte Carlo. Dla losowania wartości wydajności U_1 z 1-tego wykresu uporządkowanego zastosowano metodę odwróconej transformacji.



Rys. 1. Uporządkowany wykres obciążeń urządzeń A i B
 Fig. 1. Ordered graph of loadings for instruments A and B



Rys. 2. Linearyzacja wykresów obciążeń urządzeń A i B
 Fig. 2. Linearization of graphs of loadings for instruments A and B

Wychodząc z równania

$$F(\hat{U}_1) = P(\hat{U}_1 < \hat{U}_{1n}) = r_{1n} \quad (1)$$

lub

$$F(\hat{U}_1) = 1 - P(\hat{U}_1 > \hat{U}_{1n}) = r_{1n} \quad (2)$$

otrzymuje się

$$\hat{U}_{1n} = P^{-1}(1 - r_{1n}) \quad (3)$$

gdzie:

\hat{U}_{1n} - wartość wydajności wylosowana w n-tym losowaniu z l-tego wykresu uporządkowanego,

r_{1n} - n-ta prognoza liczby pseudolosowej r dla l-tego wykresu,

P - prawdopodobieństwo.

Po zastąpieniu dystrybuanty rozkładu niejednostajnego wykresem uporządkowanym zagadnienie można rozwiązać numerycznie. Po wylosowaniu liczby pseudolosowej r_{1n} dla l-tego wykresu uporządkowanego należy określić numer paska, w którym zawarta jest ta liczba.

Wydajność \hat{U}_{1n} oblicza się wtedy z równania

$$\hat{U}_{1n} = \hat{U}_{1p} + (\hat{U}_{1p+1} - \hat{U}_{1p}) \frac{r_{1p} - r_{1n}}{r_{1p} - r_{1p+1}} \quad (4)$$

gdzie:

r_{1p} - odcięta ograniczająca przedział paska p ,

n - numer wylosowanej liczby pseudolosowej r_{1n} ,

l - numer wykresu uporządkowanego,

\hat{U}_{1p} - maksymalna wydajność w obrębie paska p .

Powtarzając procedurę losowania $l = 1, \dots, L$ razy otrzymuje zbiór wartości obciążzeń urządzeń $\hat{U}_{1n}, \hat{U}_{2n}, \dots, \hat{U}_{Ln}$. W zależności od podstawionego zagadnienia oblicza się wartość wypadkową:

- przy dodawaniu

$$\hat{U}_n = \sum_{l=1}^L \hat{U}_{ln} \quad (5)$$

- przy odejmowaniu

$$\hat{U}_n = \sum_{l_1=1}^{L_1} \hat{U}_{l_1n} - \sum_{l_2=1}^{L_2} \hat{U}_{l_2n} \quad (6)$$

gdzie

$$L_1 + L_2 = L$$

Obliczenia powtarza się dla $n = 1, \dots, N$ prób otrzymując zbiór wartości $\dot{U}_1, \dots, \dot{U}_N$ o jednakowym prawdopodobieństwie $1/N$. Uporządkowanie zbioru wartości $\{\dot{U}_n\}$ stanowi rozwiązanie zagadnienia. Otrzymuje się uporządkowany wykres obciążeń wypadkowych. Dla uporządkowania wykresów obciążeń urządzeń A i B dokonano probabilistycznego dodawania i odejmowania tych wykresów, przy czym indeks "1" dotyczy urządzenia A, zaś indeks "2" dotyczy urządzenia B.

Równania (5) i (6) przyjmują postać:

- przy dodawaniu

$$\dot{U}_n = \dot{U}_{1n} + \dot{U}_{2n} \quad (7)$$

- przy odejmowaniu

$$\dot{U}_n = \dot{U}_{1n} - \dot{U}_{2n} \quad (8)$$

3. Metoda oceny liczby losowań

Dla określenia liczby losowań zastosowano analizę sekwencyjną. Zgodnie z procedurą sekwencyjną dla testowania hipotezy dotyczącej średniej należy przeprowadzić N losowań zestawów liczb pseudolosowych r_{in} ($i = 1, \dots, L$). Po wykonaniu N obliczeń wartości obciążenia wypadkowego \dot{U} otrzymuje się ciąg zmiennych $\dot{U}_1, \dots, \dot{U}_N$ o rozkładzie normalnym z nieznaną wartością średnią μ i wariancją σ^2 .

Dla wyznaczenia procedury sekwencyjnej testowania hipotezy H_0 dotyczącej średniej, wprowadzono dwa kryteria:

- prawdopodobieństwo P (odrzućcia hipotezy $H_0 \mid \mu < \mu_0) \leq \alpha$
 - prawdopodobieństwo P (przyjęcia hipotezy $H_0 \mid \mu > \mu_0 + \epsilon) \leq \beta$,
- gdzie parametry α, β, ϵ dobrano na podstawie badań NAYLORA [2]

$$\alpha = 0,05$$

$$\beta = 0,25$$

$$\epsilon = 0,05 \mu_0$$

przy czym μ_0 jest hipotetyczną wartością średnią rozkładu obciążenia \dot{U} . W analizie sekwencyjnej oblicza się estymator wartości średniej oraz estymator wariancji z próby

$$\hat{U}_N = \sum_{n=1}^N \hat{U}_n / N \quad (9)$$

$$s_N^2 = \sum_{n=1}^N (\hat{U}_n - \hat{U}_N)^2 / (N - 1) \quad (10)$$

gdzie N jest tak dobrane, że

$$a(\gamma) \leq 1,25 \ln(1/\gamma) \quad (11)$$

przy czym

$$a(\gamma) = \left[\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{2}{N-1}} - 1 \right] \frac{N-1}{2} \quad (12)$$

$$\gamma = \min(\alpha, \beta) \quad (13)$$

Następnie powtarza się obliczenia dla kolejnego wylosowanego zbioru liczb pseudolosowych $\{r_l, l=1, L\}$ i zatrzymuje się procedurę losowania oraz sprawdza się czy spełnione są dwa kryteria

$$\sum_{n=1}^N (\hat{U}_n - \mu_0 - \delta/2) > s_N^2 a(\alpha)/2d - (N+1)(\delta/2 - d) \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^N (\hat{U}_n - \mu_0 - \delta/2) < -s_N^2 a(\beta)/2d + (N+1)(\delta/2 - d) \quad (15)$$

przy czym

$$d = 3\delta/8 \quad (16)$$

Jeżeli kryteria (15) i (16) nie są spełnione, to należy uruchomić procedurę losowania, przy czym liczba $N=N+1$. Jeżeli kryterium (15) lub (16) jest spełnione, to obliczenia są zakończone. Hipotetyczną wartość średnią μ_0 można obliczyć z równania

- przy dodawaniu wykresów

$$\mu_0 = \sum_{l=1}^L \int_0^{\bar{v}_d} \hat{U}_1 d\bar{v}/\bar{v}_d \quad (17)$$

- przy odejmowaniu wykresów

$$\mu_0 = \sum_{l_1=1}^{L_1} \int_0^{\bar{v}_d} \hat{U}_{1_1} d\bar{v}/\bar{v}_d - \sum_{l_2=1}^{L_2} \int_0^{\bar{v}_d} \hat{U}_{1_2} d\bar{v}/\bar{v}_d \quad (18)$$

4. Przykład liczbowy

W celu przeprowadzenia przykładowych obliczeń wykorzystano wykresy uporządkowane obciążeń urządzeń A i B ujęte na rys. 1. Linearyzacji tych wykresów dokonano na rys. 2.

Hipotetyczna wartość średnia μ_0 :

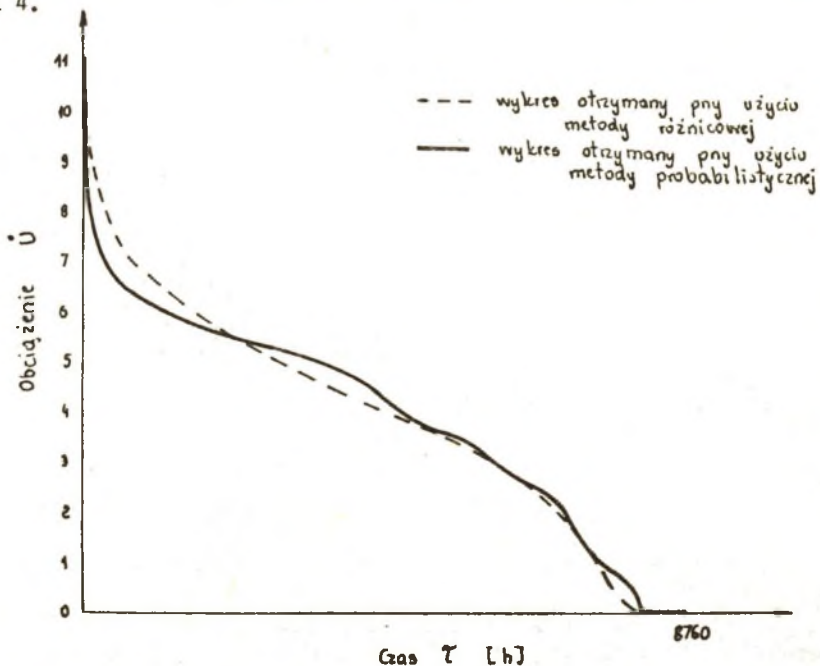
- przy dodawaniu wykresów

$$\mu_0 = \int_0^{\tau_d} \dot{U}_1 d\tau/\tau_d + \int_0^{\tau_d} \dot{U}_2 d\tau/\tau_d = 2,821 + 1,361 = 4,182$$

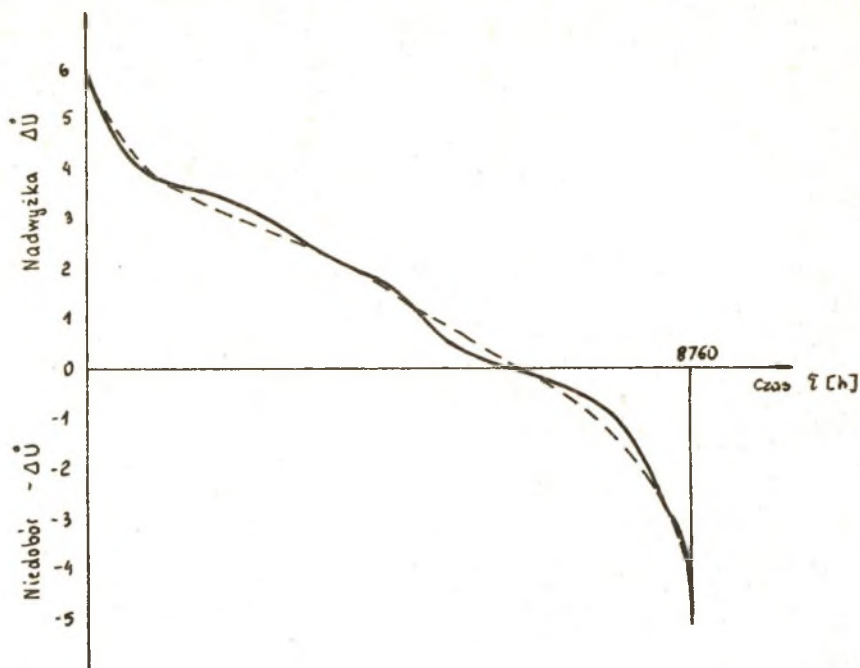
- przy odejmowaniu wykresów

$$\mu_0 = \int_0^{\tau_d} \dot{U}_1 d\tau/\tau_d - \int_0^{\tau_d} \dot{U}_2 d\tau/\tau_d = 2,821 - 1,361 = 1,460$$

Obliczenia przerwano po $N = 78$ eksperymentach cyfrowych przy dodawaniu wykresów oraz przerwano po $N = 506$ odpowiednio przy odejmowaniu wykresów. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3 i 4. Dla porównania dokonano kompozycji tych samych wykresów metodą różnicową. Wyniki przedstawiono na rys. 3 i 4.



Rys. 3. Suma probabilistyczna uporządkowanych wykresów urządzeń A i B
 Fig. 3. Probabilistic Sum of ordered graphs for instruments A and B



Rys. 4. Różnica probabilistyczna uporządkowanych wykresów urządzeń A i B

Podsumowanie

Probabilistyczna metoda kompozycji wykresów uporządkowanych umożliwia:

- zwiększenie dokładności obliczeń dzięki podziałowi wykresów uporządkowanych na paski o różnej szerokości przy równoczesnej linearyzacji jego przebiegu w obrębie każdego paska,
- kompozycję kilku wykresów uporządkowanych jednocześnie.

LITERATURA

- [1] Majza E.: Przykłady zastosowań badań operacyjnych w energetyce ciepłej. Skrypt Politechniki Śląskiej. Nr 1169.
- [2] Nyator T.H.: Modelowanie cyfrowe systemów ekonomicznych. PWN, Warszawa 1975.
- [3] Szargut J.: Analiza termodynamiczna i ekonomiczna w energetyce przemysłowej. WNT, Warszawa 1983.

Recenzent: Doc. dr inż. Jerzy Maron

Wpłynęło do redakcji w styczniu 1987

ВЕРоятностный метод композиции упорядоченных диаграмм

Резюме

Предметом рассуждения является композиция упорядоченных диаграмм. Применён вероятностный метод, основанный на методе Монте Карло. Сравнены результаты вычислений с применяемым до сих пор, дифференциальным методом.

PROBABILISTIC METHOD OF COMPOSITION OF ORIENTED DIAGRAMMS

Summary

The subject of consideration is the composition of oriented diagrams. The probabilistic method has been used based upon the Monte-Carlo method. The results of calculations have been compared with finite-difference method used up to now.