ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ENERGETYKA z. 102 Nr kol. 935

Andrzej RUSIN

Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

PORÓWNANIE METOD WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ W WIRUJĄCYCH TARCZACH W WARUNKACH PEŁZANIA

Streszczenie. W pracy dokonano przeglądu metod wyznaczania rozkładu naprężeń w wirujących tarczach w warunkach pełzania. Podano algorytmy obliczeniowe. Na przykładzie konkretnej tarczy porównano uzyskane rezultaty.

1. Wstęp

Wysokie temperatury czynników roboczych stosowanych w maszynach przepływowych wymagają uwzględnienia przy projektowaniu elementów tych maszyn zjawiska pełzania. Zjawisko to powodujące wystąpienie znacznych odkształceń trwałych ma decydujący wpływ na trwałość i niezawodność pracy całej maszyny, a w szczególności wirnika. Zagadnienia związane z projektowaniem w warunkach pełzania przedstawiono w [1, 2, 3, 4, 12]
W pracy [11] przedstawiono model wytrzymałościowy wirnika wentylatora wysokotemperaturowego z uwzględnieniem pełzania, natomiast w [12] omówiono wpływ cech konstrukcyjnych i temperatury czynnika na żywotność wirnika wentylatora. W niniejszej pracy dokonano przeglądu metod obliczeniowych stosowanych do określenia rozkładu naprężeń w wirujących tarczach symetrycznych. Przyjęto, że w tarczy panuje płaski stan naprężenia. Do określenia zależności wiążących naprężenia z odkształceniami w warunkach pełzania wykorzystano formuły wynikające z teorii starzenia [5, 11]:

$$\varepsilon_i = \Omega \ \sigma_i^{\,n} \tag{1}$$

$$\Omega = a + kt$$

gdzie:

t - czas,

n,a,k - współczynniki zależne od temperatury.

W następnych punktach omówiono poszczególne metody i podano algorytmy obliczeniowe.

2. Metoda całkowo-iteracyjna

Podstawowymi równaniami wykorzystywanymi w tej metodzie są:

- równanie równowagi sił

$$\frac{d(r\,h\,\sigma_r)}{dr} - \sigma_t\,h + \rho\,\omega^2\,r^2\,h = 0 \tag{2}$$

- warunek nierozdzielności

$$\varepsilon_t - \varepsilon_r + r\,\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} = 0 \tag{3}$$

- związki między składowymi naprężeń i odkształceń

$$\varepsilon_r = \beta\,(\sigma_r - \nu\,\sigma_t) \tag{4}$$

$$\varepsilon_t = \beta\,(\sigma_t - \nu\,\sigma_r) \tag{5}$$

gdzie:

$$\beta = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{6}$$

Całkując równanie (2) w granicach od promienia R_o otworu tarczy do promienia bieżącego otrzymamy:

$$\sigma_r = \frac{1}{hr}\left(\int_R^r \sigma_t\,h\,dr - p_o\,R_o\,h_o - \Phi\right) \tag{7}$$

gdzie:

R_z - promień obrzeża zewnętrznego,
R_o - promień obrzeża wewnętrznego,
p_o - ciśnienie w otworze piasty,
h_o - szerokość piasty na promieniu R_o,

$$\Phi = \rho\,\omega^2 \int_{R_o}^r h\,r^2\,dr \tag{8}$$

Wprowadzając do warunku nierozdzielności związki (4), (5), w których przyjęto $\nu = 0{,}5$, a następnie całkując po promieniu tak otrzymane wyrażenie dostajemy:

$$(2\ \sigma_t - \sigma_r) = C\ .\ \exp\left(-3 \int_{R_o}^{r} \frac{1-\varphi}{2-\varphi}\ \frac{dr}{r}\right) \tag{9}$$

gdzie:

C - stała całkowania wyznaczona z warunku na brzegu zewnętrznym (dla $r = R_z$ $\sigma_r = \sigma_R$)

$$\varphi = \frac{\sigma_r}{\sigma_t} \tag{10}$$

Przyjmując, że przebieg procesu pełzania jest zgodny z prawem (1) oraz wykorzystując do określenia σ_i warunek Hubera-Misesa otrzymamy:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_R R_z h_z + p_o R_o h_o + \Phi_R}{\int_{R_o}^{R_z} \frac{h\ .\eta}{\sqrt[n]{\Omega}}\ dr}\ .\ \frac{\eta}{\sqrt[n]{\Omega}} \tag{11}$$

gdzie:

$$\eta = \sqrt[n]{\frac{1}{(2-\varphi)\ (1-\varphi+\varphi^2)^{\frac{n-1}{n}}}\ \exp\left(-3\ .\int_{R_o}^{r} \frac{1-\varphi}{2-\varphi}\ \frac{dr}{r}\right)} \tag{12}$$

$$\Phi_R = \rho\ \ \omega^2 \int_{R_o}^{R_z} h\ r^2\ dr \tag{13}$$

$$h_o = h(R_o)$$

$$h_z = h(R_z)$$

Przy zastosowaniu w miejsce warunku Hubera-Misesa warunku maksymalnego naprężenia stycznego przy założeniach $\sigma_t > \sigma_r > 0$ wielkość η określamy z zależności:

$$\eta = \sqrt[n]{\frac{1}{(2-\varphi)}\ .\ \exp\left(-3 \int_{R_o}^{r} \frac{1-\varphi}{2-\varphi}\ \frac{dr}{r}\right)} \tag{14}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że funkcja Ω może być przedstawiona w postaci iloczynu 2 funkcji: jednej Ω_1 zależnej od temperatury, a drugiej Ω_2 zależnej od czasu oraz przyjmując równomierne nagrzewanie tarczy (Ω_1 nie zależy od promienia) otrzymamy ostatecznie:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_R R_z h_z + p_o R_o h_o + \Phi_R}{\int_{R_o}^{R_z} h \eta \, dr} \cdot \eta \tag{15}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{hr} \left(\int_{R_o}^{r} \frac{\sigma_R R_z h_z + p_o R_o h_o + \Phi_R}{\int_{R_o}^{R_z} h \eta \, dr} \cdot \eta \cdot h \, dr - p_o R_o h_o - \Phi \right) \tag{16}$$

Równania (15), (16) rozwiązywane metodą kolejnych przybliżeń pozwalają określić wartości naprężeń składowych ustalonego pełzania materiału tarczy.

3. Metoda izochronicznych krzywych pełzania

Idea tej metody polega na wielokrotnym powtarzaniu rozwiązania sprężystego z wykorzystaniem zastępczych stałych materiałowych

$E_z = E(\varepsilon_i, \sigma_i, t)$ $\nu_z = \nu(\varepsilon_i, \sigma_i, t)$ t - czas

Zastępcze stałe określamy następująco [9]:

$$E_z = \frac{3 \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{2(1+\nu) + (1-2\nu)\frac{\sigma_i}{E\varepsilon_i}} \tag{17}$$

$$\nu_z = \frac{1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\sigma_i}{E\varepsilon_i}}{2 + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\sigma_i}{E\varepsilon_i}} \tag{18}$$

W praktyce często przyjmuje się wartość współczynnika Poissona za stałą równą dla odkształceń plastycznych 0.5. Przy określeniu zależności pomiędzy intensywnością naprężeń σ_i korzystamy z izochronicznych krzywych pełzania [5], których analityczną postać możemy również uzyskać ze związków teorii starzenia.

Procedura obliczeniowa wg powyższej metody ma postać [3]:

- obliczamy tarczę jako sprężystą ($E_z = E$, $\nu_z = \nu$) znajdując składowe naprężeń oraz intensywność naprężeń σ_i,
- mając dane E_z oraz ν_i obliczamy ε_i^*,
- wykorzystując analityczną postać izochronicznych krzywych pełzania oraz wartość ε_i^* znajdujemy σ_i^*,
- wstawiając wartość σ_i^* oraz ε_i^* do wzorów (17) i (18) określamy nowe wartości E_z, ν_z.

Powyższy proces powtarzamy do momentu ustalenia się wartości naprężeń oraz zastępczych stałych E_z, ν_z.

4. Metoda odkształceń początkowych (initial strains)

Metoda ta umożliwia uwzględnienie w obliczeniach spadku naprężeń od wartości w stanie sprężystym do wartości w warunkach pełzania ustalonego. Podobnie jak poprzednio wykorzystujemy równanie równowagi (2) i warunek nierozdzielności (3). Natomiast związki między naprężeniem i odkształceniem przedstawiamy w postaci:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_t) + \varepsilon_r^c + \Delta\varepsilon_r^c \tag{19}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\,\sigma_r) + \varepsilon_t^c + \Delta\varepsilon_t^c \tag{20}$$

gdzie:

ε_r^c, ε_t^c - zakumulowane odkształcenie pełzania,

$\Delta\varepsilon_r^c$, $\Delta\varepsilon_t^c$ - przyrost odkształceń pełzania w bieżącym kroku czasowym

$$\Delta\varepsilon_r^c = \frac{\Delta\varepsilon^c}{2\,\sigma_i}(2\,\sigma_r - \sigma_t) \tag{21}$$

$$\Delta\varepsilon_r^c = \frac{\Delta\varepsilon^c}{2\,\sigma_i}(2\,\sigma_t - \sigma_r) \tag{22}$$

$$\Delta\varepsilon^c = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\Delta\varepsilon_r^c)^2 + (\Delta\varepsilon_t^c)^2 + \Delta\varepsilon_r^c \cdot \Delta\varepsilon_t^c} \tag{23}$$

Kolejnym związkiem wykorzystywanym w tej metodzie jest zależność przyrostu odkształceń $\Delta\varepsilon^c$ od przyrostu czasu Δt. Zależność tąką możemy otrzymać z równania (1).

Algorytm rozwiązania powyższego układu równań polega na przyjęciu kroku czasowego Δt oraz wstępnym założeniu wartości $\Delta\varepsilon_r^c$, ε_t^c. Proces iterowania powtarza się do momentu ustalenia się $\Delta\varepsilon_r^c$, $\Delta\varepsilon_t^c$. Następnie przyjmujemy nową wartość Δt i postępujemy jak poprzednio, przy czym ε_r^c, ε_t^c równe są $\Delta\varepsilon_r^c$ i $\Delta\varepsilon_t^c$ z poprzednich kroków czasowych.

5. Przybliżona metoda Wahla

Przybliżony sposób podany przez Wahla [1] umożliwia bezpośrednie wyznaczenie naprężeń w tarczy z otworem. Do wyznaczania związku między naprężeniami i odkształceniami zastosowano warunek maksymalnego naprężenia stycznego oraz założono, że odkształcenie następuje tylko w kierunku maksymalnego naprężenia stycznego. W rozważanym zagadnieniu mamy $\sigma_t > \sigma_r > 0$, co przy uwzględnieniu (1) daje:

$$\varepsilon_t = \Omega \sigma_t^{\,n} \tag{24}$$

Przyjęcie dodatkowego uproszczenia, że u = const (co nie odnosi się do tarcz pełnych a jest tylko przybliżeniem dla tarcz z otworem) pozwala w powiązaniu ze związkiem (2) otrzymać równania:

$$\sigma_r = \frac{1}{hr}\left[\frac{h_o R_o \sigma_o - h_z R_z \sigma_R - \int_{R_o}^{R_z} \rho h \omega^2 r^2 dr}{\int_{R_o}^{R_z} hr^{-\frac{1}{n}} dr} \cdot \int_{R_o}^{r} hr^{-\frac{1}{n}} dr - \rho\omega^2 \int_{R_o}^{r} hr^2 dr + h_o R_o \sigma_o\right] \tag{25}$$

$$\sigma_t = \frac{h_o R_o \sigma_o - h_z R_z \sigma_R - \int_{R_o}^{R_z} \rho h \omega^2 r^2 dr}{\int_{R_o}^{R_z} hr^{-\frac{1}{n}} dr} r^{-\frac{1}{n}} \tag{26}$$

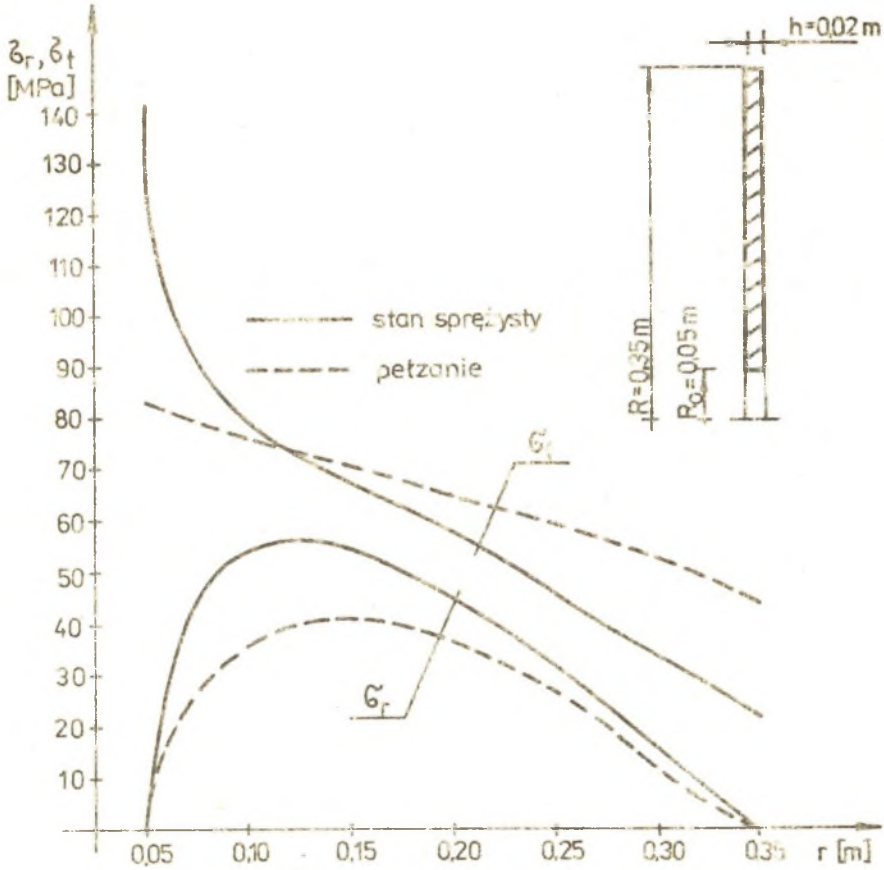
6. Wyznaczenie naprężeń w wirujących tarczach na podstawie przedstawionych algorytmów

W celu porównania omówionych algorytmów przeprowadzono obliczenia wirujących tarcz o stałej i zmiennej grubości. Do obliczeń przyjęto:

- promień obrzeża zewnętrznego tarczy $R_z = 0{,}35$ m,
- promień obrzeża wewnętrznego tarczy $R_o = 0{,}05$ m,
- prędkość kątowa $\omega = 420$ 1/s,
- warunki brzegowe: dla $r = R_o$ $\sigma_o = 0$,
  dla $r = R_z$ $\sigma_R = 0$,
- gęstość materiału tarczy $\rho = 7800$ kg/m^3,
- współczynniki funkcji pełzaniowej: $a = 8{,}779 \cdot 10^{-12}$,
  $k = 3{,}964 \cdot 10^{-4}$.

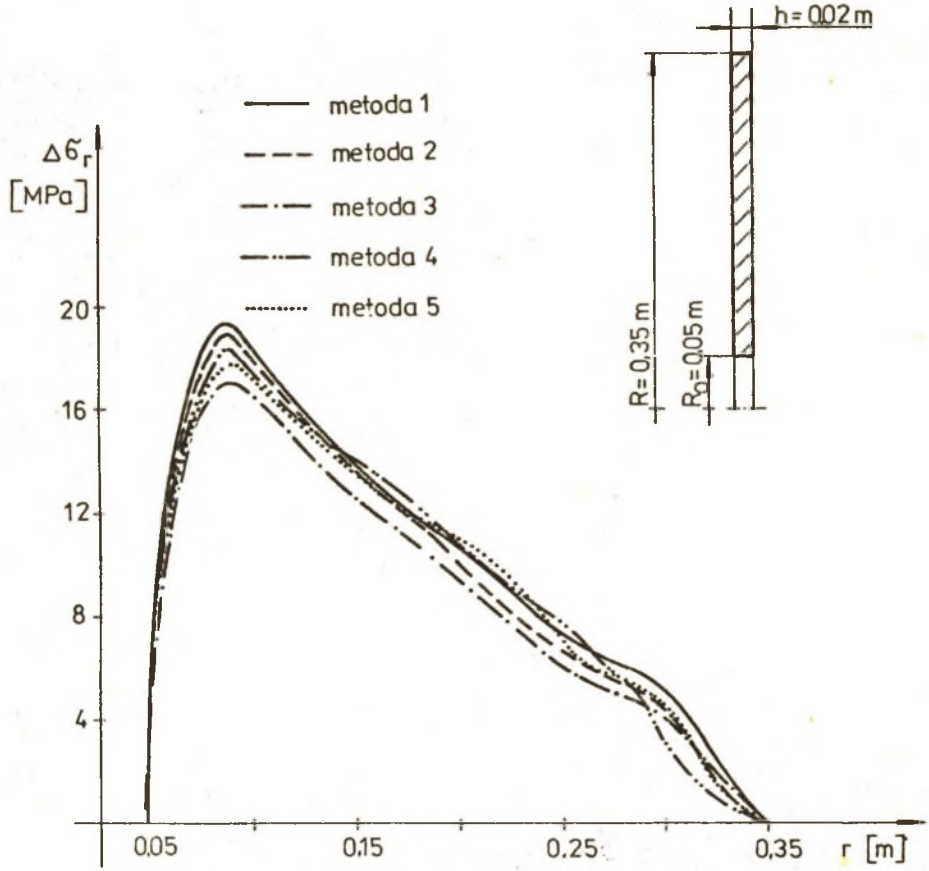
Pozostałe dane podano na rysunkach.

Rozkład naprężeń w stanie sprężystym oraz w warunkach pełzania dla tarczy o stałej grubości przedstawia rys. 1, natomiast dla tarczy o zmiennej grubości rys. 4. Do obliczeń stosowano metodę całkowo-iteracyjną.



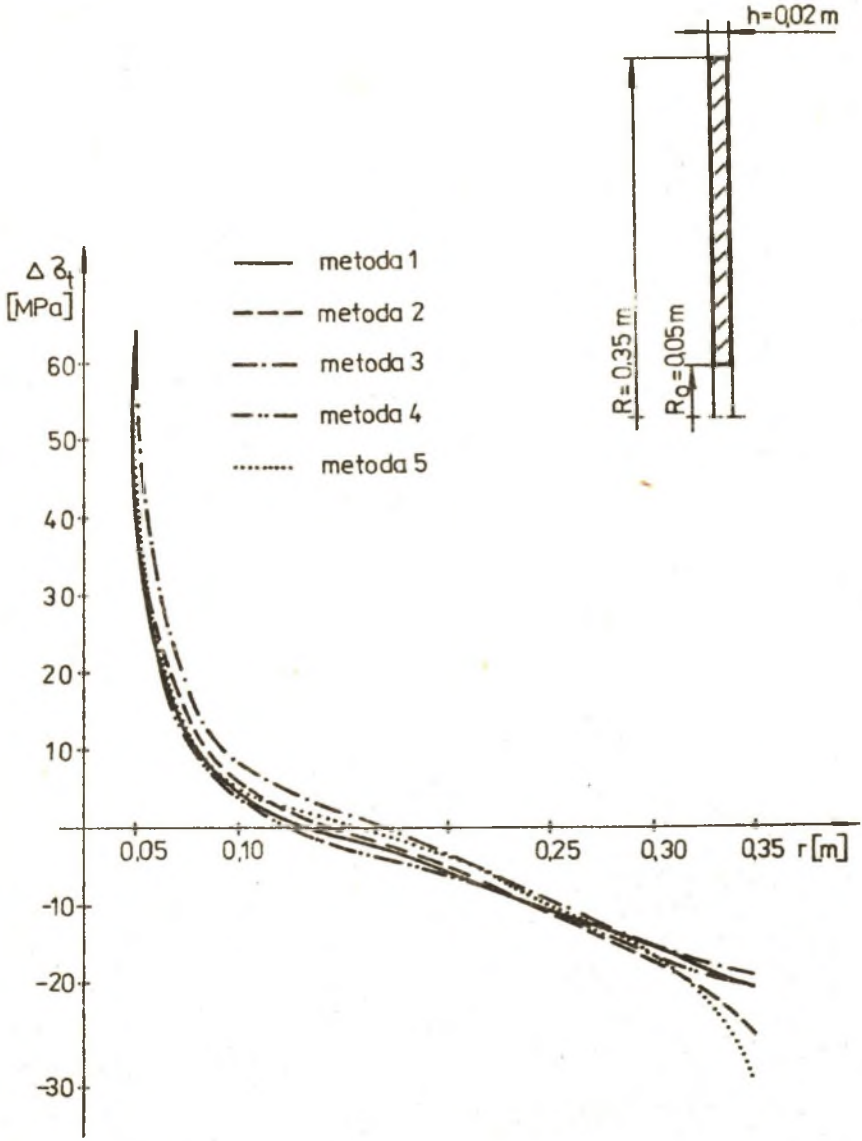
Rys. 1. Rozkład naprężeń w stanie sprężystym i w warunkach pełzania dla tarczy o stałej grubości

Fig. 1. Stresses distribution in elastic state and creeping conditions in the disc of the constat thickness



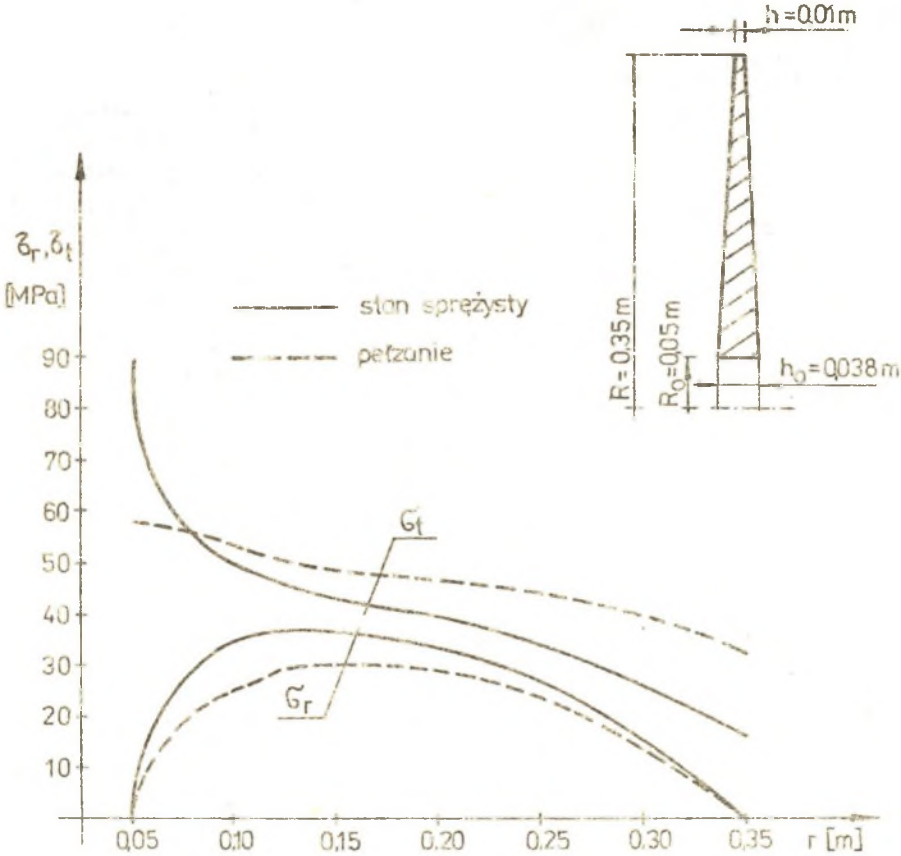
Rys. 2. Zmiana naprężeń promieniowych σ_r dla tarczy o stałej grubości

Fig. 2. Changes of radial stresses for the disc of the constant thickness



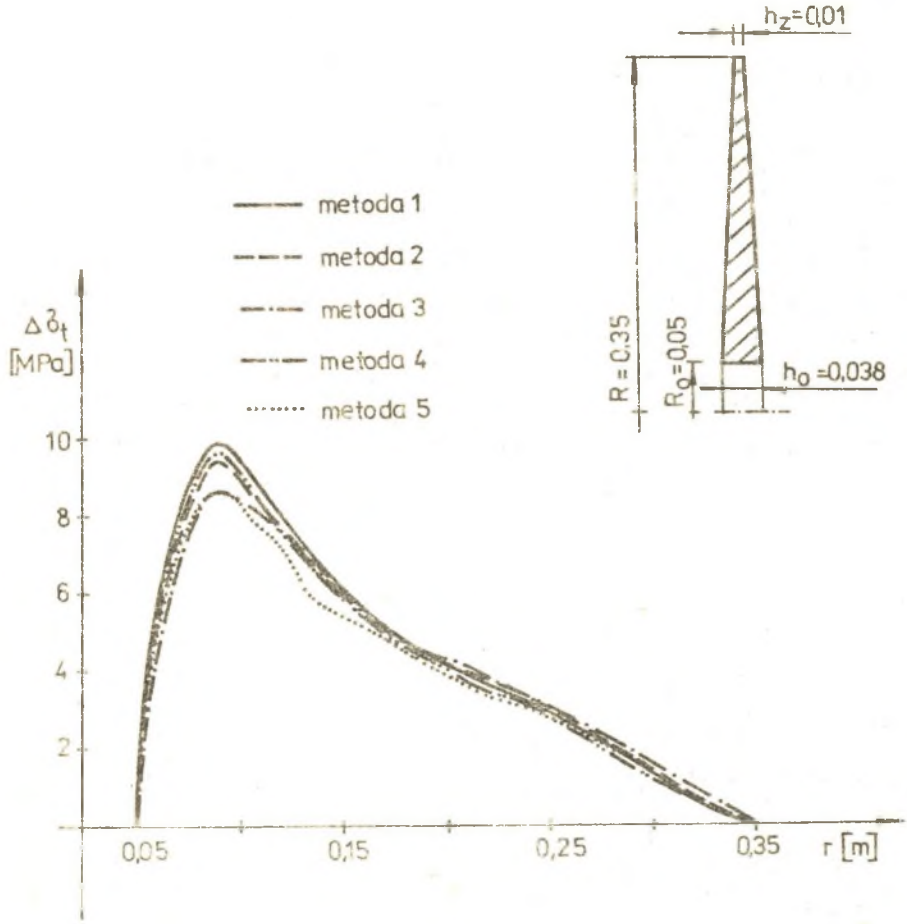
Rys. 3. Zmiana naprężeń obwodowych σ_t dla tarczy o stałej grubości

Fig. 3. Changes of hoop stresses for the disc of the constant thickness

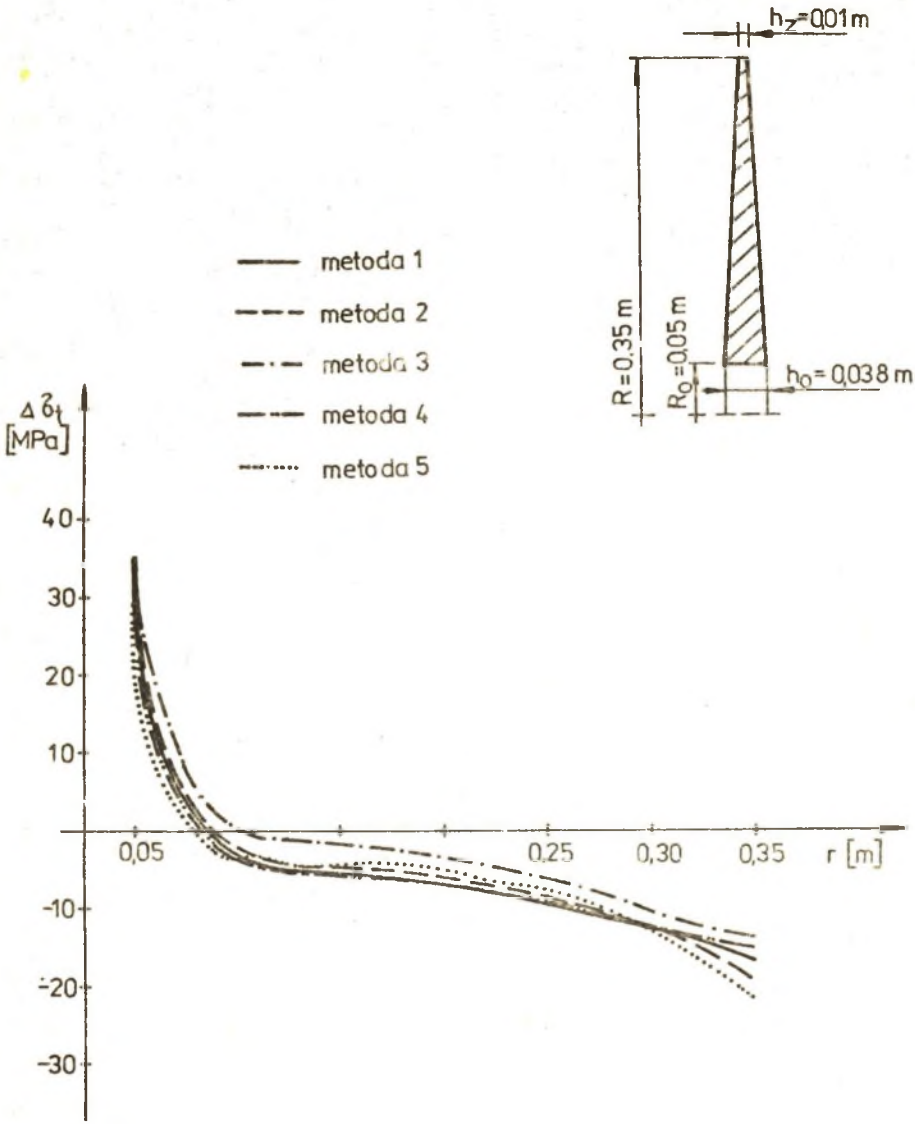


Rys. 4. Rozkład naprężeń w stanie sprężystym i w warunkach pełzania dla tarczy o zmiennej grubości

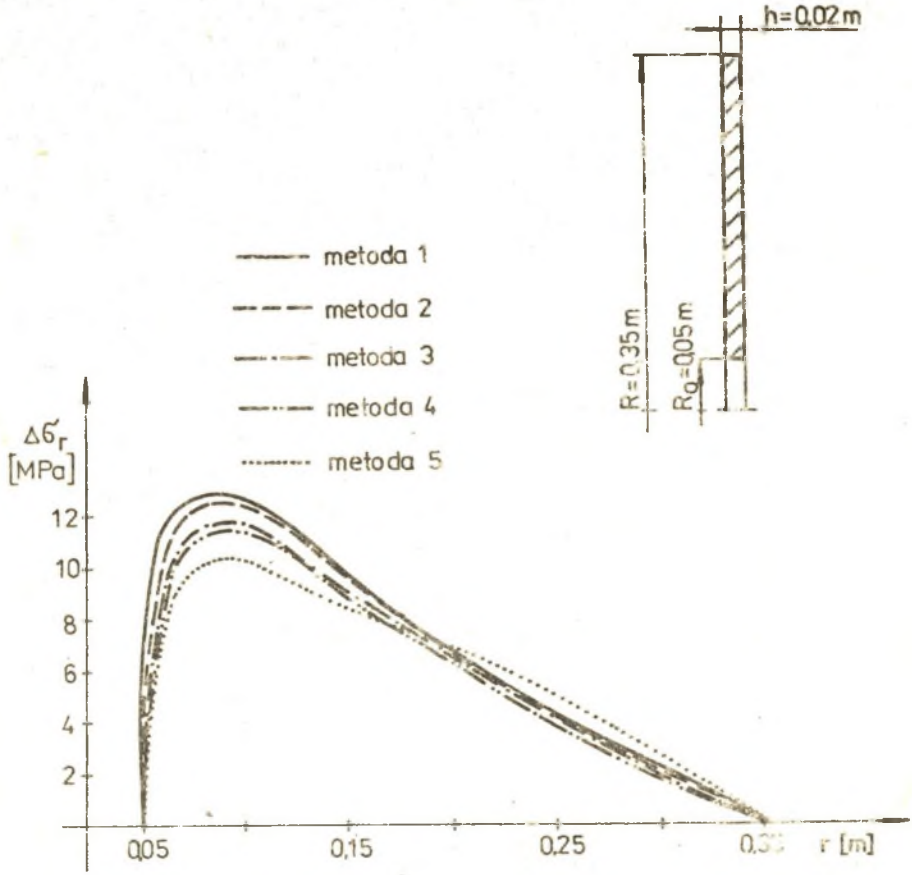
Fig. 4. Distribution of stresses in the elastic state and in the creeping conditions for the disc of variable thickness



Rys. 5. Zmiana naprężeń promieniowych σ_r dla tarczy o zmiennej grubości
Fig. 5. Changes of radial stresses for the disc of variable thickness

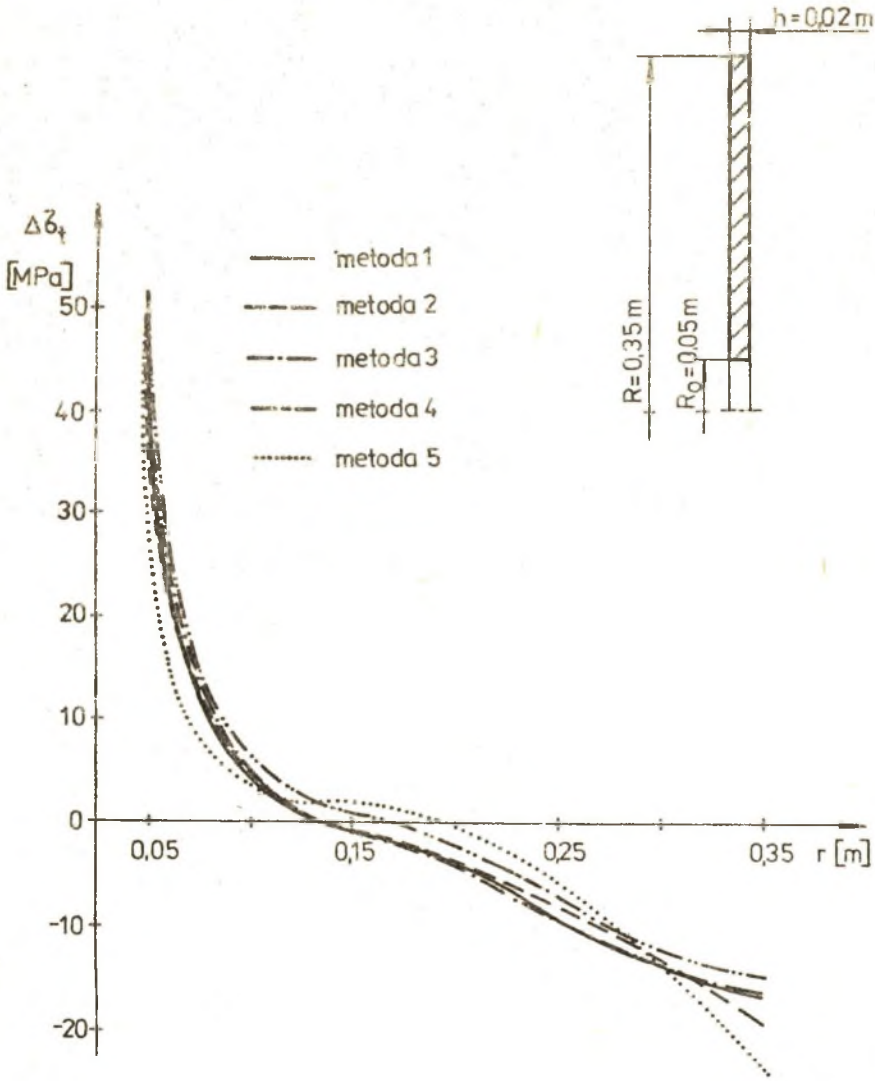


Rys. 6. Zmiana naprężeń obwodowych σ_t dla tarczy o zmiennej grubości
Fig. 6. Changes of hoop stresses for the disc of the variable thickness



Rys. 7. Zmiana naprężeń promieniowych dla tarczy o stałej grubości (wykładnik pełzania n = 2,33)

Fig. 7. Changes of radial stresses for the discs of constant thickness



Rys. 8. Zmiana naprężeń obwodowych dla tarczy o stałej grubości (wykładnik pełzania n = 2,33)

Fig. 8. Changes of hoop stresses for the disc of constant thickness

Kolejne rysunki prezentują porównanie wartości zmian naprężeń w stanie sprężystym oraz w warunkach pełzania uzyskane za pomocą omawianych algorytmów. Rys. 2 i rys. 5 przedstawiają zmianę naprężeń promieniowych $\Delta\sigma_r = \sigma_r^s - \sigma_r^p$, natomiast rys. 3 oraz rys. 6 zmianę naprężeń obwodowych $\Delta\sigma_t = \sigma_t^s - \sigma_t^p$ (σ_r^s, σ_t^s - stan sprężysty, σ_r^p, σ_t^p - pełzanie).

W celu porównania wpływu wykładnika pełzania n na zmiany naprężeń uzyskanych za pomocą różnych metod przeprowadzono obliczenia tarcz o stałej grubości przy wykładniku pełzania n = 2,33. Rezultaty przedstawiają rys. 7 i 8.

Na rysunkach przyjęto następujący opis metod:

- metoda 1 - metoda całkowo-iteracyjna wykorzystująca warunek Hubera-Misesa,
- metoda 2 - metoda całkowo-iteracyjna wykorzystująca warunek maskymalnego naprężenia stycznego,
- metoda 3 - metoda izochronicznych krzywych pełzania,
- metoda 4 - metoda odkształceń początkowych,
- metoda 5 - przybliżona metoda Wahla dla tarcz z otworem.

7. Analiza uzyskanych rezultatów

Uzyskane rozkłady naprężeń świadczą o dobrej zgodności wyników otrzymanych za pomocą różnych metod. Jedynie przybliżona metoda Wahla daje większą odchyłkę naprężeń w porównaniu z pozostałymi. Nieco wyższe wartości naprężeń uzyskuje się również przy stosowaniu warunku maksymalnego naprężenia stycznego. Pozostałe trzy metody dają zbliżone wyniki i to bez względu na wartość wykładnika pełzania n. Metoda odkształceń początkowych wymaga jednak bardzo długich czasów obliczeń oraz eksperymentalnego doboru kroku czasowego. Natomiast metoda całkowo-iteracyjna z warunkiem Hubera-Misesa prowadzi przy bardziej złożonych konstrukcjach do skomplikowanych układów równań.

Stosunkowo prostą w zastosowaniach numerycznych jest metoda izochronicznych krzywych pełzania. Opracowany w oparciu o tę metodę algorytm umożliwia dokonywanie obliczeń również w zakresach plastycznych.

LITERATURA

[1] Finnie I., Heller W.: Pełzanie materiałów konstrukcyjnych. WNT, Warszawa 1962.

[2] Kraus H.: Creep analysis. John Wiley and Sons. New York 1980.

[3] Demianiuszko I., Birger J.: Resoziety na procznost wraszczajuszczichsja diskow. Muszinostrojenije, Moskwa 1978.

[4] Malinin N.N.: Rascziety na połzucziest elementow maszinostroitielnych konstrukcji. Maszinostrojenije, Moskwa 1981.

[5] Malinin N.N., Rżysko I.: Mechanika materiałów, PWN, Warszawa 1981.

[6] Malinin N.N.: Procznost turbomaszin. Maszgiz, Moskwa 1962.

[7] Mendelson A., Hirschberg M., Manson S.: A general approach to the practical solution af creep problems. Transaction of ASME vol. 81D 1959.

[8] Wahl A., Sankey G., Manjoine M.: Creep tests of rotating disks at elevated temperature and comparison with theory. Journal of applied mechanics. 1954.

[9] Kosman G., Rusin A.: Analiza naprężeń w wirnku wentylatora promieniowego z uwzględnieniem pełzania. Praca naukowo-badawcza, Gliwice 1984.

[10] Kosman G., Rusin A.: Model wytrzymałościowy wirnika wentylatora wysokotemperaturowego z uwzględnieniem pełzania. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Energetyka", z. 91, Gliwice 1985.

[11] Kosman G., Rusin A.: Wpływ cech konstrukcyjnych i temperatury przepływającego czynnika na żywotność wirnika wentylatora. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Energetyka" z. 91, Gliwice 1985.

[12] Chmielniak T., Kosman G., Witkowski A., Rusin A.: Basic constructional problems of high-temperature fans and examples of their solution 8th Conference on Fluid Machinery Budapest 1987.

Recenzent: Doc. dr inż. Jan Radwański

Wpłynęło w lipcu 1987.

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИТАХ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р е з ю м е

В работе дан обзор методов определения распределеня напряжений во вращающихся щитах в условиях ползучести. Приведены расчётные алгоритмы. На примере конкретного щита сравнены полученные результаты.

COMPARISON OF METHODS OF STRESSES ASSIGNMENTS IN ROTATING DISKS IN CREEPING CONDITIONS

S u m m a r y

The survey of methods of assignment of stresses distribution in rotating discs in creeping conditions is given. Calculation algorithms are given. The results are compared taking the examplery disc into account.